АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2004, том 50, № 4, с. 496–503

УДК 534.222

ЛОКАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В УПРУГИХ ТЕЛАХ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2004 г. Д. А. Индейцев, Е. В. Осипова

Институт проблем машиноведения РАН

199178 Санкт-Петербург, В.О., Большой пр. 61

E-mail: oav@phase.ipme.ru

Поступила в редакцию 10.06.2003 г.

На примере задачи о движении полубесконечной струны, лежащей на упругом основании, предлагается метод описания процесса локализации волн вблизи включений в случае кубической нелинейности, который основан на использовании методов возмущений по амплитуде колебаний локализованной моды. Выявлена природа расходимостей и установлено, что вековые слагаемые могут быть двух типов: с той же фазой, что и у локализованной моды, и с противоположной. Доказано, что сочетание метода перенормировки и метода многих масштабов обеспечивает сходимость решений, которые ищутся в виде степенных рядов по амплитуде колебаний локализованной моды. Установлено, что процесс локализации определяется типом дискретного спектра, видом нелинейности и характером дисперсии. Нелинейность упругого основания вызывает два характерных явления. Во-первых, частота колебаний локализованной волны становится зависящей от амплитуды волны. Во-вторых, в системе могут возникнуть бегущие волны кратной частоты, которые отводят энергию от локализованной волны и приводят к ее затуханию. Характер затухания определяется тем, чему равна минимальная частота этих бегущих волн (так как она должна быть больше частоты отсечки). Зависимость времени жизни локализованной волны от массы динамического включения содержит ряд максимумов. В частности, первый максимум соответствует минимальной амплитуде бегущей волны с тройной частотой.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно, в упругих телах, имеющих одну из границ бесконечной протяженности, со смещенным относительно нуля непрерывным спектром собственных частот колебаний при наличии динамических включений может появляться дискретный спектр [1–8]. При действии на такие тела сил, гармонически изменяющихся со временем, могут возникать резонансные явления. Причина этого заключается в том, что частоты колебаний возмущающей нагрузки могут совпадать с частотами дискретного спектра. Исследования характера волновых процессов в системах со смешанным спектром являются в настоящее время весьма актуальными [9–15]. В частности, неоднократно отмечался эффект "притормаживания" распространяющейся упругой волны вблизи включений масс [1, 2, 7, 16]. При этом происходила локализация волны деформаций, которая иногда приводила к локальной потере устойчивости конструкции и даже ее разрушению. Эффект "задержки" волны вблизи включения объясняется в линейной теории существованием в общем спектре собственных форм колебаний, на которые может быть разложена распространяющаяся упругая волна, стоячих волн, локализующихся вблизи включений. На интуитивном уровне ясно, что нелинейные явления должны искажать эффект локализации за счет изменения "ловушечных" частот, возникновения мод с кратными частотами, взаимодействия с непрерывным спектром и т.д. При малых амплитудах волн эти явления должны быть незначительными. Именно поэтому исследуемое явление локализации имеет место на практике. Тем не менее изучение характера влияния нелинейностей на ловушечные моды в системах упругих тел вызывает значительный интерес. В частности, одним из важнейших вопросов здесь является вопрос, как влияет амплитуда упругих волн на частоту ловушечных мод колебаний. Другой – оценка "времени жизни" ловушечной моды.

Для изучения этих явлений в данной статье будет рассматриваться нестационарное движение полубесконечной струны, лежащей на основании жесткостью k, которое характеризуется кубической нелинейностью, и имеющей на конце сосредоточенную массу M (рис. 1). В качестве нагрузки $P(\xi, \tau)$ принимается сосредоточенная сила вида $P_0\delta(\xi - \xi_0)\,\delta(\tau)$, где δ – дельта-функция Дирака, ξ – пространственная координата, τ – время. Уравнение, описывающее волновые процессы в струне, имеет вид уравнения Клейна–Гордона с куби-

ческой нелинейностью и дельтаобразной правой частью

$$Ty_{\xi\xi} - \rho y_{\tau\tau} - ky - \nu y^3 = P_0\delta(\xi - \xi_0)\delta(\tau - 0), \quad (1)$$

а начальные и граничные условия можно записать следующим образом:

$$y(\xi, 0) = y_\tau(\xi, 0) = 0, \quad (2)$$

$$y(\infty, \tau) = y_\xi(\infty, \tau) = 0, \quad (3)$$

$$Ty_\xi|_{\xi=0} = (My_{\tau\tau})_{\xi=0}. \quad (4)$$

Здесь T – натяжение струны, ρ – ее линейная плотность, слагаемое νy^3 представляет нелинейные вклады, вносимые упругим основанием. Уравнение (4) – не что иное как запись второго закона Ньютона для сосредоточенного включения массы M. При $M > 0$ включение "задерживает" волну при отражении и поглощает часть энергии волны, пропорциональную M. Для изучения указанных явлений удобно перейти к безразмерным переменным и константам:

$$u = \frac{\sqrt{\rho T}}{P}y, \quad x = \sqrt{\frac{k}{T}}\xi, \quad t = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\tau, \quad (5)$$

$$m = \frac{M}{\rho}\sqrt{\frac{k}{T}}, \quad \varepsilon = \frac{\nu P^2}{k\rho T}. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} - u - \varepsilon u^3 = \delta(x - x_0)\delta(t) \\ u(x, 0) = u_t(0, x) = 0 \\ u(\infty, t) = u_x(\infty, t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$u_x|_{x=0} = (mu_{tt})_{x=0}. \quad (8)$$

Именно эта нелинейная задача и будет исследоваться в настоящей статье.

ЛОВУШЕЧНЫЕ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЕ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Вначале необходимо найти решение соответствующей линейной проблемы, когда $\varepsilon = 0$, так как оно будет использоваться в рамках теории возмущений при построении нелинейного решения. В этом случае уравнения (7) и (8) будут иметь вид

$$u_{xx} - u_{tt} - u = \delta(x - x_0)\delta(t), \quad (9)$$

$$u_x|_{x=0} = mu_{tt}|_{x=0}. \quad (10)$$

Для того чтобы выявить физические причины эффекта локализации, проанализируем поставленную задачу методом разложения по собственным функциям. Именно этот метод будет использоваться в дальнейшем при анализе нелинейной проблемы. Собственные функции находятся из вспомогательной спектральной задачи

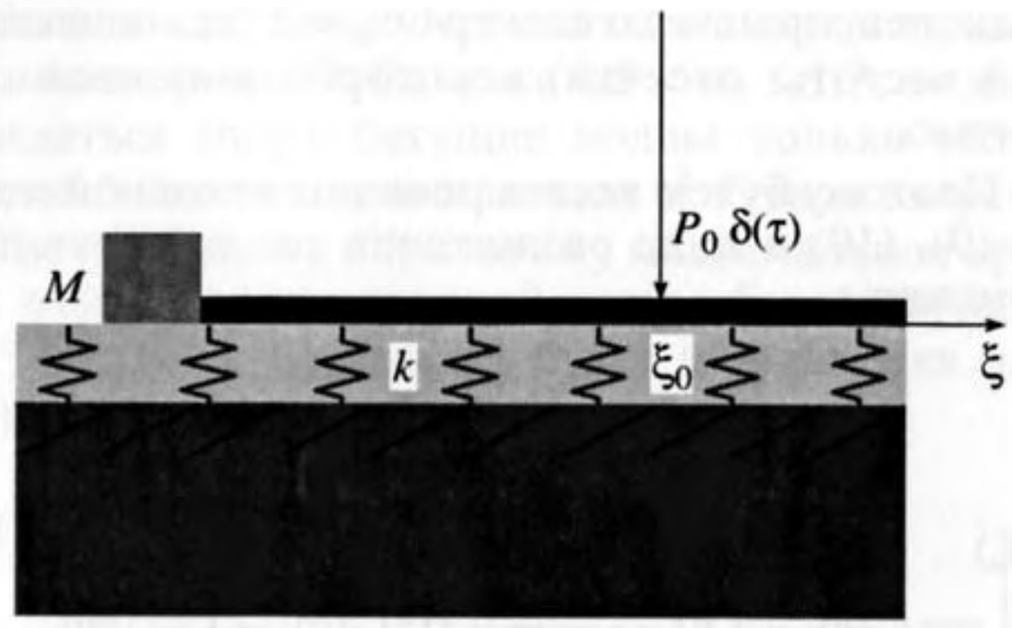

Рис. 1. Схематическое изображение полубесконечной струны, лежащей на основании жесткостью k и имеющей на конце сосредоточенную массу M, с сосредоточенной силой $P_0\delta(\xi - \xi_0)\delta(\tau)$ в качестве нагрузки.

$$u_{xx} - (1 - \omega^2)u = 0, \quad (11)$$

$$u_x|_{x=0} = -m\omega^2 u|_{x=0}. \quad (12)$$

Функции u, u_x принимаются ограниченными на бесконечности. В области частот, меньших граничной ($\omega < 1$), решение уравнения (11) имеет вид $u = qe^{-\sqrt{1-\omega^2}x}$, которое при подстановке в граничное условие (12) дает частотное уравнение данной линейной задачи $\sqrt{1 - \omega_0^2} - m\omega_0^2 = 0$. Интересующее нас решение этого уравнения имеет вид

$$\omega_0 = \frac{1}{m}\sqrt{\sqrt{m^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Зависимость (13) представляет собой убывающую функцию от значения $\omega = 1$ при $m = 0$ до $\omega = 0$ при $m \longrightarrow \infty$. Собственная функция, соответствующая ей, имеет вид "стоячей" формы колебаний

$$u = qe^{-m\omega_0^2 x}. \quad (14)$$

Следовательно, присутствие в спектре дискретной ловушечной частоты ω_0 как раз и приводит к эффекту локализации волн.

В области частот, больших 1, решение спектральной задачи (11), (12) имеет вид

$$u = p\left[\cos(\sqrt{\omega^2 - 1}x) - \frac{m\omega^2}{\sqrt{\omega^2 - 1}}\sin(\sqrt{\omega^2 - 1}x)\right]. \quad (15)$$

Собственные значения ω представляют собой непрерывный спектр и заполняют всю ось от 1 до ∞. Выделенная частота ω_0 отделена от нижней гра-

ницы непрерывного спектра $\omega_b = 1$ (так называемой частоты отсечки) некоторой конечной областью.

Поэтому будем искать решение исходной задачи (9), (10) в виде разложения по собственным функциям

$$u(x,t) = q(t)e^{-m\omega_0^2 x} + \int_1^\infty p(\omega,t)\times \left[\cos(\sqrt{\omega^2-1}x) - \frac{m\omega^2}{\sqrt{\omega^2-1}}\sin(\sqrt{\omega^2-1}x)\right]d\omega. \quad (16)$$

Найденные собственные функции (14) и (15) ортогональны с весом $1 + m\delta(x)$. Пользуясь этим свойством, можно получить уравнения на $q(t)$ и $p(\omega, t)$. Действительно, умножая (9) на $[1 + m\delta(x)]e^{-m\omega_0^2 x}$ и интегрируя по x от 0 до ∞, получим (с учетом краевых условий)

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = -\frac{2m\omega_0^2 e^{-m\omega_0^2 x_0}}{1+2m^2\omega_0^2}\delta(t). \quad (17)$$

Решение этого уравнения при $q(x_0) = \dot{q}(x_0) = 0$ имеет вид

$$q(t) = -\frac{2m\omega_0 e^{-m\omega_0^2 x_0}}{1+2m^2\omega_0^2}\sin\omega_0(t-x_0)H(t-x_0), \quad (18)$$

где $H(t)$ – функция Хэвисайда. Аналогично выводится уравнение на p:

$$\ddot{p} + \omega^2 p = -\frac{2\omega}{\pi}\frac{1}{m^2\omega^4+\omega^2-1}\times [\sqrt{\omega^2-1}\cos(\sqrt{\omega^2-1}x_0) - m\omega^2\sin(\sqrt{\omega^2-1}x_0)]\delta(t). \quad (19)$$

Его решение имеет вид:

$$p(\omega,t) = \frac{-2/\pi}{m^2\omega^4+\omega^2-1}\times [\sqrt{\omega^2-1}\cos(\sqrt{\omega^2-1}x_0) - m\omega^2\sin(\sqrt{\omega^2-1}x_0)]\sin\omega(t-x_0)H(t-x_0). \quad (20)$$

Выражения (16), (18), (20) полностью определяют эволюцию волны. При $t \longrightarrow \infty$ интеграл в (16) стремится к нулю и волна будет определяться только первым слагаемым

$$u(x,t) = -\frac{2m\omega_0}{1+2m^2\omega_0^2}e^{-m\omega_0^2(x+x_0)}\times \sin\omega_0(t-x_0)H(t-x_0). \quad (21)$$

Отсюда видно, что локализованная волна совершает гармонические колебания с ловушечной частотой (13), определяемой лишь массой включения. Исследуем теперь, как изменится эффект локализации при наличии нелинейности.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Будем искать решение системы (7), (8) в виде степенного ряда по ε

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t) + \ldots. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (7), (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\begin{cases} u_{0xx} - u_{0tt} - u_0 = \delta(x-x_0)\delta(t) \\ u_{0x}\big|_{x=0} = mu_{0tt}\big|_{x=0}, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} u_{1xx} - u_{1tt} - u_1 = u_0^3 \\ u_{1x}\big|_{x=0} = mu_{1tt}\big|_{x=0}, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2tt} - u_2 = 3u_0^2 u_1 \\ u_{2x}\big|_{x=0} = mu_{2tt}\big|_{x=0} \end{cases} \quad (25)$$

.....

Каждое из этих линейных уравнений можно решить указанным выше способом, а именно, разложением по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. При этом, начиная уже с u_1, будут возникать вековые слагаемые. Проанализируем их природу подробнее.

Нетрудно видеть, что источником вековых слагаемых являются правые части уравнений (24), (25) и т.д., происхождение которых связано с кубической нелинейностью. Решение (16), (18), (20) уравнения (23) было найдено в предыдущем параграфе. Оно состоит из незатухающей и затухающей составляющей волн:

$$u_0(x,t) = \tilde{u}_0(x,t) + \hat{u}_0(x,t), \quad (26)$$

где $\tilde{u}_0$ – незатухающее, "ловушечное" слагаемое (21), описывающее локализованную волну, $\hat{u}_0$ – затухающее слагаемое, описывающее бегущие волны. Поэтому слагаемое u_0^3, стоящее в правой части (24), может быть представлено в виде

$$u_0^3 = \tilde{u}_0^3 + 3\tilde{u}_0^2\hat{u}_0 + 3\tilde{u}_0\hat{u}_0^2 + \hat{u}_0^3. \quad (27)$$

Слагаемое $\tilde{u}_0^3 = A_0^3(x)\sin^3\omega_0 t$ приводит к возникновению вековых слагаемых, поскольку $\sin^3\omega_0 t = (3/4)\sin\omega_0 t - (1/4)\sin 3\omega_0 t$. Слагаемое с $\sin\omega_0 t$ приводит к резонансу и дает частное решение вида

$\tilde{u}_1 \sim t\cos\omega_0 t$. Устранить эту расходимость можно, например, методом перенормировки [17].

Слагаемое $3\tilde{u}_0^2\,\hat{u}_0$ не приводит к расходимости, так как $\tilde{u}_0^2 \sim \cos 2\omega_0 t$.

Слагаемое $3\tilde{u}_0\,\hat{u}_0^2$ может привести к логарифмической расходимости в решении. Устранить его также можно методом перенормировки [17] (при этом фаза волны будет логарифмически расти со временем). В дальнейшем этот эффект не будет учитываться, поскольку он гораздо слабее эффекта, вызывающего перенормировку частоты (в этом случае фаза волны растет со временем линейно).

Последнее слагаемое к расходимости не приводит и поэтому может не учитываться, так же как и $3\tilde{u}_0^2\,\hat{u}_0$. Перейдем теперь к следующему порядку теории возмущений. Уравнение, определяющее u_1, имеет вид

$$u_{1xx} - u_{1tt} - u_1 = -\frac{1}{4}A_0^3(x)\sin 3\omega_0 t. \qquad (28)$$

Здесь для простоты опущены все слагаемые, которые не приводят к расходимостям или могут быть уничтожены перенормировкой частоты (или изменением фазы). Решение для u_1 также состоит из двух частей – локализованной $\tilde{u}_1$ и бегущей $\hat{u}_1$. Найти его вновь можно разложением по собственным функциям (14), (15). Свойство их ортогональности с весом $1 + m\delta(x)$ позволяет разделить уравнения на $\tilde{u}_1$ и $\hat{u}_1$. Решение $\tilde{u}_1$ определяет поправку к локализованной и перенормированной волне $\tilde{u}_0$, а $\hat{u}_1$ определяет бегущие волны, в числе которых есть волны тройной частоты

$$\hat{u}_1 \sim \sin(3\omega_0 t - \sqrt{(3\omega_0)^2 - 1}\,x). \qquad (29)$$

Это слагаемое приводит к новой расходимости во втором порядке по ε, так как $u_0^2 \sim -\cos 2\omega_0 t$. Слагаемое $u_0^2 u_1$ содержит $-\sin(\omega_0 t - \sqrt{(3\omega_0)^2 - 1}\,x)$, а оно, в свою очередь, приводит к вековым слагаемым $\tilde{u}_2 \sim -t\sin\omega_0 t$. Эту расходимость уже нельзя устранить перенормировкой частоты, так как она имеет другую фазу. Устранить ее можно только методом многих масштабов [16] или методом Крылова–Боголюбова–Митропольского, которые учитывают изменение амплитуды локализованной волны во времени. Локализованная волна за счет нелинейности возбуждает бегущие волны тройной частоты (только при выполнении условия $\omega_0 > 1/3$) и амплитуды порядка ε. Следовательно, скорость отвода энергии E от локализованной волны $\sim\varepsilon^2$ (т.е. $E \sim \varepsilon^2 t$) и амплитуда локализованной волны должна уменьшаться с характерным временем $t_0 \sim \varepsilon^{-1/2}$. Если же $1/5 < \omega_0 \le 1/3$, то возбуждаться будут бегущие волны только пятикратной частоты и амплитуды ε^2. Отвод энергии пойдет по закону $\varepsilon^3 t$, поэтому максимальное время жизни локализованной волны будет порядка $\varepsilon^{-1/3}$ (вековые слагаемые будут в уравнении для $\tilde{u}_3$). В общем случае, если

$$\frac{1}{2n+1} < \omega_0 \le \frac{1}{2n-1}, \qquad (30)$$

то максимальное время жизни оценивается как

$$t_0 \sim \varepsilon^{-1/(n+1)}. \qquad (31)$$

С другой стороны, при увеличении m время жизни локализованной моды должно уменьшаться, так как $t_0 \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$. Следовательно, зависимость t_0 от m при больших m становится немонотонной и содержит тонкие и острые пики, отвечающие резонансам $\omega_0 \sim 1/(2n+1)$. После этих предварительных замечаний перейдем к количественному описанию исследуемых процессов.

ПЕРЕНОРМИРОВКА ЧАСТОТЫ ЛОВУШЕЧНОЙ МОДЫ

Будем исследовать расходимость каждого вида отдельно, по очереди. Вначале изучим наиболее сильную расходимость – расходимость в самой локализованной волне. Итак, незатухающая ловушечная мода (21) сразу же приводит к расходимости решения (22) типа $t\sin\omega_0 t$, так как $(u_1/u_0)|_{t\to\infty} \longrightarrow \infty$. В выражении для u_2 возникают уже слагаемые типа $t^2\sin\omega_0 t$ и т.д. Таким образом, просто искать решение исходной нелинейной системы в виде разложения (22) недостаточно, так как частота ловушечной моды становится зависящей от амплитуды локализованной волны. Поэтому, следуя общей теории перенормировки [16], необходимо ввести новое "перенормированное" время s:

$$t = s(1 - \varepsilon\kappa_1 - \varepsilon^2\kappa_2 - \ldots) \qquad (32)$$

и подставить его в общее решение. А затем выбрать κ_1, κ_2 и т.д. таким образом, чтобы обратить в нуль все вековые слагаемые. Если это удается сделать, то мы получаем сходящееся перенормированное решение (если нет, то необходимо использовать другой, более сильный способ обеспечения сходимости, например, метод многих масштабов или метод Крылова–Боголюбова–Митропольского [16]). Выполним эту процедуру. Из (23) находим

$$u_0(x, t) = -A_0 e^{-m\omega_0^2 x}\sin\omega_0 t, \qquad (33)$$

$$A_0 = \frac{2m\omega_0}{1+2m^2\omega_0^2}e^{-m\omega_0^2 x_0}. \quad (34)$$

Здесь для простоты опущена функция Хевисайда $H(t-x_0)$ и затухающая составляющая (поскольку она не приводит к вековым слагаемым исследуемого типа). Подставляя (33) в (24), получим

$$u_{1xx} - u_{1tt} - u_1 = \\ = -\frac{3A_0^3}{4}e^{-3m\omega_0^2 x}\left(\sin\omega_0 t - \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t\right). \quad (35)$$

Будем искать решение этого уравнения с соответствующими граничными и начальными условиями в виде

$$u_1(x,t) = q_1(t)e^{-m\omega_0^2 x} + \int_1^\infty p_1(\omega,t)\times \\ \times\left[\cos(\sqrt{\omega^2-1}x) - \frac{m\omega^2}{\sqrt{\omega^2-1}}\sin(\sqrt{\omega^2-1}x)\right]d\omega. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (35), умножая его затем на $(1 + m\delta(x))e^{-m\omega_0^2 x}$ и интегрируя по x от 0 до ∞, после преобразований получим

$$\ddot{q}_1(t) + \omega_0^2 q_1(t) = -B\left(\sin\omega_0 t - \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t\right), \quad (37)$$

$$B = \frac{3A_0^3}{2}\frac{4m^2\omega_0^2+1}{2m^2\omega_0^2+1}. \quad (38)$$

Решение уравнения (37) с соответствующими начальными условиями имеет вид

$$q_1(t) = \frac{B}{2\omega}\left[t\cos\omega_0 t - \\ - \frac{1}{6\omega_0}\sin\omega_0 t(5+\cos 2\omega_0 t)\right]H(t-x_0). \quad (39)$$

Подставляя (32), (33) и (39) в (22) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε вместе, получим

$$u = -A_0 e^{m\omega_0^2 x}\left\{\sin\omega_0 s + \varepsilon\left[\left(\frac{B}{2A_0\omega_0} - \kappa_1\omega_0\right)s\cos\omega_0 s - \\ - \frac{B}{12\omega_0^2 A_0}\sin\omega_0 s(5+\cos 2\omega_0 s)\right]\right\} + O(\varepsilon^2). \quad (40)$$

Из (40) видно, что для того чтобы обратить вековое слагаемое $s\cos\omega_0 s$ в нуль, необходимо положить

$$\kappa_1 = \frac{B}{2A_0\omega_0^2} = \frac{3m^2(4m^2\omega_0^2+1)}{(2m^2\omega_0^2+1)^3}e^{-2m\omega_0^2 x_0}. \quad (41)$$

Возвращаясь обратно от переменной s к переменной t, нетрудно получить выражение для u в нулевом порядке по ε. При этом, фактически, перенормированной оказывается частота ловушечных колебаний. Продолжая расчеты в следующих порядках аналогичным образом, можно описать эволюцию локализованной волны с любой точностью. Приведем окончательное выражение для u в первом порядке:

$$u(x,t) = -\frac{2m\omega_0}{2m^2\omega_0^2+1}e^{-m\omega_0^2(x+x_0)}\sin\omega_* t\times \\ \times\left[1 - \varepsilon\frac{m^2(2m^2\omega_0^2+1/2)}{(2m^2\omega_0^2+1)^3}e^{-2m\omega_0^2 x_0}\times \right. \\ \left. \times(5+\cos 2\omega_* t) + O(\varepsilon^2)\right], \quad (42)$$

$$\omega_* = \omega_0\left[1 + \varepsilon\frac{3m^2(4m^2\omega_0^2+1)}{(2m^2\omega_0^2+1)^3}e^{-2m\omega_0^2 x_0} + \right. \\ + \varepsilon^2\frac{3}{16}\frac{m^4\omega_0^2}{(2m^2\omega_0^2+1)^6}(14m^2\omega_0^2+1)\times \\ \left. \times(2m^2\omega_0^2+1/2)e^{-4m\omega_0^2 x_0} + O(\varepsilon^3)\right]. \quad (43)$$

Таким образом, частота ловушечных колебаний становится зависящей от параметра ε, т.е. от амплитуды волны (так как в данном случае $\varepsilon = \nu P^2/k\rho T$). Перенормированная ловушечная частота ω_* увеличивается с ростом ε по найденному закону (43). В пренебрежении затухающими волнами амплитуда локализованной волны описывается выражением (42).

ЗАТУХАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ: МЕТОД МНОГИХ МАСШТАБОВ

Перейдем теперь к описанию другого ключевого явления – затухания амплитуды локализованной волны. Как уже отмечалось, природа этого явления состоит в следующем. Если частота локализованной волны удовлетворяет условию $\omega_0 > 1/3$ или, как следует из (13), $0 < m < 6\sqrt{2}$, то локализованная волна возбуждает бегущие вол-

ны тройной частоты и амплитуды ε. Эти волны отводят энергию от локализованной волны, что и приводит к ее затуханию с характерным временем $t \sim \varepsilon^{-2}$ (поскольку скорость отвода энергии $\sim\varepsilon^2$). Опишем данный эффект количественно. Для этого воспользуемся методом многих масштабов [17]. Введем новые масштабы времени T_n

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \ldots \tag{44}$$

тогда $(d^2)/(dt^2) = D_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(2D_0D_2 + D_1^2) + \ldots$, где $D_n \equiv d/dT_n$. Будем искать решение исходного уравнения (7) в следующем виде

$$\begin{aligned} u = {} & u_0(T_0, T_1, T_2, \ldots) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \ldots) + \\ & + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2, \ldots) + \ldots. \end{aligned} \tag{45}$$

Подставив (44) и (45) в (7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\begin{cases} u_{0xx} - u_{0T_0T_0} - u_0 = \delta(x - x_0)\delta(t) \\ u_{0x}\big|_{x=0} = m u_{0T_0T_0}\big|_{x=0} \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases} u_{1xx} - u_{1T_0T_0} - u_1 = u_0^3 + 2u_{0T_0T_1} \\ u_{1x}\big|_{x=0} = m u_{1T_0T_0}\big|_{x=0} \end{cases} \tag{47}$$

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2T_0T_0} - u_2 = 3u_0^2 u_1 + \\ + 2u_{0T_0T_2} + u_{0T_1T_1} + 2u_{1T_0T_1} \\ u_{2x}\big|_{x=0} = m u_{2T_0T_0}\big|_{x=0} \end{cases} \tag{48}$$

.....

Ограничимся уничтожением вековых слагаемых лишь во втором порядке, а остальные порядки рассматривать не будем. Кроме того, будем пренебрегать изменением фазы локализованной волны под действием бегущих волн, поскольку это более слабый эффект (~ε) по сравнению с уже учтенной перенормировкой частоты. В этом упрощенном случае решение, описывающее локализованную волну в нулевом порядке, можно записать в виде

$$u_0 = A(T_2)e^{-m\omega_0^2 x}\sin\omega_0 T_0. \tag{49}$$

Подстановка его в (47) дает уравнение для бегущих волн с тройной частотой

$$u_{1xx} - u_{1T_0T_0} - u_1 = -\frac{A^3}{4}e^{-3m\omega_0^2 x}\sin 3\omega_0 T_0. \tag{50}$$

Здесь для простоты опущено уже изученное слагаемое с $\sin\omega_0 T_0$. С помощью описанной выше методики можно получить выражение для незатухающих бегущих волн (остальными слагаемыми для простоты пренебрегается)

$$u_1 = CA^3\sin(3\omega_0 T_0 - \sqrt{(3\omega_0)^2 - 1}\,x), \tag{51}$$

где коэффициент пропорциональности C равен

$$C = \frac{1}{48}\frac{1}{(3m\omega_0^2)^2 + (3\omega_0)^2 - 1}. \tag{52}$$

Очевидно, что требование $\omega_0 > 1/3$ связано с возможностью возбудить волны длиной $2\pi/\sqrt{(3\omega_0)^2 - 1}$. Подстановка (49), (51) в (48) дает

$$\begin{aligned} & u_{2xx} - u_{2T_0T_0} - u_2 = 2\omega_0 e^{-m\omega_0^2 x}\cos\omega_0 T_0 \times \\ & \times\left[A'(T_2) + \frac{3C}{8\omega_0}A^5(T_2)e^{-m\omega_0^2 x}\sin(\sqrt{(3\omega_0)^2 - 1}\,x)\right]. \end{aligned} \tag{53}$$

Все остальные слагаемые, не участвующие в расходимости, опущены. Решение этого уравнения содержит локализованную волну, ее расходящаяся часть имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 \sim {} & -\mathrm{const}\, T_0 \sin 3\omega_0 T_0 e^{-m\omega_0^2 x} \times \\ & \times\left[A'(T_2) + \frac{1}{4t_*}A^5(T_2)\right], \end{aligned} \tag{54}$$

где

$$t_* = \frac{3}{4C}\sqrt{\frac{(3m\omega_0^2)^2 + (3\omega_0)^2 - 1}{(3\omega_0)^2 - 1}}\frac{m^2\omega_0^2 + 1/2}{m\omega_0}. \tag{55}$$

Обращение в нуль векового слагаемого приводит к уравнению затухания амплитуды локализованной волны

$$A'(T_2) + A^5(T_2)/(4t_*) = 0. \tag{56}$$

Его решение при $A(0) = A_0$ имеет вид $A(T_2) = A_0/\sqrt[4]{A_0^4 T_2/t_* + 1}$. Переходя обратно к переменной t, получим

$$A(t) = \frac{A_0}{\sqrt[4]{1 + t/t_0}}, \tag{57}$$

$$\begin{aligned} t_0 = {} & \left(\frac{4}{\varepsilon A_0}\right)^2 \frac{[(3m\omega_0^2)^2 + (3\omega_0)^2 - 1]^{3/2}}{\sqrt{(3\omega_0)^2 - 1}} \times \\ & \times \frac{m^2\omega_0^2 + 1/2}{2m\omega_0}. \end{aligned} \tag{58}$$

Очевидно, t_0 играет роль характерного времени жизни локализованной моды. Зависимость $\varepsilon^2 t_0$ от безразмерной массы включения при $x_0 = 0.75$ приведена на рис. 2. Максимум этой кривой достига-

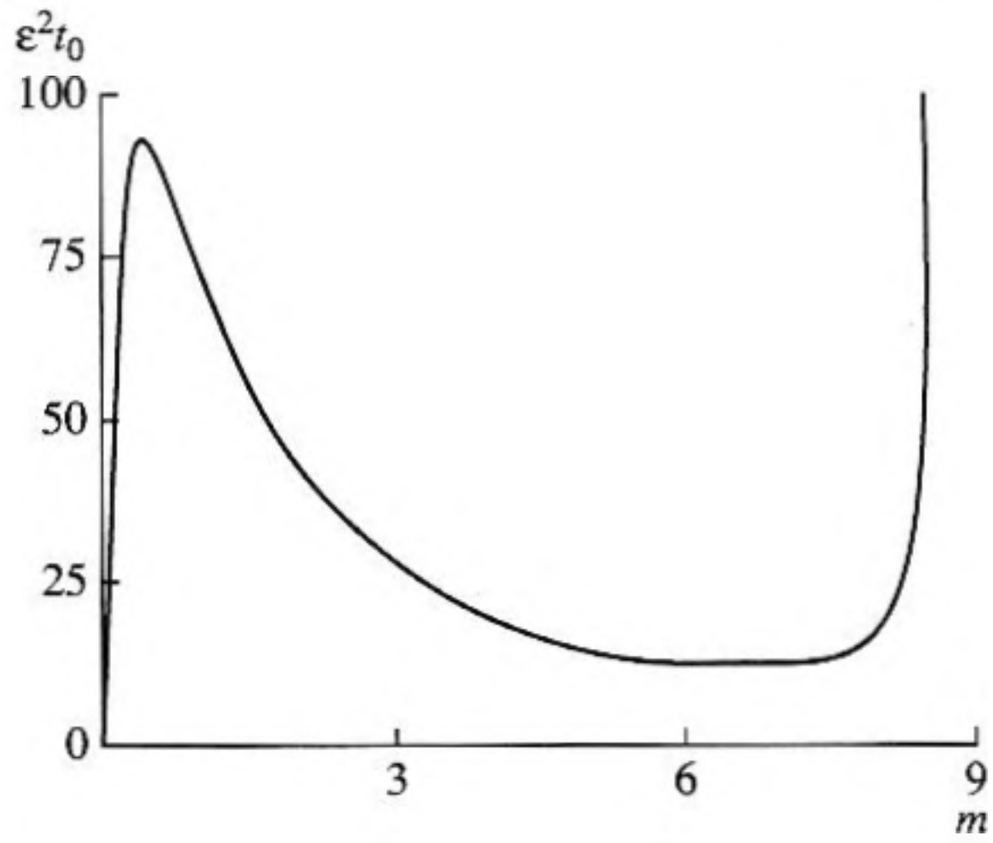

Рис. 2. Зависимость времени затухания от безразмерной массы включения m при $x_0 = 0.75$.

ется при $m = 0.47$ и равен 93, минимум – при $m = 6.8$ и равен 12.8. При $\omega_0 \longrightarrow 0$ время жизни стремится к нулю и эффект локализации пропадает. При $\omega_0 \longrightarrow 1/3$ время жизни t_0 стремится к бесконечности. Это означает, что при $\omega_0 \longrightarrow 1/3$ необходимо уже учитывать отвод энергии бегущими волнами следующего порядка – амплитуды ε^2 и пятикратной частоты $5\omega_0$. В результате при $m \longrightarrow \infty$ время жизни будет меняться немонотонным образом и содержать ряд резких пиков (чем больше номер возбуждаемой моды, тем выше и тоньше пик). В области $m < 8.4$ можно пользоваться зависимостью (58).

Собрав все перечисленные эффекты вместе, запишем окончательное выражение для локализованной волны в главном порядке асимптотического разложения по ε

$$u(x,t) = \\ = -u_0(t)e^{-m\omega_0^2 x}\sin[\omega_*(t-x_0)]H(t-x_0) + O(\varepsilon), \tag{59}$$

$$u_0(t) = \frac{m\omega_0}{m^2\omega_0^2 + 1/2}\frac{e^{-m\omega_0^2 x_0}}{\sqrt[4]{1+t/t_0}}, \tag{60}$$

$$\omega_* = \omega_0\left[1 + \frac{3\varepsilon}{4\omega_0^2}\frac{4m^2\omega_0^2+1}{2m^2\omega_0^2+1}u_0^2 + O(\varepsilon^2)\right]. \tag{61}$$

Время жизни этой моды довольно велико: в частности, при $\varepsilon = 0.02$ характерное значение времени жизни $t_0 \sim 10^5\sqrt{k/\rho}$. Например, при $\rho \approx 1$ кг/м, $k \approx 10^8$ кг м/с^2 имеем $t_0 \approx 10$ с. Масса включения для эффекта локализации должна быть достаточно маленькой. В частности, при $T \sim 10^4$ кг м/с^2 значение $m = 5$ соответствует 0.05 кг.

ВЫВОДЫ

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы. Кубическая нелинейность упругого основания не уничтожает явления локализации и не искажает формы локализованных волн, а приводит к двум характерным явлениям. Во-первых, частота колебаний локализованной волны становится зависящей от амплитуды волны (формула (61)). Во-вторых, в системе могут возникнуть бегущие волны кратной частоты ($3\omega_0$, $5\omega_0$, $7\omega_0$, ...), которые отводят энергию от локализованной волны и приводят к ее затуханию. Характер затухания определяется положением минимальной частоты бегущих волн относительно частоты отсечки. В частности, в безразмерных переменных, в которых частота отсечки равна единице, бегущая волна с тройной частотой возбуждается при выполнении условия $\omega_0 > 1/3$ или $m > 6\sqrt{2}$. В этом случае локализованная волна затухает как $t^{-1/4}$. Если $1/5 < \omega_0 < 1/3$, то $u_0 \sim t^{-1/6}$, если $1/7 < \omega_0 < 1/5$, то $u_0 \sim t^{-1/8}$ и т.д. Зависимость времени жизни локализованной волны от массы динамического включения содержит ряд максимумов. В частности, первый максимум соответствует минимальной амплитуде бегущей волны с тройной частотой (рис. 2).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 02-01-00879.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф.* // Изв. АН СССР. Сер. МТТ. 1990. Т. 3. С. 74.
2. *Бобровницкий Ю.И., Коротков М.П.* // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 5. С. 872–878.
3. *Stupakov G.V., Kurennoy S.S.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 795.
4. *Abramian A.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 100. P. 2723.
5. *Andreev V.L.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 100. P. 2686.
6. *Abramian A.K., Indeitsev D.A.* // Acoust. Phys. 1998. V. 44. P. 371.
7. *Indeitchev D.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. P. 1196.
8. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1991.
9. *Evans D.V., Linton C.M., Ursell F.* // Quart.J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46. P. 253.
10. *Kaplunov J.D., Sorokin S.V.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 97. P. 3898.
11. *Индейцев Д.А., Осипова Е.В.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. С. 124.
12. *Evans D.V., Kuznetsov N.* // Gravity Waves in Water of Finite Depth. Southampton: Comp. Mech. Publ., 1997. P. 343.

13. *Indeytsev D.A., Osipova E.V.* // Proc. of 14-th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies. 1999. Port Huron, Michigan USA. P. 41.
14. *Индейцев Д.А., Осипова Е.В.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. С. 1.
15. *Бабешко В.А., Глушков Б.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
16. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Localization of Nonlinear Waves in Elastic Bodies with Inclusions

D. A. Indeitsev and E. V. Osipova

By the example of the problem of motion of a semi-infinite string lying on an elastic base, a method for describing wave localization near inclusions is proposed for the case of a cubic nonlinearity of the base. The method applies the perturbation technique to the amplitude of a localized mode. The nature of the divergences is revealed, and the secular terms are found to belong to one of the two types: inphase or antiphase with the localized wave. It is shown that a combination of the renormalization method and multiscale method provides the convergence of the solutions, which are sought for in the form of power series in the amplitude of the localized mode. It is found that the localization process is determined by the type of the discrete spectrum, type of the nonlinearity, and type of dispersion. The nonlinearity of the elastic base produces two characteristic effects. First, the frequency of the localized wave becomes dependent on the wave amplitude. Second, the system can generate traveling waves at multiple frequencies, which withdraw energy from the localized wave and cause it to decay. The decay behavior is determined by the minimum frequency of these traveling waves (because it must be higher than the cutoff frequency). The lifetime of the localized wave as a function of the mass of a dynamic inclusion exhibits a number of maxima. In particular, the first maximum corresponds to the minimum amplitude of the traveling wave at the triple frequency.