АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 3, с. 325–331

УДК 531.121.1

МОЖНО ЛИ ОПРЕДЕЛИТЬ ВИД ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ ПО ЕЕ ЗВУЧАНИЮ?

© 2003 г. А. М. Ахтямов

Башкирский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений
450074 Уфа, ул. Фрунзе 32

E-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

Поступила в редакцию 24.01.2002 г.

Рассматривается задача отыскания вида закрепления круговой пластины, недоступного для непосредственного наблюдения, по собственным частотам ее симметричных изгибных колебаний. Доказывается теорема единственности решения этой обратной задачи, и указывается метод восстановления неизвестных краевых условий. Получена приближенная формула определения неизвестных краевых условий по трем собственным частотам. Допускается, что собственные частоты могут быть заданы приближенно с некоторой степенью точности. Метод приближенного вычисления неизвестных краевых условий объясняется на четырех примерах различных случаев закрепления пластины (свободное опирание, упругая заделка, плавающая заделка, свободный край).

ВВЕДЕНИЕ

Круговые пластины являются деталями различных аппаратов. Если пластина недоступна для визуального осмотра, то единственным источником обнаружения неисправности ее закрепления становятся собственные частоты изгибных колебаний. Возникает вопрос: можно ли по собственным частотам изгибных симметрических колебаний круговой пластины однозначно определить вид ее закрепления? В настоящей статье дается и обосновывается положительный ответ на этот вопрос.

Близкие постановки задач предлагались в работах [1–9]. Их условно можно подразделить на три группы.

Первую группу этих работ составляют задачи акустической диагностики. Так, в работе [1] ставился вопрос: можно ли по звучанию барабана установить его форму? В [2, 3] решались задачи акустической диагностики механизмов. В [4] по сдвигам собственных частот определялись размеры объекта и его положение в камере. Статья [5] была посвящена способу обнаружения шпал, потерявших плотный контакт с балластом насыпи, при помощи ударного возбуждения колебаний и анализа акустических сигналов. В отличие от всех этих работ и других, им подобных, в настоящей работе отыскиваются не форма области, размеры объекта или же его местоположение, а условия закрепления пластины.

Вторая группа работ посвящена проблемам шумоподавления в двигателях автомобилей и авиалайнеров. Однако в статьях, посвященных этой тематике, ищутся конструктивные изменения, которые бы позволили удовлетворить необходимым требованиям к шуму, давлению или другим характеристикам (см, например, [6]). Ставятся в этих работах и обратные краевые задачи. Так, в работах [7, 8] исследовались условия на входе и выходе выхлопных труб и трубопроводвых систем. В отличие от этих исследований, в настоящей работе изучаются не условия на входе и выходе трубопроводвых систем, а краевые условия для задачи о колебаниях пластины.

В третьей группе работ изучаются так называемые обратные спектральные задачи. В этих работах (см., например, [9] и библиографию к этой книге) требуется восстановить коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий. Однако в этих работах в качестве данных восстановления краевых условий используется не один спектр (как в предлагаемой работе), а несколько спектров или же другие дополнительные спектральные данные (например, спектральная функция, функция Вейля, так называемые весовые числа). К тому же основной целью этих работ является восстановление коэффициентов в уравнении, а не в краевых условиях. Цель же настоящей статьи состоит в восстановлении краевых условий спектральной задачи с известными коэффициентами в уравнении по одному спектру.

Таким образом, настоящая статья отличается от работ этих трех групп как по постановке, так и по методам решения.

Статьи автора [10, 11] были посвящены восстановлению краевых условий спектральных задач, а в совместной с И.Ш. Ахатовым статье [12] по собственным частотам отыскивалось закреп-

ление на одном из концов стержня. Настоящая работа продолжает исследования в направлении, предложенном в этих работах.

Перед изложением соответствующих методов приведем математическую постановку задачи.

ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Задача о симметричных колебаниях тонкой круговой пластины сводится [13] к следующей спектральной задаче:

$$\frac{d^4y}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3y}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2y}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dy}{dr}-\lambda^4 y = 0, \qquad (1)$$

$$U_1(y) = 0, \quad U_2(y) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $U_i(y) = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}(L_j y)_{r=a}$ $(i = 1, 2)$ – линейные формы, характеризующие закрепление пластины, причем

$$L_1 y(r) = y(r),$$

$$L_2 y(r) = \frac{dy(r)}{dr},$$

$$L_3 y(r) = \frac{d^2y(r)}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dy(r)}{dr},$$

$$L_4 y(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2y(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right);$$

$\lambda = (\rho h\omega^2/D)^{1/4}$, a – радиус пластины, ω – частотный параметр, D – цилиндрическая жесткость пластины, ν – отношение Пуассона, h – толщина, ρ – плотность.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $U_1(y)$ и $U_2(y)$, через A, а ее миноры – через M_{ij}:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{Vmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}.$$

Отыскание форм $U_1(y)$, $U_2(y)$ равносильно нахождению линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle$, построенной на векторах $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^T$ $(i = 1, 2)$.

В работах [14–16] приводятся различные случаи закрепления круговой пластины. Ниже они перечисляются, выписаны также их соответствующие матрицы A:

1. Заделка: $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

2. Свободное опирание: $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

3. Свободный край: $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

4. Плавающая заделка: $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

5. Пять различных видов упругого закрепления:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что во всех девяти случаях

$$M_{14} = 0, \quad M_{23} = 0. \qquad (3)$$

Поэтому в терминах спектральной задачи (1)–(2) поставленная выше обратная задача формулируется следующим образом: коэффициенты a_{ij} форм $U_1(y)$ и $U_2(y)$ задачи (1)–(2) – неизвестны; ранг матрицы A, составленной из этих коэффициентов, равен двум, миноры M_{14} и M_{23} этой матрицы равны нулю; известны отличные от нуля собственные значения λ_k задачи (1). Требуется восстановить линейную оболочку $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle$ векторов $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^T$ $(i = 1, 2)$.

Заметим, что речь идет о единственности восстановлении именно линейной оболочки, а не всех коэффициентов a_{ij}, поскольку, например, краевые условия

$$y(r) = 0, \quad \frac{dy(r)}{dr} = 0,$$

и

$$y(r)-\frac{dy(r)}{dr} = 0, \quad y(r)+\frac{dy(r)}{dr} = 0$$

эквивалентны, а их соответствующие коэффициенты a_{ij} различны.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Наряду с задачей (1)–(2) рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\frac{d^4y}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3y}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2y}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dy}{dr}-\lambda^4 y = 0, \qquad (4)$$

$$\tilde{U}_1(y) = 0, \quad \tilde{U}_2(y) = 0. \qquad (5)$$

Здесь $\tilde{U}_i(y) = \sum_{j=1}^{4} b_{ij}(L_j y(r))_{r=a}$ $(i = 1, 2)$ – линейные формы, характеризующие закрепление пластины.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов b_{ij} форм $\tilde{U}_1(y)$ и $\tilde{U}_2(y)$, через B, а ее миноры – через $\tilde{M}_{ij}$:

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{Vmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} b_{1i} & b_{1j} \\ b_{2i} & b_{2j} \end{vmatrix}.$$

Через $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ обозначим линейную оболочку векторов $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4})^T$ $(i = 1, 2)$.

Теорема о единственности решения обратной задачи. Пусть выполнены следующие условия:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 2, \tag{6}$$

$$M_{14} = \tilde{M}_{14} = M_{23} = \tilde{M}_{23} = 0. \tag{7}$$

Если отличные от нуля собственные значения $\{\lambda_k\}$ задачи (1)–(2) и отличные от нуля собственные значения $\{\tilde{\lambda}_k\}$ задачи (4)–(5) совпадают с учетом их кратностей, то совпадают и линейные оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ и $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$.

Доказательство. Общим решением задачи о колебаниях круговой пластины является (см. [14]) функция

$$y(r) = y(r, \lambda) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 I_0(\lambda r),$$

где использованы стандартные обозначения для цилиндрических функций.

Для определения констант C_1, C_2 используют краевые условия $U_i(y) = 0$, $i = 1, 2$. Уравнение частот получают из условия существования ненулевого решения для C_i. Ненулевое решение для C_i существует тогда и только тогда, когда [17] равен нулю определитель

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} U_1(J_0) & U_1(I_0) \\ U_2(J_0) & U_2(I_0) \end{vmatrix}$$

соответствующей системы.

Применяя теорему Лапласа для вычисления определителей, получаем

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) \equiv\ & M_{12}[(L_1J_0)(L_2I_0) - (L_2J_0)(L_1I_0)] + \\ & + M_{13}[(L_1J_0)(L_3I_0) - (L_3J_0)(L_1I_0)] + \\ & + M_{14}[(L_1J_0)(L_4I_0) - (L_4J_0)(L_1I_0)] + \\ & + M_{23}[(L_2J_0)(L_3I_0) - (L_3J_0)(L_2I_0)] + \\ & + M_{24}[(L_2J_0)(L_4I_0) - (L_4J_0)(L_2I_0)] + \\ & + M_{34}[(L_3J_0)(L_4I_0) - (L_4J_0)(L_3I_0)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Используя (7), получаем

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) \equiv\ & M_{12}[(L_1J_0)(L_2I_0) - (L_2J_0)(L_1I_0)] + \\ & + M_{13}[(L_1J_0)(L_3I_0) - (L_3J_0)(L_1I_0)] + \\ & + M_{24}[(L_2J_0)(L_4I_0) - (L_4J_0)(L_2I_0)] + \\ & + M_{34}[(L_3J_0)(L_4I_0) - (L_4J_0)(L_3I_0)]. \end{aligned} \tag{9}$$

Из свойств цилиндрических функций J_0 и I_0 следует, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой функцией первого порядка. Так как $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, то из факторизационной теоремы Адамара (см. [18]) следует, что определитель $\Delta(\lambda)$ системы уравнений

$$U_1(y) = 0, \quad U_2(y) = 0$$

для определения констант C_i и определитель $\tilde{\Delta}(\lambda)$ системы уравнений

$$\tilde{U}_1(y) = 0, \quad \tilde{U}_2(y) = 0$$

для определения констант $\tilde{C}_i$ связаны соотношением

$$\Delta(\lambda) \equiv C\lambda^k e^{a\lambda} \tilde{\Delta}(\lambda), \tag{10}$$

где a – некоторое действительное число, k – некоторое целое неотрицательное число, а C – некоторая отличная от нуля константа.

Поскольку $y(r, -\lambda) = y(r, \lambda)$, то $\Delta(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}(\lambda)$ являются четными функциями λ. Отсюда и из (10) получаем, что $a = 0$ и $k = 2m$. Откуда

$$\begin{aligned} & (M_{12} - C\lambda^{2m}\tilde{M}_{12}) f_1(\lambda) + \\ & + (M_{13} - C\lambda^{2m}\tilde{M}_{13}) f_2(\lambda) + \\ & + (M_{24} - C\lambda^{2m}\tilde{M}_{24}) f_3(\lambda) + \\ & + (M_{34} - C\lambda^{2m}\tilde{M}_{34}) f_4(\lambda) \equiv 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= (L_1J_0)(L_2I_0) - (L_2J_0)(L_1I_0), \\ f_2(\lambda) &= (L_1J_0)(L_3I_0) - (L_3J_0)(L_1I_0), \\ f_3(\lambda) &= (L_2J_0)(L_4I_0) - (L_4J_0)(L_2I_0), \\ f_4(\lambda) &= (L_3J_0)(L_4I_0) - (L_4J_0)(L_3I_0). \end{aligned}$$

Покажем, что m равняется нулю. Предположим противное. Пусть $m \neq 0$. Разложив функции $f_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ в ряд Тейлора, получим, что функции

$$f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda), f_4(\lambda),$$
$$\lambda^{2m} f_1(\lambda), \lambda^{2m} f_2(\lambda), \lambda^{2m} f_3(\lambda), \lambda^{2m} f_4(\lambda)$$

при $m \neq 0$ образуют систему линейно независимых функций. Отсюда и из (11) получим

$$M_{12} = \tilde{M}_{12} = M_{13} = \tilde{M}_{13} = M_{24} = \tilde{M}_{24} = \\ = M_{34} = \tilde{M}_{34} = 0,$$

которые в совокупности с равенствами (7) противоречат условию (6), согласно которому ранг матрицы A равен двум. Таким образом, $m = 0$.

Ввиду линейной независимости функций

$$f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda), f_4(\lambda)$$

из (11) получаем равенство

$$(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})^T = \\ = C(\tilde{M}_{12}, \tilde{M}_{13}, \tilde{M}_{14}, \tilde{M}_{23}, \tilde{M}_{24}, \tilde{M}_{34})^T, \quad (12)$$

которое равносильно пропорциональности бивекторов $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2$.

Известно (см. [19]), что между классами пропорциональных, отличных от нуля бивекторов и двумерными подпространствами векторного пространства имеется естественное биективное соответствие. В этом соответствии каждому подпространству отвечает внешнее произведение $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2$ векторов произвольного его базиса $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, а каждому бивектору $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2$ – подпространство $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$.

Поэтому из (12) следует, что $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Условия (7) не ограничивают физическую постановку задачи. Они нужны лишь для того, чтобы можно было восстанавливать краевые условия по трем собственным частотам, а не по большему их числу.

МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ПО ТРЕМ СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ

Из доказанной теоремы единственности следует, что для приближенного восстановления краевых условий достаточно использовать первые n собственных значений. Соответствующий метод описан в [12]. Он основан на возможности восстановления целой функции $\Delta(\lambda)$ по всем своим нулям с помощью функции Вейерштрасса (бесконечного произведения) и приближенного восстановления функции $\Delta(\lambda)$ по первым n своим нулям с помощью конечного произведения с достаточно большим количеством сомножителей.

Другим методом восстановления краевых условий является метод, основанный на решении системы линейных алгебраических уравнений. Он является более простым в использованиии и более точным (поскольку не происходит накопления ошибок).

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 – это первые три собственные значения спектральной задачи (1)–(2), т. е. три первые корня функции $\Delta(\lambda)$. Из тождества (9) следует, что λ_1, λ_2, λ_3 удовлетворяют уравнениям

$$\Delta(\lambda_j) = M_{12}f_1(\lambda_j) + M_{13}f_2(\lambda_j) + \\ + M_{24}f_3(\lambda_j) + M_{34}f_4(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Равенства (13) представляют собой систему трех уравнений от четырех неизвестных M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}. Эта система, как следует из теоремы единственности, имеет решение, единственное с точностью до константы. Таким образом, система (13) однозначно с точностью до константы определяет бивектор

$$(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})^T = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2,$$

по которому согласно методу, найденному в [12], находятся краевые условия.

Если первые три собственные значения λ_j задачи (1) известны лишь приближенно:

$$\lambda_j \approx \mu_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

то обратная задача нахождения краевых условий может быть решена приближенно. Для этого подставим значения μ_j ($j = 1, 2, 3$), приближенно совпадающие с первыми тремя положительными собственными значениями, в (13). Получим систему трех однородных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}:

$$M_{12}f_1(\mu_j) + M_{13}f_2(\mu_j) + M_{24}f_3(\mu_j) + \\ + M_{34}f_4(\mu_j) \approx 0. \quad (14)$$

Полученная система имеет бесчисленное множество решений. Из доказанной теоремы единственности следует, что неизвестные миноры могут быть найдены приближенно с точностью до коэффициента. Таким образом, если μ_j ($j = 1, 2, 3$) отличаются от первых трех собственных значений незначительно, то полученная система должна иметь ранг 3 и решение, определенное с точностью до константы. Вычисления, выполненные на компьютере, подтверждают это. Неизвестные миноры находятся с точностью до константы. При этом порядок погрешности вычисления практически не отличается от порядка погрешности близости значений μ_j и λ_j и лишь в некоторых случаях может ухудшаться на четыре порядка. Главное же преимущество этого метода в том, что для его применения требуется использование только первых трех собственных частот.

ПРИМЕРЫ

Рассмотрим применение метода определения краевых условий по трем собственным значениям на конкретных примерах. Во всех рассмотренных

примерах для определенности полагаем, что радиус пластины равен 1, а коэффициент Пуассона ν равен 1/3 (по Вертгейму).

Пример 1 (Свободное опирание). Если

$$\mu_1 = 2.2324491, \quad \mu_2 = 5.4551116,$$
$$\mu_3 = 8.613496$$

– значения $(\rho h \omega_i^2 / D)^{1/4}$, соответствующие первым трем собственным частотам ω_i, определенных частотомером, то решение системы (14), найденное с точностью до константы, имеет вид

$$M_{34} = 10^{-13}, \; M_{24} = -0.6198612900 \times 10^{-12},$$
$$M_{12} = -0.21866265 \times 10^{-9}, \tag{15}$$
$$M_{13} = 0.2380104.$$

Кроме того, по условию задачи $M_{14} = 0, M_{23} = 0$.

Найдем линейную оболочку, соответствующую этим минорам. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – произвольный вектор искомой линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$. Тогда координаты вектора $\mathbf{x}$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\| = 2. \tag{16}$$

Поскольку

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то условие (16) эквивалентно обращению в нуль обоих окаймляющих M_{13} миноров.

Разлагая соответствующие определители по третьей строке, получаем

$$x_1 M_{23} - x_2 M_{13} + x_3 M_{12} = 0,$$
$$x_1 M_{34} - x_3 M_{14} + x_4 M_{13} = 0.$$

Подставим в эти равенства значения M_{ij} (15). Значения M_{12}, M_{23}, M_{14} и M_{34} можно считать равными нулю (степень точности равна 10^{-8}, т.е. довольно высока). Поэтому можно считать, что $x_2 = 0$ и $x_4 = 0$, а произвольный вектор искомой линейной оболочки имеет вид $\mathbf{x} = (x_1, 0, x_3, 0)^T$.

В качестве базисных векторов этой линейной оболочки можно выбрать, например, векторы

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0)^T \text{ и } \mathbf{a}_2 = (0, 0, 1, 0)^T.$$

Следовательно, искомые граничные условия имеют вид

$$L_1 y(r) = y(r) = 0,$$
$$L_3 y(r) = \frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dy(r)}{dr} = 0.$$

Это означает, что недоступный для непосредственного наблюдения край свободно оперт.

Заметим, что закрепление края пластины определено верно. Числа μ_1, μ_2, μ_3, приведенные выше, приближенно совпадают с первыми тремя корнями уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Точность приближения равна 10^{-9}.

Пример 2 (Упругая заделка). Если

$$\mu_1 = 3.8228594, \; \mu_2 = 7.0141402157$$
$$\mu_3 = 10.172993460$$

– значения $(\rho h \omega_i^2 / D)^{1/4}$, соответствующие первым трем собственным частотам ω_i, определенным частотомером, то решение системы (14), найденное с точностью до константы, имеет вид

$$M_{13} = 0.7280190 \times 10^{-8}, \quad M_{12} = -0.1458655,$$
$$M_{24} = -0.1458655, \; M_{34} = 10^{-11}.$$

Приближенно можно считать, что бивектор $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ с точностью до константы равен

$$(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})^T =$$
$$= (-1, 0, 0, 0, 1, 0)^T.$$

Точность приближения 10^{-7}.

Найдем линейную оболочку, соответствующую этому бивектору. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – произвольный вектор искомой линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$. Тогда координаты вектора $\mathbf{x}$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\| = 2. \tag{17}$$

Поскольку

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то условие (17) эквивалентно обращению в нуль обоих окаймляющих M_{12} миноров.

Разлагая соответствующие определители по третьей строке, получаем

$$x_1 M_{23} - x_2 M_{13} + x_3 M_{12} = 0,$$
$$x_1 M_{24} - x_2 M_{14} + x_4 M_{12} = 0.$$

Значения M_{13}, M_{23} и M_{14} можно считать равными нулю (степень точности равна 10^{-7}, т.е. довольно высока). Поэтому можно считать, что $-x_3 = 0$ и $x_1 - x_4 = 0$, а произвольный вектор искомой линейной оболочки имеет вид $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0, x_1)^T$.

В качестве базисных векторов этой линейной оболочки можно выбрать, например, векторы

$$\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, 0)^T \text{ и } \mathbf{a}_2 = (1, 0, 0, 1)^T.$$

Следовательно, искомые граничные условия имеют вид

$$L_2 y(r) = \frac{dy(r)}{dr} = 0,$$

$$(L_1 + L_4)y(r) = y(r) + \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right) = 0.$$

Именно эти граничные условия (первый вид упругого закрепления $c_1 = 1$) и использовались при выборе чисел μ_1, μ_2, μ_3, которые с точностью 10^{-9} совпадают с первыми тремя корнями соответствующего характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$.

Пример 3 (Плавающая заделка). Если

$$\mu_1 = 3.831705970, \quad \mu_2 = 7.015586670,$$
$$\mu_3 = 10.17346814,$$

то с точностью до константы имеем

$$M_{13} = 0.3403043 \times 10^{-6}, \; M_{12} = -0.2587103 \times 10^{-5},$$
$$M_{24} = -0.6014163, \; M_{34} = 10^{-9}.$$

Приближенно можно считать, что бивектор $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ с точностью до константы равен

$$(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})^T =$$
$$= (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$$

при точности приближения 10^{-5}.

Следовательно, искомые граничные условия имеют вид

$$L_2 y(r) = \frac{dy(r)}{dr} = 0,$$

$$L_4 y(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right) = 0.$$

Именно по этим условиям и были выбраны числа μ_1, μ_2, μ_3, которые с точностью 10^{-9} совпадают с первыми тремя корнями соответствующего характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$.

Пример 4 (Свободный край). Если

$$\mu_1 = 3.012657950, \quad \mu_2 = 6.2059659,$$
$$\mu_3 = 9.3712136,$$

то

$$M_{24} = 10^{-9}, \; M_{34} = 0.1454148,$$
$$M_{13} = -0.6555181 \times 10^{-7},$$
$$M_{12} = -0.8146801 \times 10^{-6}.$$

Приближенно можно считать, что бивектор $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ с точностью до константы равен

$$(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})^T =$$
$$= (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$$

при точности приближения 10^{-6}.

Следовательно, искомые граничные условия имеют вид

$$L_3 y(r) = \frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dy(r)}{dr} = 0,$$

$$L_4 y(r) = L_4 y(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right) = 0.$$

Это означает, что недоступный для непосредственного наблюдения край свободен.

Заметим, что, как и в предыдущем примере, числа μ_1, μ_2, μ_3 приближенно совпадают с первыми тремя корнями характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, соответствующего свободному краю. (Точность приближения равна 10^{-7}.)

Замечание 2. Насколько существенно для приближенного восстановления краевых условий использование именно первых отличных от нуля собственных значений? Быть может, для восстановления краевых условий достаточно использовать произвольный конечный набор собственных значений (собственных частот)? Приведем пример, который показывает, что даже использование в качестве данных восстановления бесконечного набора отличных от нуля собственных значений еще не гарантирует единственности восстановления краевых условий.

Собственные значения λ_k для пластинки со свободным краем при больших k и симметричных колебаниях практически равны числам $\lambda_k = k\pi$ (см. [13]), а собственные значения задачи λ_k для пластинки, заделанной по контуру, при больших λ и симметричных колебаниях практически равны числам $\lambda_k = (k + 1)\pi$. Если пренебречь порядком следования собственных значений, то они, начиная с восьмого, практически совпадают на множестве чисел $\{k\pi\}$.

Следовательно, бесконечному набору собственных значений $\{k\pi\}$ ($k = 8, 9, 10, \ldots$) соответствуют совершенно разные граничные условия. Поэтому для единственности восстановления краевых условий существенно использование именно первых отличных от нуля собственных значений.

Таким образом, закрепление круговой пластины вполне может быть установлено по первым собственным частотам, найденным частотометром с некоторой погрешностью.

В заключение автор выражает признательность И.Ш. Ахатову, М.А. Ильгамову и С.Ф. Урманчееву за полезные обсуждения, а также РФФИ за финансовую поддержку работы (грант 01-01-0096).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кас М.* Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. № 4. P. 1–23.
2. *Павлов Б.В.* Акустическая диагностика механизмов. М.: Машиностроение, 1971. 223 с.
3. *Биргер И.А.* Техническая диагностика. М.: Машиностроение, 1978. 239 с.
4. *Quinli W.W., Fricke F.* Determination of the size of an object and its location in a cavity by eigenfrequency shifts // Nat. Conf. Publ. / Inst. Eng. Austral. 1990. № 9. P. 329–333.
5. *Васильев Н.А., Дворников С.И.* Экспериментальные исследования колебательных характеристик железнодорожных шпал // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 424–426.
6. *Oh S., Kim H., Park Y.* Active control of road booming noise in automotive interiors // J. Acoust. Soc. Amer. 2002. V. 111. № 1. P. 180–188.
7. *Frikha S., Coffignal G., Trolle J.L.* Boundary condition identification using condensation and inversion // J. Sound and Vib. 2000. V. 233. № 3. P. 495–514.
8. *Frikha S., Gaudin M., Coffignal G.* Boundary condition error for parametric updeting of In-operation systems application to piping systems // J. Sound and Vib. 2001. V. 241. № 3. P. 373–399.
9. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. педагогич. ин-та, 2001. 499 с.
10. *Ахтямов А.М.* Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127–1128.
11. *Ахтямов А.М.* О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по ее спектру // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. Вып. 4. С. 995–1006.
12. *Ахатов И.Ш., Ахтямов А.М.* Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.
13. *Strutt W.* (*Lord Rayleigh*) The theory of sound. V. 1. L.: Macmillan, 1929. = *Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 1. М.–Л.: Гостехиздат, 1940. 499 с.
14. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: Челомей В.Н. (пред.). Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
15. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964. 288 с.
16. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. Под ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 831 с.
17. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
18. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
19. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979. 312 с.

Is It Possible to Determine the Type of Fastening of a Vibrating Plate from Its Sounding?

A. M. Akhtyamov

Department of Differential Equations, Bashkortostan State University, ul. Frunze 32, Ufa, Bashkortostan, 450074 Russia

e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

The problem of determining the type of fastening of a circular plate inaccessible to direct observation from the eigenfrequencies of its symmetric flexural vibrations is considered. The uniqueness theorem for the solution of this inverse problem is proven, and a method for the reconstruction of unknown boundary conditions is indicated. An approximate formula for the determination of unknown boundary conditions from three eigenfrequencies is obtained. It is assumed that the eigenfrequencies can be given approximately, within a certain accuracy. The method of an approximate calculation of unknown boundary conditions is illustrated by four examples of different cases of the plate fastening (a free support, an elastic fixing, a floating fixing, and a free edge).