

КРАТКИЕ  
СООБЩЕНИЯ

УДК 534.213

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН  
В УЗКИХ ТРУБАХ

© 2003 г. Р. Г. Галиуллин\*, Л. А. Тимохина\*, С. Е. Филипов\*\*

\* Казанский государственный университет, физический факультет  
420008 Казань, ул. Кремлевская 18

\*\* Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН  
420111 Казань, ул. Лобачевского 2/31

E-mail: Sergey.Philipov@ksu.ru

Поступила в редакцию 23.10.2001 г.

В данной работе предлагается теория вторичных течений, возникающих при распространении звуковой волны в узкой цилиндрической трубе неограниченной длины.

Исследования распространения звуковых волн в узких трубах [1–5], в том числе акустических течений, актуальны в настоящее время, в связи с термоакустическими эффектами [6], на основе которых можно построить тепловую (холодильную) машину [6, 7].

Описание вторичных течений в бегущей волне, представленное в [8], нельзя признать удовлетворительными, т.к. задача, во-первых, решалась в одномерной постановке, между тем реальные акустические течения являются неоднородными [9], во-вторых, рассматривалась нетеплопроводная жидкость. В настоящей работе представляется теория вторичных течений в бегущей волне, свободная от этих недостатков.

Рассмотрим трубу на одном конце ( $x = 0$ ) которой расположен поршень, колеблющийся по гармоническому закону с амплитудой смещения  $l_0$ . Для характеристики колебаний введем параметры

$$M_p = \frac{\omega l_0}{c_0}, \quad H = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad N = \frac{\omega R}{c_0}. \quad (1)$$

Первые два из них ( $M_p$  и  $H$ ) рассматривались ранее [10], а третий в силу  $k_0 \sim \lambda^{-1}$  (где  $\lambda$  – длина волны), имеет смысл отношения радиуса трубы к длине волны, поэтому условие  $N \ll 1$  относится к случаю узкой трубы.

Пусть  $M_p \ll 1, H \gg 1, N \ll 1$ . Решение уравнений первого приближения в схеме метода возмущения при  $M_p \ll 1, N \ll 1$  можно найти в [10]. Легко показать, что бегущая вправо волна имеет вид

$$p_1 = C \exp i(\omega t - kx),$$

$$u_1 = \frac{p_1}{\rho_0 c_0} (1 - e^{-(1+i)\eta}),$$

$$\rho_1 = \frac{1}{c_0} [1 + (\kappa - 1) e^{-(1+i)\eta\sqrt{\sigma}}] p_1,$$

$$v_1 = \frac{(1+i)\omega\delta}{2\rho_0 c_0^2} \times \quad (2)$$

$$\times \left\{ \left(1 + \frac{\kappa - 1}{\sqrt{\sigma}}\right) \frac{r}{R} - e^{-(1+i)\eta} - \frac{\kappa - 1}{\sqrt{\sigma}} e^{-(1+i)\eta\sqrt{\sigma}} \right\} p_1,$$

$$k = k_0 \{ (1 + \beta') + i\beta'' \}, \quad \beta'' = -\beta',$$

$$\beta' = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{\sqrt{\sigma}}\right) \frac{\delta}{R}, \quad \eta = \frac{R - r}{\delta}, \quad C = \rho_0 c_0^2 M_p,$$

с учетом, что на поршне  $u_p = \omega l_0 \exp(i\omega t)$ , где  $p, u, v, \rho, k$  – давление, осевая и радиальная скорости, плотность и волновое число, соответственно,  $\delta$  – толщина пограничного слоя;  $\kappa = C_p/C_v$  – отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме,  $\sigma = \nu/\chi$  – число Прандтля, определяемое как отношение кинетической вязкости,  $\nu$  к температуропроводности среды  $\alpha$  индекс “1” указывает на то, что величины относятся к первому приближению.

Уравнения второго приближения, описывающие вторичное стационарное течение, записываем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle p_2 \rangle}{\partial x} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial r} \right) = \\ & = -\rho_0 \left( \left\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} \right\rangle \right) - \left\langle \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right\rangle, \\ & \rho_0 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle v_2 \rangle) + \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x} \right] = \\ & = - \left\langle v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right\rangle - \left\langle u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\rho_1 \partial \rho_1}{\rho_0 \partial t} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

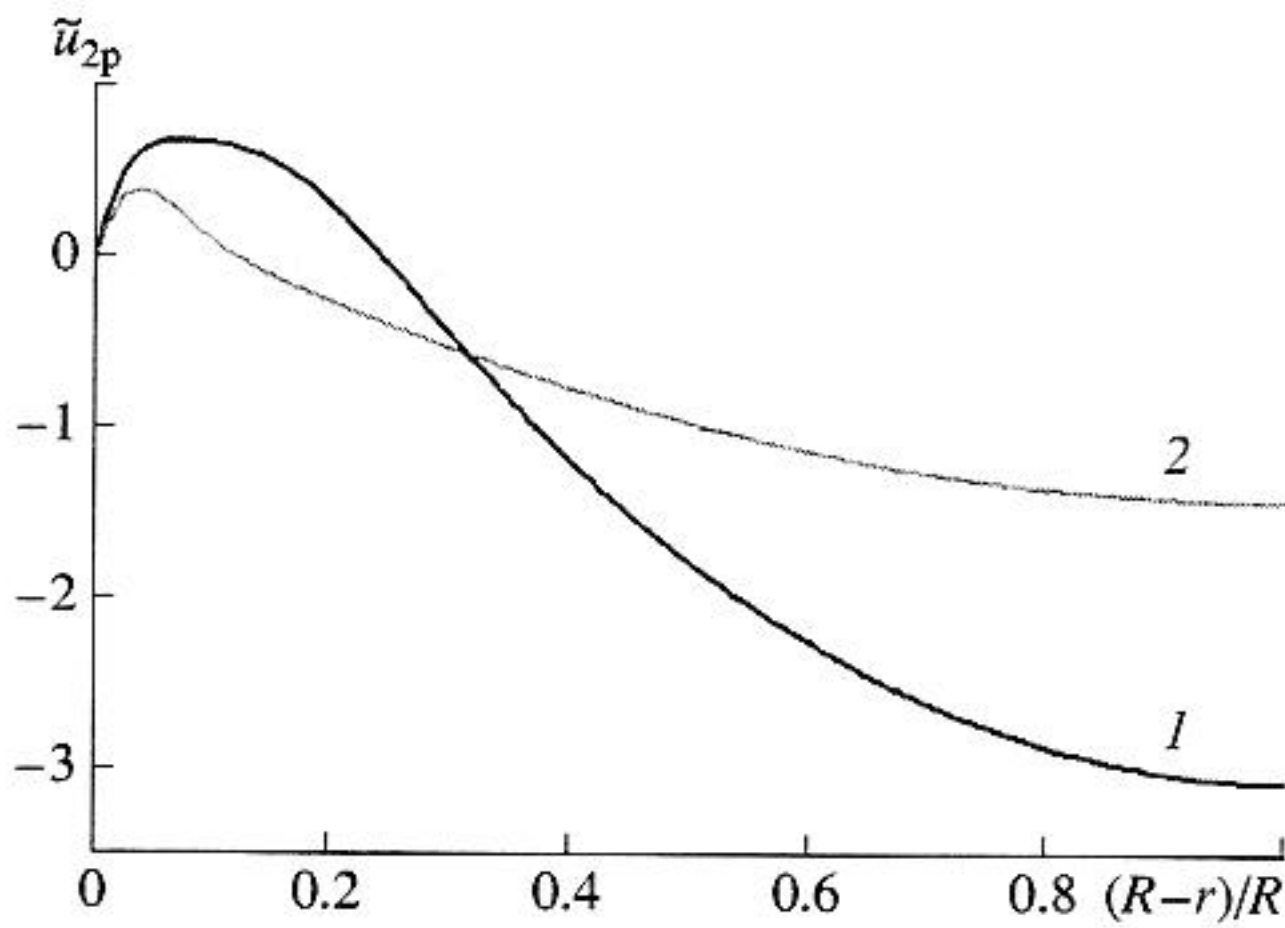


Рис. 1. Зависимости  $\tilde{u}_{2p}$  от величины безразмерной радиальной координаты  $(R-r)/R$  для двух значений числа Прандтля (кривая 1 –  $\sigma = 0.1$ ; кривая 2 –  $\sigma = 0.7$ ).

$$\frac{\partial \langle p_2 \rangle}{\partial r} = 0,$$

где угловые скобки означают осреднение по времени.

Уравнение (3) решаются методом, приведенным в [11] и окончательные выражения для  $\langle u_2 \rangle$  и  $\langle v_2 \rangle$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} \langle u_2 \rangle &= -\frac{M_p^2 c_0}{2} e^{-2k_0 x \beta'} \times \\ &\times \left[ g_1(\eta, \sigma) + g_1(0, \sigma) \left( 1 - \frac{2r^2}{R^2} \right) + 2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right], \\ \langle v_2 \rangle &= -\frac{1}{2} \beta' \omega R M_p^2 e^{-2k_0 x \beta'} \times \\ &\times \left[ g_1(0, \sigma) \left( \frac{r}{R} - \frac{r^3}{R^3} \right) + \left( \frac{2r}{R} - \frac{r^3}{R^3} \right) - \frac{g_2(\eta, \sigma)}{g_2(0, \sigma)} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} g_1(\eta, \sigma) &= -\left( 1 + \frac{\kappa-1}{\sqrt{\sigma}} \right) e^{-\eta} \sin \eta + e^{-\eta} \cos \eta - \frac{1}{2} e^{-2\eta} + \\ &+ \frac{\kappa-1}{\sigma} e^{-\eta \sqrt{\sigma}} \cos \eta \sqrt{\sigma} - \frac{\kappa-1}{1+\sigma} e^{-(1+\sqrt{\sigma})\eta} \cos(1-\sqrt{\sigma})\eta + \\ &+ \frac{\kappa-1}{\sqrt{\sigma}(1+\sigma)} e^{-(1+\sqrt{\sigma})\eta} \sin(1-\sqrt{\sigma})\eta, \\ g_2(\eta, \sigma) &= -e^{-\eta} \cos \eta - e^{-\eta} \sin \eta + \\ &+ (\kappa-1) \left( 1 + \frac{\kappa-2}{\sqrt{\sigma}} \right) e^{-\eta \sqrt{\sigma}} \cos \eta \sqrt{\sigma} - \end{aligned}$$

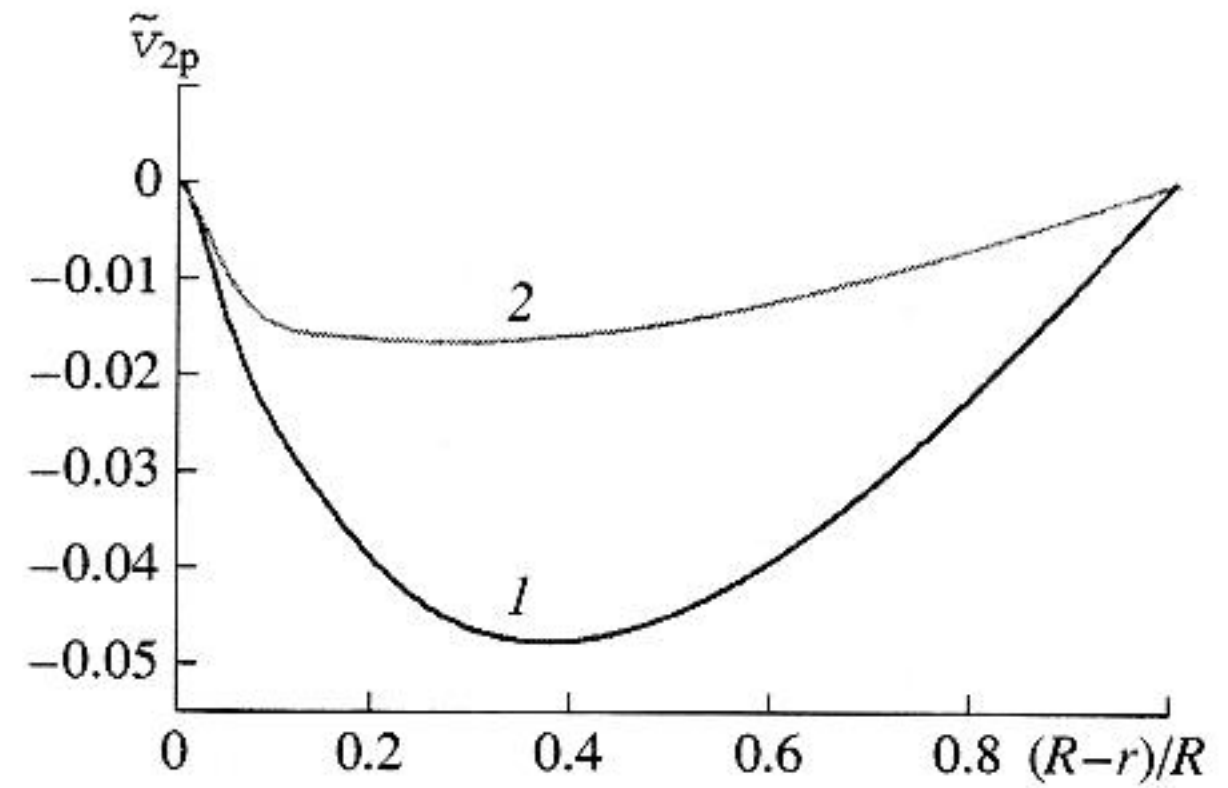


Рис. 2. Зависимости  $\tilde{v}_{2p}$  от безразмерной радиальной координаты  $(R-r)/R$  для двух значений числа Прандтля (кривая 1 –  $\sigma = 0.1$ ; кривая 2 –  $\sigma = 0.7$ ).

$$\begin{aligned} & - (\kappa-1) \left( 1 + \frac{\kappa}{\sqrt{\sigma}} \right) e^{-\eta \sqrt{\sigma}} \sin \eta \sqrt{\sigma} - \frac{(\kappa-1)^2}{\sqrt{\sigma}} e^{-2\eta \sqrt{\sigma}} - \\ & - (\kappa-1) e^{-(1+\sqrt{\sigma})\eta} \cos(1-\sqrt{\sigma})\eta - \\ & - (\kappa-1) e^{-(1+\sqrt{\sigma})\eta} \sin(1-\sqrt{\sigma})\eta, \\ g_1(0, \sigma) &= \frac{1}{2} + \frac{\kappa-1}{\sigma(1+\sigma)}, \quad g_2(0, \sigma) = -\left( 1 + \frac{\kappa-1}{\sqrt{\sigma}} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\beta' R} g_2(0, \sigma) = -1.$$

Рассмотрим свойства полученных решений. Видно, что направление осевой компоненты скорости  $\langle u_2 \rangle$  обратно направлению распространения волны. Это отличается от течений Экарта, в которых направление пучка совпадает с направлением  $\langle u_2 \rangle$  [9]. Другое отличие состоит в том, что течения Экарта исчезают, если луч касается стенок трубы.

Структура потоков определяется выражениями  $\tilde{u}_2 = \langle u_2 \rangle / M_p^2 c_0$  и  $\tilde{v}_2 = \langle v_2 \rangle / M_p^2 \omega R$ . Зависимости  $\tilde{u}_{2p}$ , где индекс "p" соответствует значению на поршне, от величины  $(R-r)/R$  для двух значений  $\sigma$  даны на рис. 1. Кривые 1 и 2 относятся к  $\sigma = 0.1$  и  $0.7$ , соответственно. Видно, что уменьшение числа Прандтля приводит к существенному росту абсолютного значения  $\tilde{u}_{2p}$ . Можно заметить также, что вблизи стенки  $\tilde{u}_{2p} > 0$  и оказывается существенно меньше, чем в ядре потока, причем увеличение числа Прандтля способствует сокращению размеров области с  $\tilde{u}_{2p} > 0$ .

На рис. 2 представлены зависимости  $\tilde{v}_{2p}$  от  $(R-r)/R$  для двух различных чисел Прандтля (кривая 1 –  $\sigma = 0.1$ , кривая 2 –  $\sigma = 0.7$ ). Видно, что уменьшение  $\sigma$  способствует росту абсолютных

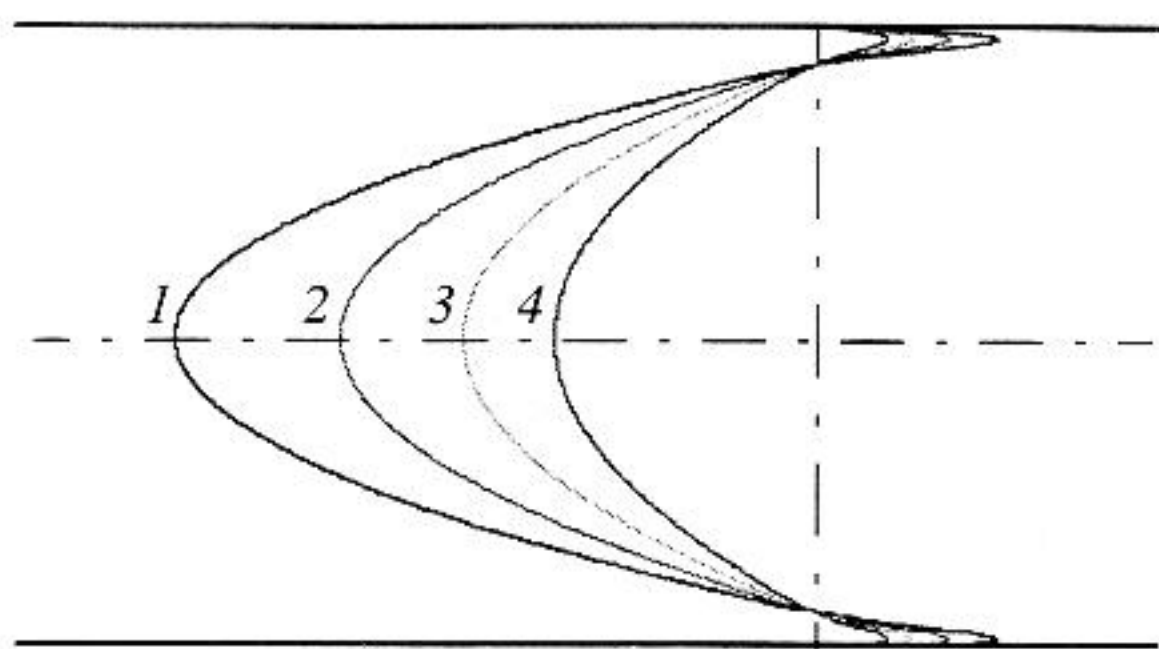


Рис. 3. Профили  $\tilde{u}_2$ , соответствующие различным расстояниям  $\bar{x} = x/\lambda$  для  $\sigma = 0.7$ . Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют  $\bar{x} = 0; 1; 2; 3$ .

значений  $\tilde{v}_{2p}$  и сдвигу положения максимума  $\tilde{v}_{2p}$  в сторону оси трубы.

Профили  $\tilde{u}_2$ , соответствующие различным расстояниям  $\bar{x}$  до поршня для  $\sigma = 0.7$  представлены на рис. 3, где  $\bar{x} = x/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны. Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют следующим значениям  $\bar{x}$ : 0; 1; 2; 3.

Таким образом, учет теплопроводности и неоднородности потока существенно влияет на характеристики акустических течений в узких трубах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kordomenos J., Atchley A.A., Raspet R., Bass H.E.* Experimental study of a thermoacoustic termination of a

traveling-wave tube // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1995. V. 98. № 3. P. 1623–1628.

2. *Roh H.S., Arnott W.P., Raspet R., Sabatier J.M.* Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. V. 89. № 6. P. 2617–2623.

3. *Arnott W.P., Bass H.E., Raspet R.* General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrary shaped pore cross sections // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. V. 90. № 6. P. 3228–3237.

4. *Peat K.S.* Convected acoustic wave motion along a capillary duct with an axial temperature gradient // *J. Sound and Vibration.* 1997. V. 203. № 5. P. 855.

5. *Luc Bauwens.* Oscillating flow of a heat conducting fluid in a narrow tube // *J. of Fluid. Mech.* 1996. V. 324. P. 135.

6. *Rott N.* *Thermoacoustics* // *Adv. Appl. Mech.* 1980. V. 20. P. 135–175.

7. *Ceperly P.H.* Gain and efficiency of a short traveling heat engine // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1985. V. 77. P. 1239–1244.

8. *Ниборг В.* Акустические течения. В кн. *Физическая акустика*. Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. 520 с.

9. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.

10. *Tijdeman H.* On the propagation of sound waves in cylindrical tubes // *J. Sound and vibration.* 1975. V. 39. № 1. P. 1–33.

11. *Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е.* Акустические течения при резонансных колебаниях газа в цилиндрической трубе // *Акуст. журн.* 2001. Т. 47. № 5. С. 611–615.