АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2001, том 47, № 4, с. 558–560

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.21

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

© 2001 г. Д. А. Азалинов

Институт проблем машиноведения РАН
199178 С.-Петербург, Большой пр. В. О., 61
E-mail: azalinov@gp3628.spb.edu, azalinov@euler.ipme.ru

Поступила в редакцию 28.08.99 г.

В настоящее время вызывают большой интерес вопросы определения динамических и акустических характеристик аэродромов и других конструкций, плавающих на поверхности воды.

Особенностью гранично-контактных задач подобного рода является возможность локализации волн, распространяющихся в системе жидкость–структура [1].

Результаты решений подобных задач указывают на необходимость определения условий существования дискретного спектра собственных частот колебаний такой системы (жидкость–структура), которая может вызвать эффекты локализации волн и резонанса. Полученные ниже условия аналогичны условиям возникновения локализованных мод колебаний в сплошных средах с включением [2].

В настоящей работе решается задача о нахождении верхней и нижней границ дискретного спектра, соответствующих им частот отсечки и, следовательно, диапазонов частот, где возможно распространение изгибных гравитационных волн, а также определяются соответствующие собственные формы колебаний.

В проведенных другими авторами исследованиях (например, в работах [3–4]) не удалось оценить возможность существования собственных частот в подобной системе, они не были найдены даже численно.

Рассмотрим распространение изгибных гравитационных волн в системе "тонкая пластина–жидкость", которое происходит в слое идеальной несжимаемой жидкости глубины H. На поверхности слоя располагается пластина бесконечной длины и конечной ширины $2a$. Система координат выбрана так, что ось y направлена по длине пластины, а ось z – вверх и проходит через середину ширины пластины. Верхняя граница слоя вне участка $-a \le x \le a$ свободна. Движение жидкости предполагаем потенциальным, потенциал скорости частиц жидкости $\Phi(x, y, z, t)$. Действующие в жидкости возмущения вызывают колебания пластины, которые описываются перемещением $\zeta(x, y, t)$. Совместные колебания жидкости и пластины приводят к образованию системы поверхностных волн, распространяющихся по осям x и y. Колебания жидкости предполагаются периодическими по координате y с волновым числом m и совершаются с частотой ω. Воспользуемся приближением теории длинных волн на мелкой воде ($kH \ll 1$, где k – волновое число).

Будем искать потенциал в виде:

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x)\exp(imy + i\omega t)$$

Область от $-\infty$ до $+\infty$ по оси x поделим на 3 части.

Первая и третья область (в дальнейшем индексы 1 и 3) будет соответствовать свободной поверхности воды, для потенциала скоростей частиц которой имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \left(m^2 - \frac{1}{gH}\omega^2\right)\phi = 0. \qquad (1)$$

Для второй области (пластина на поверхности жидкости) мы имеем следующую систему определяющих уравнений:

$$\begin{cases} D\left(\dfrac{\partial^4\zeta}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2} + \dfrac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}\right) + \\ + \rho_1 h\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \rho\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} = -H\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right), \end{cases} \qquad (2)$$

где h – толщина пластины, D – жесткость, ρ_1 – плотность материала пластины, ρ – плотность воды.

Используя второе уравнение системы (2), для решения первого получим следующее уравнение

относительно потенциала (при этом решение для ζ берется в виде: $\zeta(x, y, t) = \zeta(x)\exp(imy + i\omega t)$):

$$\frac{D}{\rho g}\left(\frac{\partial^6\phi}{\partial x^6} - 3m^2\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} + 3m^4\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - m^6\phi\right) + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - m^2\phi\right)\left(1 - \frac{\rho_1 h}{\rho g}\omega^2\right) + \frac{\omega^2}{gH}\phi = 0. \quad (3)$$

В качестве краевых условий задачи примем: равенство потенциалов и скоростей частиц жидкости и пластины при $x = \pm a$, а также равенство нулю перерезывающей силы (F) и изгибающего момента (M) на краях пластины. Например, для $x = a$ мы имеем:

$$\phi_2 = \phi_3,$$
$$\frac{\partial\phi_2}{\partial x} = \frac{\partial\phi_3}{\partial x},$$
$$M = D\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4\phi_2}{\partial x^4} + (1+\sigma)\frac{\partial^4\phi_2}{\partial x^2\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^4\phi_2}{\partial y^4} = 0, \quad (4)$$
$$F = -D\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\partial y^2}\right) = \frac{\partial^5\phi_2}{\partial x^5} + (3-\sigma)\frac{\partial^5\phi_2}{\partial x^3\partial y^2} + (2-\sigma)\frac{\partial^5\phi_2}{\partial x\partial y^4} = 0.$$

Кроме того, на потенциал следует наложить условие ограниченности при $y = \pm\infty$, а при $x = \pm\infty$ должно выполняться условие Зоммерфельда.

Для потенциала в (1) и (3) решение будем искать в следующей форме:

$$\phi_i(x) = \sum_j e^{\alpha_j x}. \quad (5)$$

Тогда уравнения (1) и (3) сводятся к алгебраическим уравнениям второго и шестого порядка относительно α_j. Опуская в дальнейшем индексы j, имеем:

$$\alpha^2 - \left(m^2 - \frac{\omega^2}{gH}\right) = 0, \text{ для областей 1 и 3}, \quad (6)$$

$$\alpha^6 + A\alpha^4 + B\alpha^2 + C = 0, \text{ для области 2}, \quad (7)$$

где

$$A = -3m^2, \quad B = 3m^4 + \frac{\rho g - \rho_1 h\omega^2}{D},$$
$$C = -m^6 + \frac{-H\rho g m^2 + \rho_1 h H\omega^2 m^2 + \omega^2\rho}{DH}.$$

Уравнение (6) имеет 2 одинаковых по модулю корня с противоположным знаком, которые либо вещественны либо мнимы. Уравнение (7) имеет 6 корней, четыре из которых всегда являются комплексными (в форме $\pm u \pm iv$), а оставшиеся два – либо вещественны, либо мнимы. Та частота, при которой решение переходит из вещественной области в мнимую или наоборот, и является частотой отсечки системы жидкость–структура.

Выражение частоты отсечки для областей свободной поверхности жидкости справа и слева от пластины может быть получено из (1) и имеет вид:

$$\omega_w = m\sqrt{gH}. \quad (8)$$

Аналогично из (3) может быть получена частота отсечки для области, соответствующей плавающей на поверхности воды бесконечной пластине:

$$\omega_p = m\sqrt{\frac{H(Dm^4 + \rho g)}{m^2\rho_1 Hh + \rho}}. \quad (9)$$

Нижней границей дискретного спектра является частота отсечки волновода (пластины), бесконечного в одном направлении, а верхней – частота отсечки среды вне пластины, в нашем случае – частота отсечки бесконечного мелководного водоема.

Локализация волн в области пластины может произойти только, если собственная вещественная дискретная частота системы лежит в диапазоне:

$$\omega_p < \hat{\omega} < \omega_w. \quad (10)$$

В этом случае на свободной поверхности воды справа и слева от пластины возможно только затухание волн, в то время как в самой пластине распространяются бегущие волны.

Дальнейший анализ существования дискретного спектра системы проводился численно. В ходе решения задачи на собственные значения было установлено, что имеется как минимум одна собственная частота системы "пластина–жидкость", которая существует только тогда, когда $\omega_p < \omega_w$, и лежит в диапазоне, определяемом выражением (10).

Как показали дополнительные исследования, границы дискретного спектра, т.е. соответствующие частоты отсечки, не являются собственными частотами системы "пластина–жидкость".

В случае учета сжимаемости жидкости в дисперсионной зависимости частота–волновое число появится еще одна ветка, начало которой лежит выше верхней частоты отсечки, то есть вне диапазона, в котором возможна локализация волн.

На рисунке приведена соответствующая форма собственных колебаний. Она симметрична, локализована и экспоненциально затухает в направлении оси x.

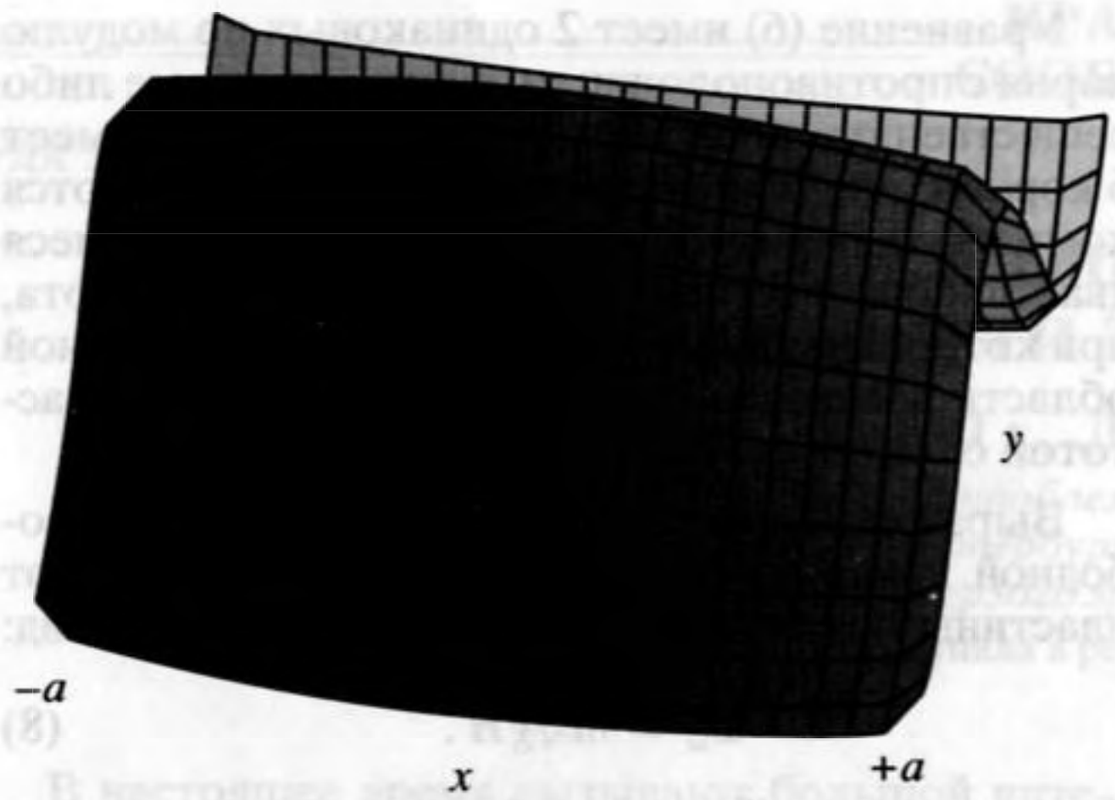

Рисунок.

В заключении хотелось бы привести результаты численного исследования влияния некоторых параметров системы на существование и положение собственной частоты:

1. При уменьшении m (волнового числа по оси y) собственная частота системы увеличивается. В том случае, если в диапазоне между частотами отсечек возможно существование нескольких частот отсечки, расстояние между ними при этом увеличивается, а сам диапазон смещается влево на частотной оси;

2. Уменьшение глубины водоема влечет за собой аналогичные эффекты;

3. Уменьшение ширины пластины вызывает смещение собственной частоты вправо и увеличение расстояния между собственными частотами, если их несколько;

4. Для существования описанного эффекта локализации толщина пластины должна лежать в очень узком диапазоне (в исследованном случае в районе $1 \pm 0.2m$).

Автор благодарит д. т. н. Абрамяна А.К. и д. ф. м. н. Индейцева Д.А. за полезные советы при проведении исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramian A.K., Indeitsev D.A., Vakulenko S.A.* Wave Localization in Hydroelastic Systems // Flow, Turbulence and Combustion 61. Kluwen Ac. Publishers, 1999. P. 1–20.
2. *Абрамян А.К., Индейцев Д.А.* Ловушечные моды в мембране с массовой неоднородностью // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 4. С. 437–442.
3. *Ohkusu M., Nanba Y.* Hydroelastic behavior of a very large floating platform in wave // 11th International Workshop on Water, Waves and Floating Bodies, Hamburg, 1996.
4. *Ohkusu M., Nanba Y.* Some Problems of Hydroelastic Behavior of a Floating Thin Plate in Shallow Waves // 13th International Workshop on Water, Waves and Floating Bodies, Aplhen aan den Rijn, 1997. P. 119–122.