АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2000, том 46, № 3, с. 401–407

УДК 534.222

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРОВ ПСЕВДОЗВУКОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПРИСТЕНОЧНЫХ ДАВЛЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

© 2000 г. А. В. Смольяков

Центральный научно-исследовательский институт им. акад. А.Н. Крылова
196158 Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44
E-mail:albert@krylov.spb.su

Поступила в редакцию 16.03.99 г.

Развит простой метод вычисления спектров пристеночных турбулентных давлений в пограничных слоях. Метод основан на моделировании волнового спектра источников, обусловленных взаимодействием типа “турбулентность–средний сдвиг”. Источники вычисляются с помощью соотношений полуэмпирической теории турбулентности. Вычисления позволили выявить четыре характерных частотных диапазона, для которых определены специфические закономерности поведения спектров и найдены наиболее универсальные способы их нормировки. Сравнение вычисленных спектров и среднеквадратичных значений пульсаций давления с опытными данными указывает на удовлетворительное согласие результатов.

Частотный спектр псевдозвуковых (в смысле Блохинцева) турбулентных флуктуаций давления в пограничном слое является одной из важнейших статистических характеристик, которая используется при расчетах шумов обтекания и возбужденных потоком вибраций фюзеляжей самолетов, корпусов судов и других инженерных сооружений. За последние 40 лет выполнено большое количество измерений спектров давления в турбулентных пограничных слоях при различных условиях. Достаточно полные обзоры результатов таких измерений содержат работы [1, 2]. Значительно меньше исследований, в которых делались попытки теоретического вычисления спектров. В последнее время стали появляться публикации об определении статистических характеристик поля турбулентных давлений путем численного интегрирования уравнений Навье–Стокса, например [3, 4]. К сожалению, на этом пути из-за большого объема необходимых вычислений приходится ограничиваться относительно малыми числами Рейнольдса даже при использовании мощных современных компьютеров. Более ранние попытки аналитического изучения проблемы при больших числах Рейнольдса восходят к работе Крейчнана [5], в которой использовалось уравнение Пуассона, полученное путем взятия дивергенции от уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости, и принималось, что источники давления, обусловленные взаимодействием турбулентности со сдвигом средней скорости (источники “турбулентность–средний сдвиг”) доминируют над источниками “турбулентность–турбулентность”. Наибольшего успеха в развитии метода [5] добились Пэнтон и Лайнбергер [6], которые спектральную форму дифференциального уравнения Пуассона интегрировали способом Монте-Карло с применением компьютера, возможности которого соответствовали времени выполнения этой работы. Основные трудности, с которыми встретились авторы работы [6], состояли в том, что подынтегральная функция содержит достаточно сложные и, вообще говоря, неизвестные спектральные и корреляционные характеристики поля скорости в пограничном слое. Для преодоления этих трудностей обычно приходится использовать скудные и разрозненные опытные данные, дополняя их большим количеством умозрительных гипотез, справедливость которых не всегда очевидна, что снижает достоверность окончательных результатов. По-видимому, по этой причине в более поздней и фундаментальной монографии Блейк [7], отказавшись от детализации подинтегрального выражения, ограничился оценкой порядка величин различных членов и качественным прогнозом формы спектра в разных частотных диапазонах (p. 528, fig. 8.14).

Следуя Фокс-Вильямсу [8], Блейк [7] записал для области псевдозвука ($k \gg \omega/c$) следующее выражение для турбулентных давлений на плоской пластине, обусловленных источниками типа “турбулентность–средний сдвиг”:

$$p(k_1, k_3, \omega) \sim \rho \frac{k_1}{k} \int_0^\infty \frac{dU}{dy} \tilde{u}_2(k_1, y, k_3\omega) \exp(-ky) dy, \quad (1)$$

$$k \gg \omega/c.$$

Здесь обозначено: ω – круговая частота, c – скорость звука, $p(k_1, k_3, \omega)$ – частотно-волновой спектр амплитуд флуктуаций давления, k_1 и k_3 – волновые числа в плоскостях, параллельных пластине, при этом k_1 соответствует направлению вдоль потока, а k_3 – поперек потока, $k = (k_1^2 + k_3^2)^{1/2}$, ρ – плотность жидкости, y – расстояние от пластины по нормали к ней, U – средняя скорость в пограничном слое на уровне y, $\tilde{u}_2(k_1, y, k_3, \omega)$ – преобразование Фурье флуктуаций скорости $u_2(x, y, z, t)$, нормальных к пластине, в плоскостях y = const, где x, z – декартовы координаты соответственно вдоль и поперек потока, t – время.

Энергетический частотно-волновой спектр $E(\mathbf{k}, \omega)$ связан со спектром амплитуд, как известно, соотношением

$$E(\mathbf{k}, \omega)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta(\omega - \omega') = \langle p(\mathbf{k}, \omega)p(\mathbf{k}', \omega')\rangle, \quad (2)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\mathbf{k}'$ и ω' – независимые от $\mathbf{k}$ и ω переменные и угловые скобки означают осреднение по ансамблю. В результате перемножения интегралов (1) и последующего их осреднения в соответствии с (2) получается выражение, содержащее неизвестные нам частотно-волновые спектры и пространственные корреляции флуктуаций скорости, которые затем должны быть дважды проинтегрированы по нормальным к стенке независимым координатам y и y' вместе с градиентами средней скорости.

Основная идея данной работы состоит в том, чтобы попытаться избежать указанных выше сложных манипуляций с неизвестными функциями. Для этого, исходя из структуры формул (1) и (2), сконструируем упрощенное выражение, в котором подразумевается, что необходимое осреднение и одно из интегрирований по y уже выполнены:

$$E(\mathbf{k}, \omega) \sim \rho^2\left(\frac{k_1}{k}\right)^2 \int_0^\infty \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 G(\mathbf{k}, \omega, y)\exp(-2ky)dy. \quad (3)$$

Здесь $G(\mathbf{k}, \omega, y)$ – некоторая обобщенная частотно-волновая функция источников давления, расположенных в пограничном слое на расстоянии y от стенки. Теперь наиболее ответственная (но зато единственная) проблема состоит в удачном моделировании функции G. Примем для этой функции гипотезу Тейлора о замороженной турбулентности (что, однако, в данном случае не означает распространения этой гипотезы на поле пристеночных давлений [8]):

$$G(k_1, k_3, \omega, y) = B(k_1, k_3, y)\delta(k_1 - \omega/U), \quad (4)$$

где $B(k_1, k_3, y)$ – волновой спектр источников, который в соответствии с [8] при малых k пропорционален k^2, а при $k \longrightarrow \infty$ стремится к нулю. Такому поведению отвечает, в частности, функция

$$B(k_1, k_3, y) = f(y)(k_1^2 + \beta^2 k_3^2) \times \times \exp\{-\alpha 1[k + |k_1|(\beta - 1)]\}. \quad (5)$$

В геометрической интерпретации функция (5) имеет форму кратера, вытянутого вдоль k_3 при $\beta > 1$, где β – коэффициент асимметрии. В (5) также обозначено: l – типичный размер вихревых структур (масштаб длины) на расстоянии y от стенки, α – безразмерный коэффициент, определяющий скорость убывания спектра (5) на высоких волновых числах. Естественное желание иметь максимальную энергию на волновом числе $k_3 = 2\pi/l$ позволяет положить $\alpha = 1/\pi$. На основании соображений о размерностях величин, функцию расстояния, входящую в (5), можно представить как $f(y) \sim v l^5$, где v – характерная величина турбулентных флуктуаций скорости на уровне y. Используя это соотношение, подставляя (4) и (5) в (3) и затем интегрируя (3) по волновым числам, получим следующее выражение для частотного спектра турбулентных давлений:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int E(k_1, k_3, \omega)dk_1 dk_3 = \quad (6)$$
$$= A\rho^2 \int_0^\infty F(\mu) v l^5 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \left(\frac{\omega}{U}\right)^3 \exp\left[-\frac{l\omega}{\pi U}(\beta - 1)\right]dy.$$

Здесь A – безразмерная постоянная,

$$F(\mu) = \beta^2 \int_1^\infty \frac{se^{-\mu s}ds}{\sqrt{s^2 - 1}} - (\beta^2 - 1)\int_1^\infty \frac{e^{-\mu s}ds}{s\sqrt{s^2 - 1}} = \quad (7)$$
$$= \beta^2 K_1(\mu) - (\beta^2 - 1)I(\mu),$$

$\mu = (\omega l/\pi U)[1 + (2\pi y/l)]$, $s^2 = 1 + (k_3 U/\omega)^2$, $K_1(\mu)$ – функция Макдональда первого порядка, а $I(\mu)$ – второй из интегралов (7).

Для характерных масштабов скорости и длины турбулентного движения в сдвиговом потоке принимаются соотношения

$$v \sim \langle u_1 u_2\rangle^{1/2}, \quad l = \langle u_1 u_2\rangle^{1/2}/(dU/dy), \quad (8)$$

которые использовались прежде в работах [9, 10]. Здесь $\langle u_1 u_2\rangle$ – корреляция продольной и нормальной к стенке компонент турбулентных флуктуаций скорости, пропорциональная напряжениям Рейнольдса. Заметим, что второе из соотношений (8) вполне согласуется с известной гипотезой Прандтля $l = \kappa y$ о пути смешения ($\kappa = 0.41$ – постоянная Кармана).

Введение в рассмотрение турбулентных масштабов (8) позволяет, как мы увидим ниже, с по-

мощью простых соотношений полуэмпирической теории турбулентности определить вклады в поле давлений на стенке от разных частей пограничного слоя, движение в которых различным образом зависит от действующих в потоке сил вязкости и инерции.

В турбулентном пограничном слое различают две области течения – слой постоянных напряжений и внешнюю часть пограничного слоя, каждой из которых присущи свои специфические закономерности, которые и будут использованы при вычислении спектров турбулентных пульсаций давления.

В слое постоянных напряжений, простирающемся от стенки примерно на 13–15% от всей толщины пограничного слоя, равновесие сил описывается соотношением [11, 12]:

$$(dU/dy)(\nu + \varepsilon) = U_\tau^2 = \text{const}, \qquad (9)$$

где ν – молекулярная вязкость, $\varepsilon = \langle u_1 u_2 \rangle/(dU/dy)$ – вихревая (турбулентная) вязкость, $U_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ – динамическая скорость, τ_w – напряжение вязкого трения на стенке. С помощью (9) масштабам (8) в слое постоянного напряжения можно придать вид

$$\nu \sim U_\tau[(\varepsilon/\nu)/(1 + \varepsilon/\nu)]^{1/2}, \qquad (10)$$
$$l = (\nu/U_\tau)[(\varepsilon/\nu)(1 + \varepsilon/\nu)]^{1/2}.$$

Известно [11], что вихревая вязкость в слое постоянных напряжений по мере удаления от стенки нарастает сначала по кубическому, а затем по линейному закону. Поэтому примем, что

$$\varepsilon/\nu = b(yU_\tau/\nu)^3 \text{ при } yU_\tau/\nu \le (\kappa/b)^{1/2}; \qquad (11)$$
$$\varepsilon/\nu = \kappa(yU_\tau/\nu) \text{ при } yU_\tau/\nu \ge (\kappa/b)^{1/2},$$

не стремясь использовать более сложную форму [9], плавно сопрягающую эти два случая, в чем, как показали расчеты, нет особой нужды. Здесь b – постоянная. На рис. 1 сопоставлены результаты расчета величины $\langle u_1 u_2 \rangle / U_\tau^2$ (кривая *1*), выполненные с помощью определения $\varepsilon = \langle u_1 u_2 \rangle/(dU/dy)$ и формул (9) и (11), с результатами измерений, заимствованными из монографии [12]. Использование зависимостей (11) для определения профиля средней скорости $U/U_\tau = f(yU_\tau/\nu)$ путем интегрирования (9) также дает хорошее согласие с опытными данными во всех частях слоя постоянного напряжения: вязкой ($\varepsilon \ll \nu$), буферной ($\varepsilon \approx \nu$) и развитой турбулентной ($\varepsilon \gg \nu$), что видно из рис. 2 (кривая *1*), экспериментальные точки для которой также взяты из [12]. Хорошее согласие расчетов с измерениями достигнуто при $b = 6.14 \times 10^{-4}$, что мало отличается от первоначальной оценки $b = 6 \times 10^{-4}$ Таунсенда [11] и соответствует широко используемой константе 4.9 в логарифмическом профиле $U/U_\tau = \kappa^{-1}\ln(yU_\tau/\nu) + 4.9$. Этому профилю в других координатах соответствует логарифмической закон дефекта скорости [11, 12] $(U_0 - U)/U_\tau = -k^{-1}\ln Y + 2.5$, где $Y = y/\delta$, U_0 – скорость на верхней границе пограничного слоя и δ – его толщина, которую легко найти из сопоставления этих двух логарифмик,

$$\delta = (\nu/U_\tau)\exp[\kappa(U_0/U_\tau - 7.4)]. \qquad (12)$$

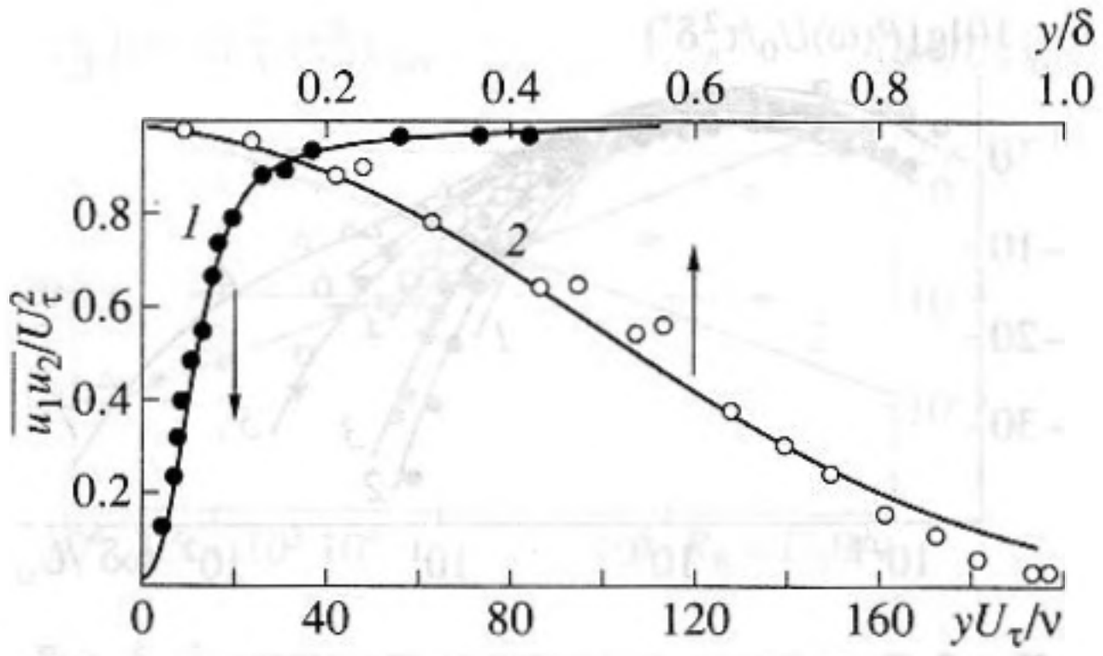

Рис. 1. Распределение рейнольдсовых напряжений по толщине пограничного слоя. ○, ● – измерения, — – расчет.

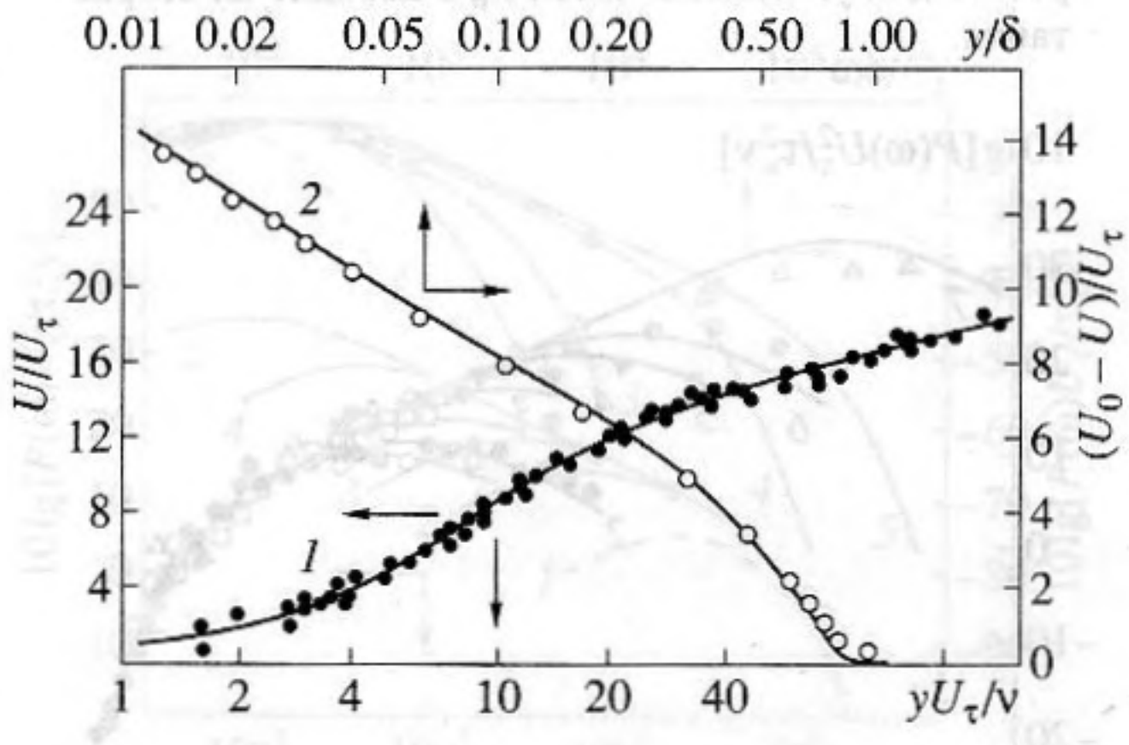

Рис. 2. Распределение средней скорости и дефекта скорости по толщине пограничного слоя. Обозначения как на рис. 1.

Для более удаленной от стенки внешней части пограничного слоя, занимающей остальные 85–87% его толщины, справедлива концепция постоянной вихревой вязкости [9–12]:

$$\varepsilon = U_\tau\delta/\gamma = \text{const}, \qquad (13)$$

где γ – константа. В этой области корреляция $\langle u_1 u_2 \rangle$ хорошо аппроксимируется квадратичной экспонентой [12]

$$\langle u_1 u_2 \rangle = U_\tau^2 \exp(-2.5Y^2), \qquad (14)$$

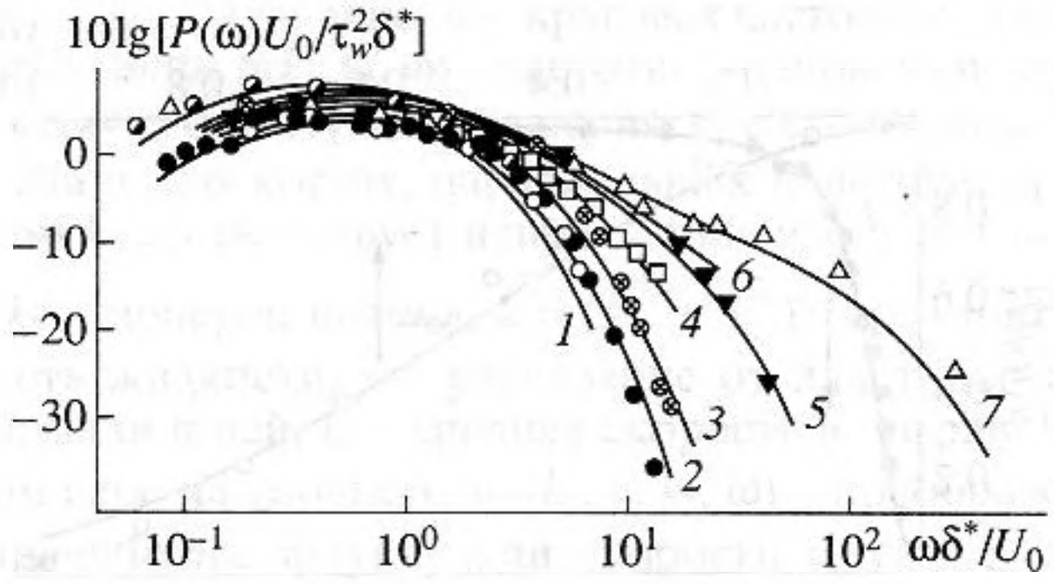

Рис. 3. Спектры давления, нормированные внешними масштабами. Измерения: ○ – [13], $R_\theta = 1.4 \times 10^3$; ● – [14], 2×10^3; ⊗ – [15], 3.4×10^3; □ – [16], 7×10^3, ◑ – [17], 2.9×10^4; ▼ и △ – [18], 1.73×10^4 и 2.93×10^5, — – *1–7* – расчет для указанных чисел R_θ в порядке их возрастания.

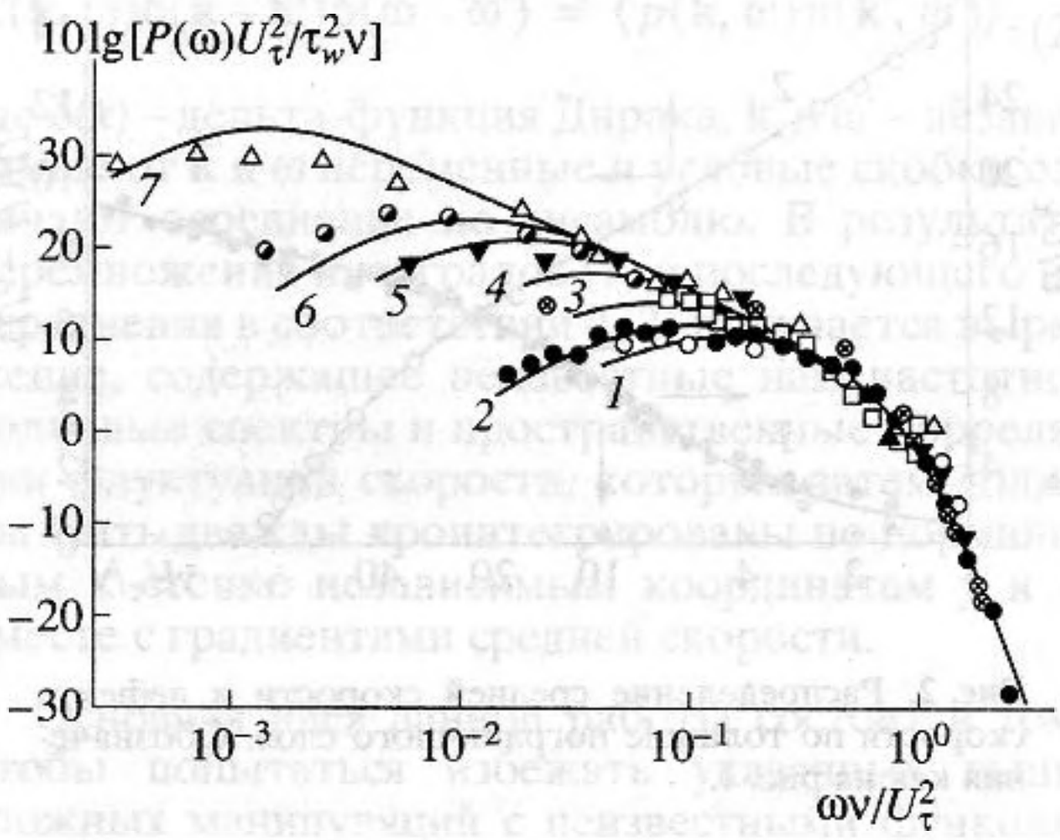

Рис. 4. Спектры давления, нормированные внутренними масштабами. Обозначения как на рис. 3.

что видно из рис. 1 (кривая *2*). Но так как она связана с градиентом средней скорости соотношением $\langle u_1 u_2 \rangle = \varepsilon(dU/dy)$, то

$$dU/dy = \gamma(U_\tau/\delta)\exp(-2.5Y^2), \qquad (15)$$

и теперь с помощью (14) и (15) для масштабов турбулентности (8) во внешней части пограничного слоя можно записать

$$\nu \sim U_\tau \exp(-1.25Y^2), \quad l = (\delta/\gamma)\exp(1.25Y^2). \quad (16)$$

Границу y_0 между слоем постоянных напряжений и внешней частью пограничного слоя нетрудно найти из равенства вихревых вязкостей, определяемых по (13) и по второй из формул (11). Ее безразмерные формы таковы:

$$y_0 U_\tau/\nu = (U_\tau\delta/\nu)/(\kappa\gamma), \quad Y_0 = y_0/\delta = (\kappa\gamma)^{-1}. \qquad (17)$$

Интегрирование градиента (15) и сопоставление полученного на этом пути дефекта средней скорости во внешней части слоя с результатами измерений дает удовлетворительное совпадение при $\gamma = 17.9$ (рис. 2, кривая *2*), и это значение использовалось при вычислениях спектров давлений. Его подстановка во вторую из формул (17) при $\kappa = 0.41$ показывает, что слой постоянного напряжения действительно простирается от стенки примерно на 14% от толщины пограничного слоя.

Необходимые для различных нормировок спектров давления значения толщин вытеснения δ^* и толщин потери импульса θ получались путем интегрирования соответствующих выражений $(1 - U/U_0)$ и $(U/U_0)(1 - U/U_0)$ по всей толщине пограничного слоя (12). Динамическая скорость U_τ и связанные с ней местное трение τ_w и коэффициент трения c_w вычислялись по известной формуле Фолкнера $c_w = 2\tau_w/(\rho U_0^2) = 2(U_\tau/U_0)^2 = 0.0263 R_x^{-1/7}$, где $R_x = U_0 x/\nu$ – число Рейнольдса по координате x, отсчитанной вниз по потоку от передней кромки пластины.

Коэффициенты пропорциональности, подразумеваемые в формулах (10) и (16), вошли в постоянную A основной расчетной формулы (6), и величину A следует определить из сравнения расчетных и измеренных спектров давления. Это же касается и второй неизвестной постоянной – коэффициента асимметрии β волнового спектра источников давления (5). Удовлетворительными оказались следующие значения: $A = 1.6$ и $\beta = 6$.

На рис. 3 представлены спектры пульсаций давления, измеренные в лабораторных условиях Шеве [13], Эммерлингом [14], Фараби [15], Буллом и Томсоном [16], Маноха [17], и на фюзеляжах самолетов Ефимцовым [18]. Спектральные уровни нормированы внешними масштабами пограничного слоя, характеризующими инерционные силы в потоке. На этом же рисунке показаны результаты вычислений по формуле (6) для чисел Рейнольдса, соответствующих условиям проведения измерений. Несмотря на некоторый разброс данных, наблюдается неплохое соответствие расчетных и опытных результатов. В области малых и средних безразмерных частот спектры в представленной нормировке образуют достаточно тесную группу для очень широкого интервала чисел Рейнольдса. Напротив, в области более высоких частот они отчетливо расслаиваются по числам Рейнольдса, на что впервые обратил внимание Ефимцов [18]. На рис. 4 те же самые расчетные и экспериментальные результаты нормированы внутренними масштабами, которые характеризуют вязкие силы в потоке. Видно, что на высоких безразмерных частотах все спектры стремятся к единой зависимости (что сегодня, судя по обзору [1], общепризнано), но расслаиваются по числу Рейнольдса в области средних и низких час-

тот. В расчетных спектрах наблюдаются пологие максимумы, величина которых зависит от числа Рейнольдса. На рис. 5 показаны расчетные величины этих максимумов в функции от $R_\theta = U_0\theta/\nu$ (линия *1*) в там же приведена совокупность опытных данных [13, 15, 16, 19–21], заимствованных из [2], и дополненных результатами [14, 17, 18]. Видно, что результаты расчета хорошо согласуются с результатами измерений. На рис. 6 помещены результаты только расчетов частотных спектров для того, чтобы наиболее отчетливо продемонстрировать характерные черты их поведения на разных частотах и при различных числах Рейнольдса. Нижняя группа кривых представляет спектры, нормированные внутренними масштабами. В соответствии с классификацией, предложенной в [1], [7] и [22] в спектрах при больших числах Рейнольдса можно выделить четыре специфических частотных диапазона.

На низких частотах наблюдается спад спектральных уровней при уменьшении частоты, постепенно переходящий в квадратичную зависимость $P(\omega) \sim \omega^2$, теоретически предсказанную в работах [7, 8]. Авторы опытов [22] полагают, что в этом частотном диапазоне наиболее универсальной является нормировка спектральных уровней комплексом $\rho^2 U_0^3 \delta^*$, а частот – величиной U_0/δ^*. Наши расчеты это вполне подтверждают: такая нормировка практически совмещает (с разницей 1 дБ) низкочастотные спектры в очень большом интервале чисел Рейнольдса $10^3 < R_\theta < 10^6$.

Диапазон средних частот расположен в районе максимумов спектров. Здесь по мнению авторов работ [1, 2, 18, 22] наиболее подходящей нормировкой для спектров является комплекс $\tau_w^2\,\delta/U_\tau$, а для частот – U_τ/δ, что и демонстрируют результаты расчета в виде верхней группы кривых на рис. 6. Исключение составляет спектр при самом низком из обследованных чисел Рейнольдса $R_\theta = 560$ ($R_x \approx 2 \times 10^5$), при котором понятие "развитый" турбулентный пограничный слой утрачивает смысл. За средними частотами следует универсальный диапазон частот, названный так Брэдшоу [23], для которого он с помощью размерного анализа предсказал, что спад волнового спектра давлений должен происходить обратно пропорционально волновому числу, $P(k_1) \sim 1/k_1$. Такая зависимость для некоторого диапазона волновых чисел была также обнаружена расчетом в работе [6]. Если считать, что поле турбулентных давлений абсолютно заморожено и конвектируется с постоянной скоростью, то прогноз [23] для волнового спектра равносилен аналогичному прогнозу для частотного спектра: $P(\omega) \sim \omega^{-1}$. Полученная в наших расчетах зависимость $P(\omega) \sim \omega^{-1.11}$ несколько отличается от закона ω^{-1} и это легко объяснить неполной замороженностью поля давлений и наличием зависимости конвективной скорости от волнового числа. Расчеты показали, что спектр давлений в универсальном диапазоне обусловлен турбулентным движением в логарифмической зоне пограничного слоя и что протяженность этого диапазона существенным образом зависит от числа Рейнольдса. Она тем меньше, чем меньше число Рейнольдса, и при $R_\theta \le 3.5 \times 10^3$ универсальный диапазон исчезает совсем. На рис. 6 светлыми точками показаны места начала этого диапазона, а черными точками – его конец при $\omega\nu/U_\tau^2 \approx 0.2$. Наинизшая частота универсального диапазона в функции от числа Рейнольдса по результатам расчета показана также линией *2* на рис. 5.

На высоких частотах $\omega\nu/U_\tau^2 > 0.2$ рассчитанные спектральные уровни, нормированные внутренними масштабами, характеризуются единой кривой, не зависящей от числа Рейнольдса, что

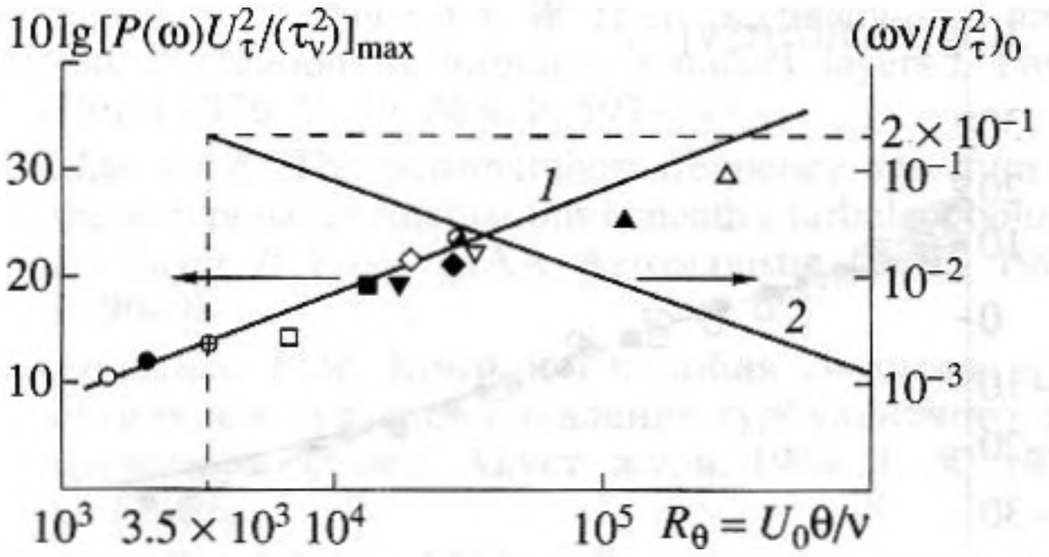

Рис. 5. Зависимости максимумов спектров давления (линия *1*) и начала универсального диапазона (линия *2*) в функции от числа Рейнольдса. Обозначения ○, ●, ⊗, □, ▼, △, ◑ – как на рис. 3, а также ■ – [19], ◇ – [20], ◆ – [21], ▽ и ▲ – [18]; — – расчет.

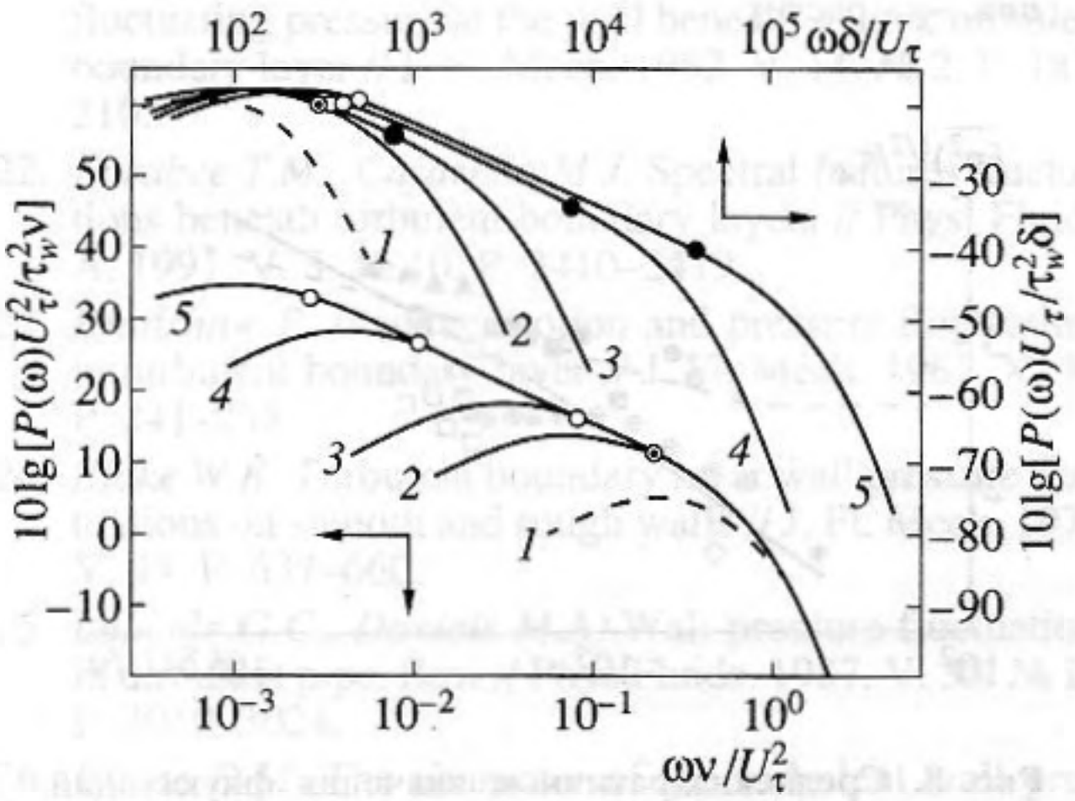

Рис. 6. Расчетные спектры давления в различных нормировках при числах R_θ: *1* – 560, *2* – 3.5×10^3, *3* – 10^4, *4* – 10^5, *5* – 5×10^5.

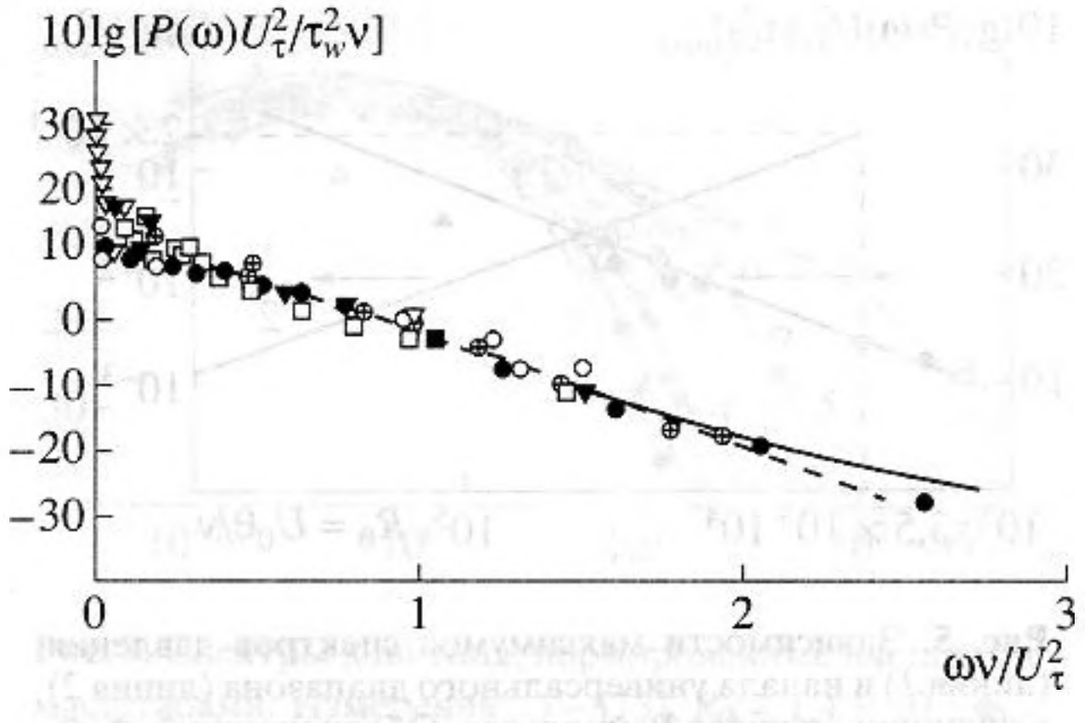

Рис. 7. Высокочастотная часть спектра давлений в полулогарифмических координатах. Обозначения как на рис. 3, ---- – экспоненциальная аппроксимация, — – расчет.

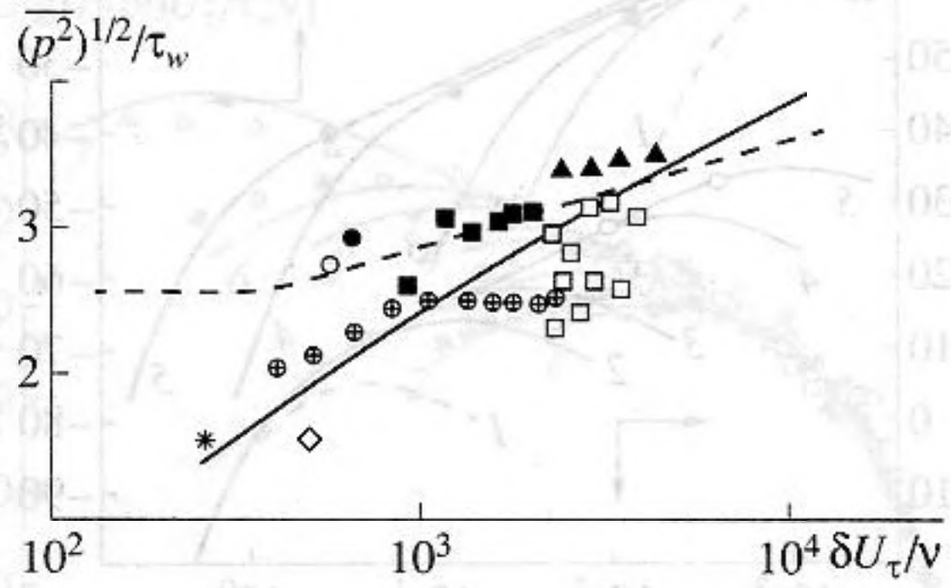

Рис. 8. Среднеквадратичные значения флуктуаций давления. Измерения: ∗ – [4], ○ – [13], ● – [14], □ – [16], ■ – [22], ▲ – [24], ◇ – [25], ⊕ – [27]; ---- – аппроксимация [22], — – расчет.

отчетливо демонстрируют и результаты измерений (рис. 4).

Чтобы можно было использовать разработанную схему расчета (которая реализуется, кстати, на простейших PC IBM за секунды) для других ситуаций, ниже предлагаются аппроксимирующие формулы, которые дают при $R_\theta > 10^3$ ($R_x > 5\times10^5$) значения спектров, отличающихся от вычисленных на ЭВМ не более, чем на ±0.6 дБ:

$$\bar{P}(\omega) = 1.49\times10^{-5}R_\theta^{2.74}\bar{\omega}^2(1-0.117R_\theta^{0.44}\bar{\omega}^{1/2})$$
$$\text{при } \bar{\omega}<\bar{\omega}_0,$$
$$\bar{P}(\omega) = 2.75\bar{\omega}^{-1.11}\{1-0.82\exp[-0.51(\bar{\omega}/\bar{\omega}_0-1)]\}$$
$$\text{при } \bar{\omega}_0<\bar{\omega}<0.2, \qquad (18)$$
$$\bar{P}(\omega) = (38.9e^{-8.35\bar{\omega}}+18.6e^{-3.58\bar{\omega}}+0.31e^{-2.14\bar{\omega}})\times$$
$$\times\{1-0.82\exp[-0.51(\bar{\omega}/\bar{\omega}_0-1)]\}$$
$$\text{при } \bar{\omega}>0.2,$$

где $\bar{P}(\omega) = P(\omega)U_\tau^2/(\tau_W^2\nu)$ и $\bar{\omega} = \omega\nu/U_\tau^2$, $\bar{\omega}_0 = 49.35R_\theta^{-0.88}$. Переход к другим формам нормировки частотных спектров не представляет труда, если известны величины δ, δ* и θ. Первые сомножители этих формул описывают главные закономерности низкочастотного, универсального и высокочастотного диапазонов соответственно. Вторые сомножители (в скобках) обеспечивают плавное согласование уровней в промежуточных областях между этими диапазонами.

В отношении формы спектров на высоких частотах в литературе имеется большое число очень разных предположений: от $P(\omega) \sim \omega^{-1}$ [26] до $P(\omega) \sim \omega^{-5}$ [7]. Встречаются и промежуточные оценки типа $\sim\omega^{-3/2}$, $\sim\omega^{-7/3}$ и другие. Опытные данные, представленные на рис. 4 в двойном логарифмическом масштабе, на рис. 7 показаны в функции от частоты, а не от ее логарифма. Можно видеть, что в области частот $\omega\nu/U_\tau^2 > 0.2$ наблюдается тенденция к линейной зависимости логарифма спектра от частоты (пунктирная линия), что свидетельствует скорее об экспоненциальной, а не о степенной форме спектра. Результаты расчета по формуле (6), показанные на рис. 7 сплошной линией, также весьма близки к экспоненте. Разумеется, что на разных участках экспоненты ее можно аппроксимировать степенными зависимостями типа ω^{-m} с нарастающим показателем степени m по мере увеличения частоты.

На рис. 8 показаны результаты измерений среднеквадратичных значений $\langle p^2\rangle^{1/2}$ турбулентных давлений, полученные в работах [4, 13, 14, 16, 22, 24, 25, 27]. Там же сплошной линией показаны результаты расчета, полученные интегрированием по частоте спектра (6). Пунктирная линия соответствует зависимости, предложенной в [22]. Опытные и расчетные данные свидетельствуют о том, что с ростом числа Рейнольдса отношение $\langle p^2\rangle^{1/2}/\tau_w$ увеличивается.

Таким образом, можно видеть, что разработанная схема расчета согласуется с известными опытными данными и может быть использована с помощью формул (6) или (18) для прогноза частотных спектров турбулентных давлений при разных числах Рейнольдса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bull M.K.* Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers: some reflectionson forty years of research // J. Sound and Vibr. 1996. V. 190. № 3. P. 299–315.
2. *Keith W.L., Hurdis D.A., Abraham B.M.* A comparison of turbulent boundary layer wall-pressure spectra // Trans. Amer. Sos. J. Fluids Eng. 1992. V. 114. P. 338–347.

3. *Kim J.* On the structure of pressure fluctuations in simulated turbulent cannal flow // J. Fl. Mech. 1989. V. 205. P. 421–451.
4. *Choi H., Moin P.* On the spase-time characteristics of wall-pressure fluctuations // Phys. Fluids, A 1990. V. 2. № 8. P. 1450–1460.
5. *Kraichnan R.H.* Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. № 3. P. 378–390.
6. *Panton R.L., Lineberger J.H.* Wall pressure spectra calculations for eguilibrium boundary layers // J. Fl. Mech. 1974. V. 65. P. 261–287.
7. *Blake W.K.* Mechanics of flow-induced sound and vibration. New York, Academic Press, 1986. 974 p.
8. *Ffowcs Williams J.E.* Surface-pressure fluctuations induced by boundary-layer flow at finite Mach number // J. Fl. Mech. 1965. V. 22, P. 507–519.
9. *Смольяков А.В.* Интенсивность акустического излучения турбулентного пограничного слоя на пластине // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 2. С. 251–256.
10. *Смольяков А.В.* Спектр квадрупольного излучения плоского турбулентного пограничного слоя // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 3. С. 420–425.
11. *Таунсенд А.А.* Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд. иностр. лит. 1959.
12. *Хинце И.О.* Турбулентность, ее механизм и теория. Физматлит, 1963.
13. *Schewe G.S.* On the structure and resolution of the wall-pressure fluctuations associated with turbulent boundary layer flow // J. Fl. Mech. 1983. V. 134. P. 311–328.
14. *Emmerling R.* The instantaneous structure of wall pressure under a turbulent boundary layer flow // Mitteilungen aus dem Max–Plank–Iinst. fur Stromungsforshung, 1973. № 9. P. 1–25.
15. *Farabee T.M.* An experimental investigation of wall pressure fluctuations beneath non-eguilibrium turbulent flow // David Tajlor Res. Center. Tech. Rep. 1986. № 86/047. P. 1–15.
16. *Bull M.K., Thomas A.S. W.* High freguency wall-pressure fluctuations in turbulent boundary layers // Fhys. Fluids 1976. V. 19. № 4. P. 597–599.
17. *Manoha E.* The wavenumbers-frequency spectrum of the wall pressure fluctuations beneath a turbulent boundary layer // Proc. AIAA Aeroacoustic Conf., 1996. P. 96–98.
18. *Ефимцов Б.М.* Критерий подобия спектров пристеночных пульсаций давления турбулентного пограничного слоя // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 1. С. 58–61.
19. *Keith W.L., Bennet J.C.* Low frequency measurementsof the wall shear stress and wall pressure in a turbulent boundary layer // J. AIAA 1991. V. 29. № 4. P. 526–530.
20. *Bull M.K.* Wall-pressure fluctuations associated with subsonic turbulent boundary layer flow // J. Fl. Mech. 1967. V. 28. № 4. P. 719–754.
21. *Willmarth W.W., Wooldridge C.E.* Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer // J. Fl. Mech. 1962. V. 14. № 2. P. 187–210.
22. *Farabee T.M., Casarella M.J.* Spectral features fluctuations beneath turbulent boundary layers // Phys. Fluids. A. 1991. V. 3. № 10. P. 2410–2419.
23. *Bradshaw P.* Inactive motion and pressure fluctuations in turbulent boundary layer // J. Fl. Mech. 1967. V. 30. P. 241–258.
24. *Blake W.K.* Turbulent boundary layer wall pressure fluctuations on smooth and rough walls // J. Fl. Meck. 1970. V. 44. P. 637–660.
25. *Lauchle G.C., Daniels M.A.* Wall-pressure fluctuations in turbulent pipe. flow // Phys Fluids. 1987. V. 30. № 10. P. 3019–3024.
26. *Chase D.M.* The character of the turbulent wall pressure spectrum at subconvenctive wavenumbers and a suggested comprehensive model // J. Sound and Vibr. V. 112. № 1. P. 125–147.
27. *Bull M.K., Langenheineken Th.* On the wall pressure field in turbulent pipe flow // Mitteilungen aus dem Max–Plank–Iinst. fur Stromungsforsh., 1981. № 73. P. 15–21.

Calculation of the Spectra of Pseudosound Wall-Pressure Fluctuations in Turbulent Boundary Layers

A. V. Smol'yakov

A simple method is developed for calculating the wall-pressure spectra in turbulent boundary layers. The method is based on the modeling of the wave-number spectrum of the sources that are caused by the interaction of the turbulence–mean shear type. The sources are described in the framework of the semiempirical theory of turbulence. The calculations reveal four characteristic frequency ranges; for these ranges, the specific features of the wall-pressure spectra are determined, and the most general ways of their scaling are found. The calculated spectra and rms values of pressure fluctuations are compared with the experimental data, and a good agreement between the calculations and the experiment is observed.