АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2000, том 46, № 3, с. 340–347

УДК 534.2

ИМПУЛЬС, РАДИАЦИОННОЕ ДАВЛЕНИЕ И ДРУГИЕ ВЕЛИЧИНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ (ЖИДКОСТИ) В НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

© 2000 г. Г. Г. Денисов

НИИ прикладной математики и кибернетики
603005 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10

Поступила в редакцию 23.07.98 г.

Исследуются вопросы, связанные с импульсом, радиационным давлением, плотностью звуковой энергии и ее потоком на основе решений конкретных задач в приближении первого и второго порядка в эйлеровых координатах. В частности, показано, что в сплошных средах возможно наличие импульса у распространяющегося возмущения при средней плотности среды в пространстве, занятом волной, не отличающейся от плотности невозмущенной среды. При этом импульс, связанный с ним перенос массы и возникающее радиационное давление обусловлены изменением профиля волны. Подтверждается точка зрения Н.Н. Андреева на выражение плотности энергии, отличающееся от общепринятого, и разрешаются некоторые другие парадоксальные результаты теории звука. Обсуждается корректность применения средних величин по времени и пространству.

Вопросы об импульсе, радиационном давлении, плотности звуковой энергии и ее потоке, связи между средними указанных величин появились давно и до сих пор не сходят со страниц научных изданий. На это было обращено внимание в работе Н.Н. Андреева [1], где разрешены многие принципиальные моменты проблемы звуковой акустики и, в частности, предложено отличающееся от общепринятого выражение для плотности звуковой энергии. Отметим, что и в настоящее время данная проблема не потеряла своей актуальности [1–12], и в ней еще имеется много необъясненных результатов. Так, например, в упомянутых работах имеются как утверждения об обязательном наличии импульса у волн [3, 8, 10], так и о полном его отсутствии [7, 9] или парадоксальный результат в одном из случаев распространения звуковой волны, когда средняя по времени плотность энергии в звуковом поле меньше плотности энергии в невозмущенной среде [2, 5]. Эти и другие вопросы разрешаются в данной статье на примере плоских движений идеального газа (жидкости), заключенного в трубу с единичной площадью сечения. Рассматриваются малые колебания газа, однако решения уравнений получены с точностью до второго порядка малости, что необходимо, так как многие из интересующих нас величин квадратичны. Кроме этого, из-за наличия секулярных членов во втором приближении использование результатов ограничено временем, которое должно быть меньше, чем время от начала процесса до образования разрыва. Ниже приведены решения ряда конкретных задач, причем некоторые известные задачи решены в несколько измененной постановке, получены мгновенные и осредненные значения искомых величин и результаты приведены для полноты картины.

Уравнения плоских движений идеальной жидкости (газа) в отсутствие внешних воздействий в эйлеровых координатах имеют вид

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad \rho v_t + \rho v v_x + p_x = 0, \qquad (1)$$

v – скорость течения в данной точке среды, ρ, p – плотность и давление. Умножая первое уравнение на v и складывая со вторым, получим

$$\rho_t + j_x = 0, \quad j_t + (j^2\rho^{-1} + p)_x = 0, \qquad (2)$$

где $j = \rho v$ – плотность импульса (количества движения). Эти уравнения проще, чем исходная система и более удобны, что будет видно из дальнейшего. Будет рассмотрен пакет волн в безграничной среде, его взаимодействие с отражающей стенкой, появление и развитие волновых движений газа при колебаниях поршня и другие задачи. Интересуясь решением с точностью до 2-го порядка, будем искать ρ и j в виде $\rho = \rho_0 + \rho' + \rho'' + \ldots$, $j = j' + j'' + \ldots$, где число штрихов соответствует порядку малости [1, 2]. Полагая давление однозначной функцией плотности, запишем уравнение Пуассона

$$p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma,$$
$$p(\rho) \approx p_0 + c_0^2\rho' + \frac{1}{2}c_0^2(\gamma-1)\rho_0^{-1}\rho'^2 + c_0^2\rho'', \qquad (3a)$$

где γ – показатель адиабаты, $c_0^2 = (\partial p/\partial\rho)_{\rho=\rho_0}$ – квадрат скорости звука. Запишем уравнения пер-

вого приближения и очевидное решение

$$\rho_t' + j_x' = 0; \quad j_t' + c_0^2\rho_x' = 0,$$

$$\rho'/\rho_0 = f_1(\xi = x + c_0t) + f_2(\eta = x - c_0t), \qquad (2')$$

$$j'/\rho_0 = -c_0 f_1(\xi) + c_0 f_2(\eta).$$

Здесь f_1 и f_2 – произвольные функции, характеризующие волны, бегущие соответственно влево и вправо с постоянной скоростью c_0 без изменения формы; модуль этих функций много меньше единицы. Ниже будет рассматриваться и случай $\gamma < 0$, что физически неприемлемо, так как приводит к падению давления при увеличении плотности. В этом случае можно принять (для $\gamma = -1$) [3]

$$p = p_0 + \rho_0 c_0^2(1 - \rho_0\rho^{-1}), \qquad (3б)$$

тогда полученные ниже результаты будут верны для любого знака γ.

1. *Бегущая волна в среде без границ.* Импульс пакета волн, бегущего влево и описываемого непрерывной функцией $f(x + c_0t)$, заданной на интервале $0 \le x + c_0t \le l$ и равной нулю на концах этого интервала и вне его, целиком определяется в соответствии с решением (2') отклонением плотности от равновесной и, в частности, если пакет волн заключен в момент времени t_1 между x_1 и $x_2 = x_1 + l$ и избыток массы пакета, равный $\rho_0\int_{x_1}^{x_2} f(x, t_1)dx > 0$, то его импульс $\int_{x_1}^{x_2} j'(x, t_1)dx < 0$, т.е. направлен в сторону движения волны. При недостатке массы импульс будет больше нуля, т.е. направлен против движения волны. Подобные заключения легко сделать и относительно волны, бегущей вправо. Итак, в первом приближении движение пакета волн, обладающего импульсом, сопровождается переносом массы в направлении, не обязательно совпадающем с направлением его распространения.

Уравнения второго приближения для пакета волн, бегущего влево:

$$\rho_t'' + j_x'' = 0, \quad j_t'' + c_0^2\rho_x'' =$$

$$= -\rho_0^{-1}\left(j'^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)c_0^2\rho'^2\right)_x = -\varepsilon c_0^2\rho_0(f^2(\xi))_x, \qquad (2'')$$

где $\varepsilon = 0.5(\gamma + 1)$.

Приведем решение, соответствующее начальным условиям для второго приближения, отличающимся от нуля лишь при $0 < x < l$:

$$\rho''(x, 0) = \rho_2^0(x), \quad j''(x, 0) = j_2^0(x),$$

$$\rho''(x, t) = \frac{\varepsilon}{4}\rho_0[-f^2(\xi) + 2c_0t[f^2(\xi)]_x + f^2(\eta)] +$$

$$+ \frac{1}{2}[\rho_2^0(\xi) + \rho_2^0(\eta) - c_0^{-1}j_2^0(\xi) + c_0^{-1}j_2^0(\eta)], \qquad (4)$$

$$j''(x, t) = \frac{\varepsilon}{4}c_0\rho_0[-f^2(\xi) + 2c_0t[f^2(\xi)]_x + f^2(\eta)] +$$

$$+ \frac{1}{2}[j_2^0(\xi) + j_2^0(\eta) - c_0\rho_2^0(\xi) + c_0\rho_2^0(\eta)].$$

Решения получены для произвольной непрерывной функции $f(x, t)$, обладающей непрерывными производными по x и t, с использованием характеристик $\xi = x + c_0t$, $\eta = x - c_0t$ и преобразованием уравнений (2'') к этим переменным; $t < t_p$ – время образования разрыва.

Из решений следует, что если в начальный момент $\rho_2^0(x) = 0$, $j_2^0(x) = 0$, пакет волн, движущийся влево, был представлен функцией $f(x)$, то с течением времени он распадается на группу волн, бегущих влево и изменяющих свой профиль (первые два члена), и волну, бегущую вправо (третий член). Причем если избыточная масса и импульс начального пакета, определяемые интегралом $\int_0^l f(x)dx$, были равны нулю, то образовавшиеся две группы волн имеют каждая в отдельности избыток (или недостаток) массы и импульс, определяемые интегралом от $f^2(x \pm c_0t)$, при равенстве нулю этих величин для всего волнового процесса. Это проявление законов сохранения массы и импульса всего волнового процесса.

Заметим, что противоположно бегущая волна не возникает, если

$$\frac{\varepsilon}{2}c_0\rho_0 f^2(x) + c_0\rho_2^0(x) + j_2^0(x) = 0. \qquad (5)$$

Учитывая это и исключая $j_2^0(x)$, будем иметь

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 f(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0 t[f^2(\xi)]_x + \rho_2^0(\xi),$$

$$j = -c_0\rho_0 f(\xi) - \qquad (4а)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0\{f^2(\xi) + c_0t[f^2(\xi)]_x\} - c_0\rho_2^2(\xi).$$

Приведем еще один вид формул при $\rho_2^0(x) = -\frac{\varepsilon}{2}\rho_0[xf^2(x)]_x$:

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 f(\xi) - \frac{\varepsilon}{2}\rho_0[xf^2(\xi)]_x;$$

$$j = -c_0\rho_0 f(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}c_0\rho_0 x[f^2(\xi)]_x. \qquad (4б)$$

Эти решения отличаются друг от друга во втором приближении, которое в первом случае содержит член $\sim t$, а во втором $\sim x$, однако поведение решений сходно, так как при движении волны $x \sim c_0t$.

Из (4а) и (4б) следует, что $\int_{x_1}^{x_2}(\rho' + \rho'')dx$ и $\int_{x_1}^{x_2} j\,dx$ не могут обращаться в нуль одновременно.

Эти формулы не дают той простой связи между импульсом и плотностью, как в первом приближении. Решения для волны, бегущей вправо, получим, сменив знак у c_0. Из полученных формул следует, во-первых, широко известный результат: волна не может распространяться без искажений (за счет члена, пропорционального t или x), кроме случая $\gamma = -1$. Во-вторых, нераспадающаяся волна с необходимостью имеет либо импульс, либо избыток (или недостаток) массы, либо и то и другое. Так, при $\rho_2^0(x) = -\varepsilon/2\rho_0 f^2(x)$ пакет волн не имеет импульса при недостатке массы.

Обратим внимание на еще один немаловажный факт, следующий из формул (4а). В случае $\rho_2^0(x) = 0$ и $\int_0^l f(x)dx = 0$ пакет обладает нулевой избыточной массой, так как $\int_0^l [f^2(x)]_x dx = 0$ в силу $f(0) = f(l) = 0$ и, вместе с этим, имеет отличный от нуля импульс, равный

$$\int_0^l j''(x)dx = -\frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0 \int_0^l f^2(x)dx. \qquad (6)$$

Возникает вопрос, как может пакет волн без избытка массы переносить ее, поскольку имеется отличный от нуля импульс? Разрешим этот парадокс. Подсчитаем импульс среды в границах x_1, x_2, в которой справа налево движется пакет волн с передним фронтом в точке $x = -c_0 t$ и задним фронтом в точке $x = l - c_0 t$, так, что $x_1 \le -c_0 t$, $l - c_0 t \le x_2$. Центр масс x_c этой части среды найдем из формулы

$$\rho_0(x_2 - x_1)x_c = \int_{x_1}^{x_2} x\rho(x,t)dx.$$

Подставив сюда плотность из (4а) при $\rho_2^0 = 0$, будем иметь

$$\rho_0(x_2 - x_1)x_c = \frac{1}{2}\rho_0(x_2^2 - x_1^2) + \rho_0\int_0^l z f(z)dz - \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0 t\int_0^l f^2(z)dz.$$

Отсюда следует, что наличие движущейся в пределах x_1, x_2 волны с нулевым средним приводит в первом приближении лишь к постоянному смещению центра масс рассматриваемой части среды, а скорость центра масс дается вторым приближением целиком и обусловлена изменением профиля волны:

$$\rho_0 l\dot{x}_c = -\frac{\varepsilon}{2}c_0\rho_0\int_0^l f^2(z)dz,$$

что полностью совпадает с импульсом (6). Полученный результат распространяется и на волны конечной амплитуды.

Таким образом, несмотря на отсутствие избытка массы, импульс пакета тоже связан с ее переносом за счет перераспределения плотности относительно пакета, т.е. за счет изменения его профиля. Импульс пропорционален $\gamma + 1$, более плотные участки обладают большей скоростью, чем менее плотные [4], поэтому его направление совпадает с направлением распространения пакета, если $\gamma > -1$. Несовпадение направлений импульса и скорости распространения пакета волн при недостатке массы и особенно наличие импульса при нулевом избытке массы пакета существенно отличают связь между импульсом и скоростью в дискретных системах и сплошных средах, причем если в дискретной системе аналогом первого факта может служить отрицательная масса, то второму факту аналога нет, он присущ только распределенной системе и обусловлен ее нелинейностью, знак эффекта определяется знаком $\gamma + 1$. Заметим, что при $\gamma = -1$ уравнения в лагранжевых координатах линейны [2] и волны распространяются без искажения, равно как и в эйлеровых, поэтому второй отмеченный факт в этом случае не имеет места и бегущая волна с нулевой избыточной массой не имеет импульса [12].

Следует заметить, что для определения импульса (6) недостаточно первого приближения в отличие от [4], где рассмотрена волна, занимающая конечную область трехмерного пространства, и использовано постоянство потенциала скорости вне волны. В случае плоских волн потенциалы скорости перед волной и позади нее различны.

Итак, наличие или отсутствие импульса у волны в безграничной среде определяется начальными условиями, причем волна без начального импульса и без избытка массы распадается на две противоположно бегущие. Утверждение Бриллюэна об отсутствии импульса у волн [7] объясняется тем, что он рассматривал бегущую синусоидальную волну, т.е. волну неизменного профиля.

2. *Взаимодействие пакета волн произвольной формы и отражающей непроницаемой стенки.* Пусть стенка находится при $x = 0$ и в начальный момент времени пакет волн расположен в области $x_0 < x < l + x_0$ и движется в направлении стенки. При $x_0 \le c_0 t \le x_0 + l$ происходит взаимодействие пакета волн и стенки, а при $x_0 + l \le c_0 t$ сформировавшийся отраженный пакет волн движется, удаляясь от стенки. Поскольку стенка непроницаема,

запишем условие $j(0, t) = 0$. Для решения этой краевой задачи воспользуемся известным приемом и рассмотрим симметричную относительно $x = 0$ безграничную задачу, в которой $j(x, t) = -j(-x, t)$, $\rho(x, t) = \rho(-x, t)$, а начальные значения $j_0(x)$ и $\rho_0(x)$ взяты такими, что возбуждаются нераспадающиеся пакеты волн, симметрично расположенные по отношению к стенке и бегущие в направлении к ней. Решение этой задачи запишем в виде

$$j = +\rho_0 c_0 \left\{ -f(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} f^2(\xi) - \frac{\varepsilon}{2}[f^2(\xi)]_x c_0 t - \right.$$

$$- \rho_0^{-1}\rho_2^0(\xi) + f(\eta) + \frac{\varepsilon}{2} f^2(\eta) - \frac{\varepsilon}{2}[f^2(\eta)]_x c_0 t +$$

$$\left. + \rho_0^{-1}\rho_2^0(\eta) + \frac{1}{4}(3-\gamma)[f_x(\eta)F(\xi) - f_x(\xi)F(\eta)] \right\};$$

$$\rho = \rho_0 \left\{ 1 + f(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}[f^2(\xi)]_x c_0 t + \rho_0^{-1}\rho_2^0(\xi) + f(\eta) - \right.$$

$$- \frac{\varepsilon}{2}[f^2(\eta)]_x c_0 t + \rho_0^{-1}\rho_2^0(\eta) +$$

$$\left. + \frac{1}{4}(3-\gamma)[f_x(\eta)F(\xi) + f_x(\xi)F(\eta) + 2f(\xi)f(\eta)] \right\}, \quad (7)$$

где $x_0 \le \xi \le l + x_0$, $-l - x_0 \le \eta \le -x_0$, $F_z(z) = f(z)$, $\rho_2^0(x, 0)$ – начальные условия для второго приближения $j(0, t) = 0$ в силу четности функций $f(x, t)$ и $\rho_2^0(x, 0)$ относительно $x = 0$.

Решения для $j(x, t)$ и $\rho(x, t)$ могут трактоваться двояко: 1) как описание волнового процесса сближающихся пакетов волн при $0 \le c_0 t \le x_0$, когда их области не перекрываются и поэтому последние члены, содержащие произведения из функций от ξ и η, равны нулю, взаимодействие пакетов волн при $x_0 \le c_0 t \le l + x_0$, когда все члены решений отличны от нуля, и, наконец разбегающихся пакетов волн при $x_0 + l \le c_0 t$, когда последние члены решений снова исчезают; 2) как описание набегающего на стенку пакета волн, расположенного целиком справа от нее при $0 \le c_0 t \le x_0$, когда следует учитывать только члены, зависящие от ξ, взаимодействие пакета волн со стенкой при $x_0 \le c_0 t \le x_0 + l$ (учитываются все члены при $0 < x$) и удаляющегося от стенки после отражения пакета волн при $l + x_0 \le c_0 t$, когда следует учитывать только члены, зависящие от η.

Подставляя $\rho(0, t)$ в формулу (3а), получим значение давления волн на стенку в любой момент времени и суммарное воздействие:

$$\int_{x_0/c_0}^{(x_0+l)/c_0} p(0, t)dt =$$

$$= [2\rho_0 \overline{f(c_0 t)} + \varepsilon\rho_0 \overline{f^2(c_0 t)} + 2\overline{\rho_2^0(c_0 t)}]c_0 l.$$

Вычислим теперь начальный импульс пакета волн при $x > 0$:

$$G(x, 0) = \int_{x_0}^{l+x_0} j(x, 0)dx =$$

$$= -\left[\rho_0 c_0 \overline{f(x)} + \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0 \overline{f^2(x)} + c_0 \overline{\rho_2^0(x)}\right] l.$$

Таким же по величине, но с противоположным знаком, будет импульс отраженного пакета $G(x, t_1)$ для $x_0 + l < c_0 t_1$ и $0 < x$, когда $G(x, t_1) - G(x, 0)$ совпадает с суммарным силовым воздействием на стенку волнового пакета. В случае волны без избытка плотности ее импульс и воздействие на стенку зависят от длины пакета волн, вида начального возмущения $f(x, 0)$ и нелинейных свойств среды. При $1 + \gamma > 0$ волна давит на стенку, а при $1 + \gamma < 0$ давление на стенку отрицательное.

Эта задача, кроме того, что имеет самостоятельное значение, является непосредственным подтверждением высказывания Рэлея о том, что если пакет волн оказал суммарное давление на стенку, то это может быть только тогда, когда он имеет импульс [12]. В работе [9] это высказывание объявлено ошибочным.

3. *Возбуждение волн в газе движущимся поршнем.* Будем рассматривать движение газа как справа, так и слева от поршня, находившегося при $t = 0$ в начале системы координат и скорость которого, как и скорость газа, всюду были равны нулю, следовательно, для всех x $j(x, 0) = 0$, $\rho(x, 0) = \rho_0$. Выведем краевые условия, рассматривая задачу при малых колебаниях поршня. Скорость v газа в месте нахождения $s(t)$ поршня должна быть равной его скорости:

$$v(s(t), t) = \dot{s}(t) \approx v'(0, t) + v''(0, t) + v_x'(0, t)s(t).$$

Учитывая соотношение $j(x, t) \simeq (\rho_0 + \rho')(v' + v'')$, найдем

$$j'(0, t) = \rho_0 \dot{s}(t);$$

$$j''(0, t) = -j_x'(0, t)s(t) + \rho'(0, t)\dot{s}(t).$$

Уравнения первого приближения, краевые и начальные условия таковы:

$$\rho_t' + j_x' = 0; \quad j_t' + c_0^2\rho_x' = 0;$$

$$j'(0, t) = \rho_0\dot{s}(t); \quad 0 \le t \le \infty,$$

$$\dot{s}(0) = 0; \quad j'(x, 0) = 0; \quad \rho'(x, 0) = 0,$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Для второго приближения

$$\rho_t'' + j_x'' = 0;$$

$$j_t'' + c_0^2\rho_x'' = -\frac{1}{2}[c_0^2\rho_0^{-1}(\gamma - 1)\rho'^2 + j'^2\rho_0^{-1}]_x,$$

$$j''(0, t) = \rho'(0, t)\dot{s}(t) - j_x'(0, t)s(t); \quad j''(x, 0) = 0.$$

Решение задачи первого приближения:

$$j' = \Theta(x)\rho_0 s_t(z_-) + \Theta(-x)\rho_0 s_t(z_+),$$

$$c_0\rho' = \Theta(x)\rho_0 s_t(z_-) - \Theta(-x)\rho_0 s_t(z_+),$$

где $z_\pm = t \pm x/c_0$, $\Theta(x)$ – единичная функция и $\Theta(0) = 1/2$.

Решение представляет собой две одинаковых исходящих из точки $x = 0$ волны, распространяющихся в разные стороны, с передним фронтом волны, бегущей вправо (влево), в точке $x = c_0t(-c_0t)$.

Уравнения 2-го приближения для волны, бегущей вправо:

$$\rho_t'' + j_x'' = 0;$$

$$j_t'' + c_0^2\rho_x'' = -\varepsilon\rho_0[s_t^2(z_-)]_x, \quad 0 \le x \le c_0t.$$

Для волны, бегущей влево, при $-c_0t \le x \le 0$, надо сменить c_0 на $-c_0$.

Начальные условия: $j''(x, 0) = 0$, $\rho''(x, 0) = 0$. Краевые условия с учетом решения первого приближения приводятся к виду

$$j''(0, t) = \rho_0 c_0^{-1}[s(t)s_t(t)]_t = R_t(t).$$

Решение задачи для волны, бегущей вправо:

$$j' + j'' = \rho_0 s_t(z_-) - \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0^{-1} x[s_t^2(z_-)]_x + R_t(z_-),$$

$$\rho' + \rho'' = \rho_0 c_0^{-1} s_t(z_-) - \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0^{-2}[xs_t^2(z_-)]_x + c_0^{-1}R_t(z_-);$$

для волны, бегущей влево, следует сменить знак перед c_0.

К ρ', j' добавляются решения в виде волн с увеличивающейся по мере роста x амплитудой, пропорциональной $\gamma + 1$, и волн, определяемых движением поршня через функцию $R_t(t)$. Члены, пропорциональные x, приводят к искажению профиля волн и именно они обусловливают вместе с членами первого порядка импульс волн. Если движение поршня прекращается при некотором $t = T$, то в этот момент формируются два пакета волн, бегущих в разные стороны. При $t > T$ их передние фронты находятся на расстояниях $x = \pm c_0t$, а задние на расстояниях $x = \pm c_0(t - T)$. Подсчитаем импульс и избыток массы этих пакетов для произвольного движения $s(t)$ поршня при условиях $s(0) = 0$; $s(t \ge T) = s(T)$; $s_t(0) = s_t(T) = 0$:

$$\int_{x_1}^{x_2}(j' + j'')dx = \rho_0 c_0 s(T) \pm \frac{\varepsilon}{2}\rho_0\int_0^T s_t^2(\tau)d\tau,$$

$$\int_{x_1}^{x_2}(\rho' + \rho'')dx = \pm\rho_0 s(T),$$

где $x_1 = +c_0(t - T)$, $x_2 = c_0t$ для $x > 0$ и $x_1 = -c_0t$, $x_2 = -c_0(t - T)$ для $x < 0$. Верхний (нижний) знак соответствует пакету, находящемуся при $x > 0 (x < 0)$ и бегущему вправо (влево). Импульс в первом приближении определяется результирующим смещением $s(T)$ поршня. При этом газовая среда как справа, так и слева получает одинаковый импульс, направленный в сторону смещения поршня, несмотря на то, что пакеты волн движутся в разные стороны. Избыток плотности тоже определяется смещением поршня $s(T)$ и для волн, бегущих в разных направлениях, имеет разные знаки. При $s(T) > 0$ происходит сжатие среды справа от поршня и разрежение слева от него.

Второе слагаемое в формулах для импульса обусловлено членами второго порядка малости. Однако при $s(T) = 0$, т.е. в случае, когда поршень прекратил движение в исходной точке, или когда T велико, эта часть импульса становится доминирующей. Она всегда направлена в сторону распространения пакета волн, если $\gamma + 1 > 0$, и против при $\gamma + 1 < 0$. Найдем условия, при которых второе слагаемое в формуле для импульса много больше первого. Для колеблющегося поршня по закону

$$s(t) = a(1 - \cos\omega t) \text{ при } 0 \le t \le n\pi/\omega = T;$$

$$s(t) = s(T) \text{ при } T < t.$$

Здесь полное время движения поршня равно целому числу полупериодов его колебаний. Импульсы пакетов волн при нечетном n будут равны

$$G_\pm = 2\rho_0 c_0 a \pm \frac{\varepsilon}{4}\rho_0\omega^2 a^2 T$$

и искомые условия приводятся к виду $n \gg 8c_0/\pi\varepsilon a\omega$. Оценка показывает, что даже для очень мощных излучателей это отношение велико и пренебрегать первым слагаемым можно только для длинных цугов волн. При $s(T) = 0$ генерируются пакеты волн без избыточной массы, но с отличным от нуля импульсом. Это находится в полном соот-

ветствии с результатами пункта 1 и обусловлено изменением профиля волн. Поток массы через произвольное сечение x за время между приходом пакета волн t_1 и окончанием t_2 равен нулю, т.е. $\int_{t_1}^{t_2} j(x, t)dt = 0$.

Результаты этой задачи сопоставимы с решением Ирншоу [2] и [5]. Подчеркнем здесь существенное различие средних. Если $\overline{j(x)}^t T$ – масса среды, прошедшая через сечение x за время T, то $\overline{j(x)}^x l$ – импульс пакета волн длины l в момент времени t, которому соответствует перенос массы внутри пакета.

4. *Две неподвижные стенки.* Рассмотрим колебания газа при следующих краевых и начальных условиях:

$$j(0, t) = j(l, t) = 0,$$

$$\rho(0, x) = \rho_0 + \rho_0 ak\cos kx, \quad j(0, t) = 0,$$

где $\sin kl = 0$, $ak \ll 1$, $c_0 = \omega/k$. Тогда

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 ak\cos kx\cos\omega t + \frac{\rho_0 a^2 k^2}{4}\cos 2kx \times$$

$$\times[(2-\varepsilon)(1-\cos 2\omega t) - \varepsilon\omega t\sin 2\omega t],$$

$$j = \rho_0 a\omega\sin kx\sin\omega t + \frac{\rho_0 a^2 k\omega}{4}\sin 2kx \times$$

$$\times\left[\left(\frac{3}{2}\varepsilon - 2\right)\sin 2\omega t + \varepsilon\omega t\cos 2\omega t\right].$$

При этом среднее радиационное давление $\overline{\Pi}^t = \overline{p + \rho v^2}^t$ равно

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\Pi(x, t)dt =$$

$$= p_0 + \frac{\varepsilon\rho_0 a^2\omega^2}{4}\left(1 + \frac{\cos 2\omega t_0}{2}\cos 2kx\right).$$

Здесь τ – время осреднения, равное целому числу периодов колебаний газа. Как видим, среднее радиационное давление имеет постоянную и меняющуюся в пространстве составляющие [2], однако последняя зависит от начала процесса осреднения t_0 и целиком определяется секулярным членом решения $\rho(x, t)$. Это значит, что зависимость среднего давления от x обусловлена нестационарностью колебаний.

Практически, при проведении серии экспериментов величину t_0 можно считать случайной и отбросить последний член в формуле, давление будет везде постоянным и совпадать с [12]. В [2] (с. 200) ставится под сомнение результат данной задачи из-за неустойчивости в идеальном газе начальной формы колебаний, однако при выполнении принятых идеализаций и в ограниченное время можно считать результат верным. Заметим еще, что импульс $\int_0^l j(x, t)dx = \rho_0 ac_0(1-\cos kl)\sin\omega t$ либо отличен от нуля в первом порядке и периодически изменяется (при $\cos kl = -1$), либо всегда равен нулю (при $\cos kl = 1$). Следовательно, давление в замкнутом объеме, полностью занятом колеблющейся средой, не связано с импульсом, а обусловлено нелинейностью системы уравнений ($\gamma \neq -1$) и реакцией стенок.

5. *К вопросу о звуковой энергии.* В книге [2] приведены два выражения плотности E звуковой энергии. В квадратичном приближении

$$E_2 = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c_0^2\rho'^2}{2\rho_0} + \frac{c_0^2}{\gamma - 1}(\rho' + \rho''),$$

$$E_{2A} = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c_0^2\rho'^2}{2\rho_0} + \frac{c_0^2}{\gamma}(\rho' + \rho'').$$

Первое из этих выражений – обычно принятое, а второе предложено Н.Н. Андреевым [1]. Заметим, что в случае неизменного объема V_0 $\int_{V_0}(\rho' + \rho'')dV = 0$, поэтому для подсчета полной звуковой энергии можно считать плотность по двум первым одинаковым членам приведенных выражений. Однако в общем случае (изменяющихся поверхностей или при подсчете энергии в части объема) усеченным выражением плотности пользоваться нельзя. Обычно за плотность потенциальной энергии принято считать разность плотностей возмущенной и невозмущенной среды $w = \rho u - \rho_0 u_0$, где u – потенциальная энергия единицы массы. Но поскольку плотность есть отношение энергии к рассматриваемому объему, такое определение справедливо лишь в случае неизменного объема при появлении возмущения. Н.Н. Андреев предложил другое определение плотности звуковой энергии, потенциальная часть которой

$$w_A \approx (\rho u V - \rho_0 u_0 V_0)/V$$

равна разности энергий при наличии звука в среде и в его отсутствие, отнесенной к возмущенному объему. При этом рассматривается часть среды с фиксированной массой m, занимающей объем V_0 и V до и после возмущения, так что $\rho V = \rho_0 V_0 = m$. При достаточно малой массе (и малом объеме) можно считать w_A плотностью в точке x в момент времени t. С учетом последнего соотношения $w_A(x, t) = \rho(u - u_0)$; $w_A = w$ при $V = V_0$. Добавляя кинетическую энергию, используя известное выражение $u(\rho)$ [2, 4] и ограничиваясь вторым порядком малости, получим E_2 и E_{2A}. Настораживает

очень сильный рост E_2 при $\gamma \longrightarrow 1$. В работе [1] вывод плотности E_A звуковой энергии приведен в общем случае. Поскольку до сих пор не разрешен вопрос в пользу того или иного определения E, можно, опираясь на решения, разрешить этот спор. Различие существенно и обнаруживается даже в первом порядке! Это значительно облегчает задачу. В качестве примера обратимся к результатам задачи 3 с решением $\rho' = \rho_0 c_0^{-1} s_t(t - x/c_0)$. В этой задаче вся энергия волны, бегущей вправо, определяется в первом приближении работой сил давления p_0 на стенку и ее смещением $s(T)$ и равна $p_0 s(T) = (c_0^2 \rho_0/\gamma)s(T)$, где T – время остановки поршня. С другой стороны, эта энергия может быть получена интегрированием по x плотности энергии образовавшейся волны. Взяв плотность энергии по Андрееву, будем иметь

$$\int_0^{c_0 t} \frac{c_0^2}{\gamma}\rho' dx = \frac{c_0\rho_0}{\gamma}\int_0^{c_0 t} s_t(t - x/c_0)dx = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}s(T) \quad (T < t).$$

Совпадение результатов вычислений энергии подтверждает верность выражения плотности энергии по Андрееву. Тот же результат был получен при подсчете возмущенной энергии при равноускоренном движении поршня в неограниченной трубе для малых ρ', v' в точно решенной задаче [4], стр. 531.

Представляет интерес случай отсутствия потока массы $\bar{j}^t = 0$. Это имеет место в задаче 3 при $\bar{s}_t^t = 0$. Возьмем, например, решение для волны, бегущей вправо, и подсчитаем среднюю по времени плотность энергии по обычной формуле. Имеем

$$\bar{E}^2 = \rho_0 \overline{s_t^2}(t - x/c_0) - \frac{\varepsilon\rho_0}{2(\gamma-1)}\bar{s}_t^2 = \frac{3\gamma - 5}{4(\gamma-1)}\rho_0 \overline{s_t^2}.$$

Этот результат вызывает большое недоумение, так как для $1 < \gamma < 5/3$, т.е. для большинства газов, энергия в звуковом поле меньше энергии в невозмущенной среде, что приведет к ее неустойчивости. На этот результат обращено внимание в работах [2, 5], где по-разному трактуются его причины. Парадокс разрешается, если принять плотность энергии по Андрееву. Расчет дает $\bar{E}_{2A}^t = \frac{3\gamma - 1}{4\gamma}\overline{s_t^2} > 0$ для всех газов.

6. *К вопросу о средних величинах.* Обычно наибольший интерес представляют не мгновенные значения величин, характеризующих волновой или колебательный процесс, а их средние по времени значения. Часто средние по времени и пространству совпадают, однако, например, в случае волн с изменяющимся профилем это не так. Для выяснения вопроса о том, каким из средних следует пользоваться, рассмотрим уравнение, связывающее плотность энергии и ее поток q.

$$E_t + q_x = 0, \quad \int_{x_1}^{x_2}[E(x, t_2) - E(x, t_1)]dx + \int_{t_1}^{t_2}[q(x_2, t) - q(x_1, t)]dt = 0.$$

Рассмотрим ситуацию, при которой слева направо распространяется волновое возмущение так, что его передний фронт при $t = t_1$ находится в сечении x_1, а при $t = t_2$ в сечении x_2. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, t_2)dx = \int_{t_1}^{t_2} q(x_1, t)dt,$$

$$(x_2 - x_1)\bar{E}^x = (t_2 - t_1)\bar{q}^t,$$

откуда с учетом $x_2 - x_1 = c_0(t_2 - t_1)$ получим $c_0\bar{E}^x = \bar{q}^t$. Таким образом, широко распространенная формула $c_0\bar{E}^t = \bar{q}^t$ непригодна для волн с изменяющимся профилем, и для расчета энергии в заданном объеме следует пользоваться ее пространственной плотностью или ее средним по времени потоком через заданную поверхность. Сказанное касается и уравнений

$$\rho_t + j_x = 0, \quad j_t + \Pi_x = 0,$$

где при подсчете массы и потока массы (первое уравнение) надо пользоваться средними $\bar{\rho}^x$, $\bar{j}^t$, а при подсчете импульса и радиационного давления (второе уравнение) следует использовать $\bar{j}^x$, $\bar{\Pi}^t$. Приведем еще формулу, выражающую радиационное давление через плотность кинетической энергии при неизменном расстоянии между стенками (задача 4) и в случае подпружиненных стенок

$$\bar{\Pi}''^t = \varepsilon\bar{\bar{E}}_k, \quad \bar{\Pi}''^t = \varepsilon\bar{\bar{E}}_k rl/(rl + \rho_0 c_0^2).$$

Отметим сильную зависимость радиационного давления от жесткости r пружины.

7. *Основные результаты.* Наличие импульса у изолированной волны определяется начальными условиями. Волна без избытка или недостатка плотности имеет импульс, направленный в сторону ее движения при $\gamma + 1 > 0$, обусловленный нелинейностью. Признаком наличия импульса является изменение ее профиля. Необходимым следствием прохождения в среде волны, обладающей импульсом, является перенос массы.

Следует отличать причины появления радиационного давления в случае замкнутого объема, целиком заполненного колеблющейся средой, и в случае изолированной волны, действующей на отражающее препятствие.

В невозмущенном газе давление $p_0 = p(\rho_0)$ в соответствии с законом Пуассона. При появлении звуковых колебаний периодически изменяющиеся плотность ρ' и скорость v' приводят в силу нелинейной зависимости $\Pi(\rho, v) = p(\rho) + \rho v^2$ к увеличению среднего давления при $\gamma > -1$, т.е. к появлению радиационного давления $\overline{\Pi - p_0}^t$. И если ограничивающие газ поверхности сдерживаются усилиями с конечной жесткостью, то происходит увеличение объема газа. При этом радиационное давление определяется плотностью кинетической энергии газа, жесткостью сдерживающих стенки объема усилий и никак не связано с полным импульсом газа. Здесь имеется полная аналогия с тепловым расширением тел, обусловленным нелинейностью межатомных связей.

В случае же изолированного волнового пакета радиационное давление на отражающее препятствие целиком определяется изменением импульса пакета (как и принято считать).

Автор признателен В.А. Звереву за постановку доклада на его семинаре и полезные обсуждения результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (96-01-00927, 99-01-00061).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Н.Н.* О некоторых величинах второго порядка в акустике // Акуст. журн. 1955. Т. 1. Вып. 1. С. 3–11.
2. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
3. *Рэлей.* Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 2. 475 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
5. *Островский Л.А.* Величины второго порядка в бегущей звуковой волне // Акуст. журн. 1968. Т. 14. Вып. 1. С. 82–89.
6. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 236 с.
7. *Brilloin L.* Sur les tensions de radiation // Annale de Physique. 1925. V. 4. P. 528–586.
8. *Кадомцев Б.Б., Рыдник В.И.* Волны вокруг нас. М.: Знание, 1981. 150 с.
9. *Мак-Интайр М.* Миф о волновом импульсе. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. 500 с.
10. Физическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1988. Т. 1. С. 315.
11. *Денисов Г.Г.* О волновом импульсе и усилиях, возникающих на границе одномерной упругой системы // МТТ. 1994. № 1. С. 42–51.
12. Rayleigh, on the momentum and pressure of gasseous of vibrations and on the connection with virial theorem // Phil. Mag. 1905. T. 10. P. 364–374.

Momentum, Radiation Pressure, and Other Second-Order Quantities in Ideal Gas (Liquid) in Some Boundary-Value Problems

G. G. Denisov

Problems related to such properties of sound waves as momentum, radiation pressure, and sound energy density and flux are investigated on the basis of the solutions of particular problems in the first- and second-order approximations using the Eulerian representation. Specifically, it is shown that a disturbance propagating in a continuous medium may have a nonzero momentum when the average density of the medium in the volume occupied by the wave coincides with the density of the undisturbed medium. In this case, the momentum and the related mass transfer and radiation pressure are caused by variations in the wave profile (envelope). Andreev's expression for the energy density that differs from the commonly used one is verified, and some other paradoxical consequences of the theory of sound are considered. The correctness of using the quantities averaged over time and space is discussed.