АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 3, с. 414–417

УДК 534.22

О ДИФФУЗИИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЗВУКА

© 1999 г. А. И. Филиппов, К. А. Филиппов*

Физико-математический факультет Стерлитамакского государственного педагогического института
453103, Стерлитамак, пр. Ленина, 37; e-mail: root@sgpiphy.str.ru; filippovai@mail.ru
** Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова*
119899 Москва, Воробьевы горы; e-mail: filippov@mail.ru

Поступила в редакцию 18.11.97 г.

Рассмотрены явления переноса, инициированные акустическим полем в среде. Показано, что значения коэффициентов переноса возрастают даже в случае распространения плоской волны в однородной среде. Полученные спектральные представления позволяют построить выражения коэффициентов трансцилляторного переноса, обусловленного звуковыми колебаниями, для различных волновых пакетов.

Экспериментально установлено, что при воздействии акустических полей в сложных средах возрастают значения коэффициентов переноса. В работе [1] обнаружено значительное увеличение коэффициента теплопроводности при воздействии акустических полей на пористые среды. Физический механизм этого явления, видимо, достаточно сложен, и до настоящего времени нет полной теории этого явления. Одним из механизмов, объясняющих явление возрастания коэффициентов переноса, является так называемый трансцилляторный перенос [2, 3, 4]. Суть этого механизма проявляется в увеличении потока за счет относительного смещения участков среды, вызываемого акустическими полями. Трансцилляторный (transfer + oscillator) перенос относится к диффузионно-конвективным процессам, возникающим при колебательном относительном перемещении участков или частей среды. Изучение диффузионно-конвективных процессов ведется интенсивно в связи с разработкой моделей турбулентной диффузии [5]. Отметим, что турбулентная диффузия более сложна, поскольку поле скоростей в этом случае содержит не только колебательные составляющие. Теория явления трансцилляторного переноса приводит к уравнениям в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Ниже рассматривается простейший случай однородной среды, находящейся под воздействием плоской немонохроматической волны.

Уравнение, описывающее эволюцию скалярного параметра n (массовая плотность, температура, плотность заряда и т.п.) в однородной изотропной среде, представляется в виде

$$D\Delta n - \frac{\partial n}{\partial t} = \mathbf{U}\nabla n. \qquad (1)$$

Оно учитывает диффузионные и конвективные процессы, возникающие за счет смещений в волновой зоне. Здесь D – диффузный коэффициент, $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ – поле скоростей в волновой зоне, Δ – оператор Лапласа, ∇ – оператор набла.

Получение аналитических решений уравнения (1) для волновых полей затруднено вследствие сложной зависимости скорости колебаний от координат и времени. Поэтому для простоты полагаем, что волна является поперечной и распространяется вдоль оси Ox со скоростью v, а отличными от нуля являются две координаты скорости колебаний среды $U_y(x, t)$ и $U_z(x, t)$. Считаем также, что составляющие градиента скалярного поля Γ_y и Γ_z являются постоянными. Построение простой решаемой модели при этих предположениях сводится к отысканию решений вида

$$n(x, y, z, t) = n'(x, t) - \Gamma_y y - \Gamma_z z. \qquad (2)$$

Правая часть (1) в этом случае представляет известные источники, а наличие сложных функций U_y и U_z не препятствует построению аналитического решения.

Сначала рассмотрим случай монохроматической волны с частотой ω. Для плоской упругой поперечной волны, распространяющейся вдоль оси Ox, с плоскостью колебаний, параллельной оси Oy, имеем:

$$U_y(x, t) = A\omega\sin(\omega t - kx), \quad U_z = 0, \quad k = \frac{\omega}{v}. \qquad (3)$$

Решение задачи Коши для соответствующего неоднородного уравнения относительно $n'(x, t)$ с однородным начальным условием $n'|_{t=0} = 0$ с использованием метода функций Грина представляется в виде

$$n' = \frac{\Gamma_y}{2\sqrt{\pi D}}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t U_y(x', t')\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4D(t-t')}\right\}\times \qquad (4)$$
$$\times (t-t')^{-1/2} dt'.$$

Подставив (3) в (4), после вычисления интегралов имеем

$$n' = \frac{\Gamma_y A\omega}{2i}\left\{\exp(-ikx)\frac{\exp(i\omega t)-\exp(-k^2Dt)}{k^2D+i\omega} - \right. \\ \left. -\exp(ikx)\frac{\exp(-i\omega t)-\exp(-k^2Dt)}{k^2D-i\omega}\right\}. \quad (5)$$

Для достаточно больших времен $t \gg \frac{1}{k^2D}$ из (5) получим

$$n' = \frac{\Gamma_y A\omega}{k^4D^2+\omega^2}\times \\ \times[k^2D\sin(\omega t-kx)-\omega\cos(\omega t-kx)]. \quad (6)$$

Поток вдоль оси Oy складывается из диффузного и конвективного:

$$j_y = -D\frac{\partial n}{\partial y} + cU_y n, \quad (7)$$

где c – коэффициент, зависящий от типа переносимой величины. Рассмотрим конвективную составляющую потока

$$j_y^{\text{конв}} = cU_y n' = \frac{\Gamma_y cA^2\omega^2}{k^4D^2+\omega^2}\times \\ \times\{k^2D\sin^2(\omega t-kx)-\omega\cos(\omega t-kx)\sin(\omega t-kx)\}. \quad (8)$$

Осреднение выражения (8) по периоду колебаний приводит к следующему выражению для потока:

$$\langle j_y^{\text{конв}}\rangle = \Gamma_y\frac{cA^2k^2D\omega^2}{2(k^4D^2+\omega^2)}. \quad (9)$$

Соответствующий коэффициент переноса

$$\kappa = \frac{\langle j_y^{\text{конв}}\rangle}{\Gamma_y} = \frac{cA^2k^2D\omega^2}{2(k^4D^2+\omega^2)} = \frac{cA^2v^2}{2D\left(1+\frac{v^4}{D^2\omega^2}\right)}. \quad (10)$$

называется трансцилляторным. Трансцилляторный перенос возникает за счет диффузного обмена между слоями среды, участвующими в колебательном относительном перемещении. Он отличается от чисто конвективного, поскольку регулярного переноса среды в этом случае нет.

Раскладывая (10) в степенной ряд и удерживая два члена, получим

$$\kappa = \frac{cD}{2}M^2\left(1-\frac{D^2}{A^2v^2}M^2\right),$$

где $M = A\omega/v$ – число Маха. В обычных условиях в реальных твердых телах для поперечных волн число Маха имеет порядок 10^{-2}. Добавка к коэффициентам диффузии и теплопроводности в этом случае составляет величину порядка 10^{-4}. Для экспериментальной регистрации такого малого эффекта необходимо использование сравнительных методов. В то же время в специальных акустических резонаторах [6] число Маха достигает значений порядка единицы. В этом случае коэффициент трансцилляторного переноса сравним с обычным коэффициентом молекулярного переноса. В случае поверхностных волн, например, волн на поверхности воды, даже в обычных условиях число Маха составляет 0.4. Коэффициент трансцилляторного переноса здесь составит 10%. Заметим, что в работе [1] осуществлялось воздействие на пористую среду, насыщенную жидкостью или газом, мощными акустическими полями. Зарегистрировано увеличение коэффициента теплопроводности на 5–40%, что совпадает с приведенными оценками.

Результирующий коэффициент переноса вдоль оси Oy согласно (7) представляется в виде суммы диффузного и трансцилляторного коэффициентов

$$D_y = D + \kappa.$$

Рассмотрим далее случай плоской немонохроматической волны, бегущей вдоль оси Ox, с колебаниями вдоль оси Oy. Представив соответствующую координату скорости смещения среды в виде интеграла Фурье, получим

$$U_y(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U_y(\omega)\exp\left\{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}d\omega, \quad (11)$$

где $U_y(\omega)$ – спектральная компонента скорости.

Подставив (11) в (4) получим выражение для поля скаляра n' в виде

$$n' = \frac{\Gamma_y}{\sqrt{8\pi^2D}}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_0^t dt'\int_{-\infty}^{\infty}U_y(\omega)\exp\left\{i\omega\left(t'-\frac{x'}{v}\right)\right\}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4D(t-t')}\right\}(t-t')^{-1/2}d\omega. \quad (12)$$

Интегралы по x' и t' в (12) легко вычисляются. В результате n' представляется в виде интеграла по частотам:

$$n' = \frac{\Gamma_y}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U_y(\omega)\left\{\exp(i\omega t)-\exp\left(-\frac{\omega^2}{v^2}Dt\right)\right\}\times \\ \times\frac{\exp\left(-i\frac{\omega}{v}x\right)}{\left(D\frac{\omega^2}{v^2}+i\omega\right)}d\omega. \quad (13)$$

Для больших времен $t \gg \frac{v^2}{D\omega^2}$ (13) преобразуется в асимптотическое выражение

$$n' = \frac{\Gamma_y}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U_y(\omega)\times \times \exp\left\{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}/\left(D\frac{\omega^2}{v^2}+i\omega\right)d\omega. \quad (14)$$

Процедура осреднения конвективного потока в этом случае осуществляется с использованием следующего простого интеграла:

$$\int_t^{t+\tau} e^{i(\omega+\omega')t'}dt' = \{\exp(i(\omega+\omega')(t+\tau)) - \exp(i(\omega+\omega')t)\}/(i(\omega+\omega')), \quad (15)$$

где τ – период осреднения. В результате получим

$$\langle j_y^{\text{конв}}\rangle = \langle cU_y n'\rangle = \frac{c\Gamma_y}{2\pi i\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\int U_y(\omega')U_y(\omega)\times \times \exp\left(i(\omega+\omega')\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)\frac{\exp(i(\omega+\omega')\tau)-1}{\left(D\frac{\omega^2}{v^2}+i\omega\right)(\omega+\omega')}d\omega' d\omega. \quad (16)$$

Выражение (16) позволяет построить искомое спектральное представление коэффициента трансцилляторного переноса в волновой зоне

$$\kappa = \frac{c}{2\pi i\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\int U_y(\omega')U_y(\omega)\exp\left(i(\omega+\omega')\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)\times \times \frac{\exp(i(\omega+\omega')\tau)-1}{\left(D\frac{\omega^2}{v^2}+i\omega\right)(\omega+\omega')}d\omega' d\omega. \quad (17)$$

Практическое значение этой формулы заключается в возможности вычисления коэффициента переноса, если известны спектральные компоненты поля скорости в волновой зоне. Передаточная функция согласно (17) может быть определена в виде

$$k(\omega,\omega') = \exp\left(i(\omega+\omega')\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)\times \times \exp[i(\omega+\omega')\tau-1]/\left[\left(D\frac{\omega^2}{v^2}+i\omega\right)(\omega+\omega')\right]. \quad (18)$$

Проиллюстрируем это на следующих примерах. Для произвольных периодических колебаний представим поле скорости в виде экспоненциального ряда:

$$U_y\left(t-\frac{x}{v}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp\left[im\omega_0\left(t-\frac{x}{v}\right)\right], \quad C_m = \frac{a_m - ib_m}{2}, \quad C_{-m} = \frac{a_m+ib_m}{2}, \quad (19)$$

где a_m и b_m – коэффициенты разложения Фурье. Будем полагать, что $C_0 = 0$. Тогда

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m\exp(im\omega_0 t')\right)\times \times \exp(-i\omega t')dt' = \sqrt{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\{C_m\delta(\omega-m\omega_0) + C_{-m}\delta(\omega+m\omega_0)\} = \sqrt{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}U_m(\omega). \quad (20)$$

Подстановка (20) в (17) приводит к необходимости вычисления следующих двух интегралов с использованием передаточной функции:

$$I_1^m = \int_{-\infty}^{\infty} U_m(\omega')k(\omega,\omega')d\omega' = \sqrt{2\pi}\left\{C_m\exp\left[i(\omega+m\omega_0)\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]\times \times [\exp(i(\omega+m\omega_0)\tau)-1]/(\omega+m\omega_0) + C_{-m}\exp\left(i(\omega-m\omega_0)\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)\times \times [\exp(i(\omega-m\omega_0)\tau)-1]/(\omega-m\omega_0)\right\}/\left(D\frac{\omega^2}{v^2}+i\omega\right), \quad (21)$$

$$I_2^m = \int_{-\infty}^{\infty} U_m(\omega)I_1^m(\omega)d\omega = 2\pi\left\{\left[C_m^2\exp\left(2im\omega_0\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)\frac{\exp(2im\omega_0\tau)-1}{2m\omega_0} + C_mC_{-m}\tau i\right]\left(D\frac{m^2\omega_0^2}{v^2}+im\omega_0\right)^{-1} + \left[C_mC_{-m}i\tau - C_{-m}^2\exp\left(-2im\omega_0\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)\frac{\exp(-2im\omega_0\tau)-1}{2m\omega_0}\right]\times \times\left(D\frac{m^2\omega_0^2}{v^2}-im\omega_0\right)^{-1}\right\}. \quad (22)$$

Выбирая в качестве τ основной период функции $\tau = 2\pi/\omega_0$, получим согласно (17), (21), (22)

$$\kappa = c\sum_{m=1}^{\infty} C_m C_{-m}\left[\left(D\frac{m^2\omega_0^2}{v^2} + im\omega_0\right)^{-1} + \right.$$

$$\left. + \left(D\frac{m^2\omega_0^2}{v^2} - im\omega_0\right)^{-1}\right] = \tag{23}$$

$$= 2c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m C_{-m} D/v^2}{D^2\frac{m^2\omega_0^2}{v^4}+1} = \frac{cD}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m^2+b_m^2}{v^2\left(D^2\frac{m^2\omega_0^2}{v^4}+1\right)}.$$

Для заданных коэффициентов Фурье смещений A_m и B_m в волновом поле получим

$$\kappa = \frac{cv^2D}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(A_m^2+B_m^2)\omega_0^2m^2}{D^2m^2\omega_0^2+v^4} =$$

$$= \frac{cv^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_m^2+B_m^2}{D\left(1+\frac{v^4}{D^2m^2\omega_0^2}\right)}. \tag{24}$$

Полученное выражение свидетельствует об аддитивности κ относительно гармоник Фурье. Для монохроматических колебаний $A_1 = A$ и $A_m = 0$ при $m \neq 1$, $B_m = 0$ из (24) получим выражение, совпадающее с (10):

$$\kappa = cA^2v^2/\left[2D\left(1+\frac{v^4}{D^2\omega_0^2}\right)\right]. \tag{25}$$

Формула (25) позволяет констатировать, что коэффициент трансцилляторного переноса пропорционален квадрату амплитуды колебаний. При увеличении частоты ω_0 коэффициент κ монотонно возрастает, стремясь к предельному значению $\kappa_{max} = cA^2v^2/(2D)$.

Зависимость коэффициента трансцилляторного переноса от D немонотонна: $\kappa \longrightarrow 0$ при $D \longrightarrow 0$ и $D \longrightarrow \infty$. При $D = v^2/\omega_0$ κ принимает максимальное значение $\kappa_m = cA^2\omega_0/4$, не зависящее от скорости волны.

Таким образом, при распространении поперечной акустической волны в среде возникает дополнительный перенос (трансцилляторный). Коэффициенты переноса (диффузии, теплопроводности и т.п.) получают максимальное приращение в плоскости колебаний. Изотропная среда в акустическом поле приобретает анизотропию по отношению к коэффициентам переноса. Трансцилляторный перенос обуславливает дополнительную необратимость процессов переноса.

Полученные спектральные соотношения позволили построить выражения коэффициентов переноса для немонохроматической волны.

Результаты работы обеспечивают новые возможности для использования акустических полей в химической технологии, где коэффициент диффузии определяет скорость реакций, нефтяной и газовой промышленности и других областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вахитов Г.Г., Кузнецов О.Л., Симкин Э.М.* Термодинамика призабойной зоны нефтяного пласта. М.: Недра, 1987.
2. *Несис Е.И., Шаталов А.Ф., Кармацкий Н.П.* Зависимость коэффициента теплоотдачи от амплитуды и частоты вибрации вертикального тонкого нагревателя // Инженерно-физический журнал. 1994. Т. 67. № 1–3. С. 20–22.
3. *Нигматулин Р.И., Филиппов А.И., Ахатов И.Ш., Ниязгулов С.А.* Уравнения с периодическими коэффициентами и теория хаоса // Статика и динамика упорядоченных сред. Межвуз. научн. сб. / Уфа: Изд-во БашГУ, 1993. С. 81–93.
4. *Филиппов А.И., Котельников В.А., Минлибаев М.Р.* Некоторые особенности явления переноса тепла при колебаниях в пористой среде // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34. № 65. С. 708–713.
5. *Mols B., Oliemans R.V.A.* A turbulent diffusion model for particle dispersion and deposition in horizontal tube flow // Int. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24. № 1. P. 55–75.
6. *Gavignet E., Ballandras S., Bigler E.* Analysis and experimental study of surface transverse wave resonators on quartz // J. Appl. Phys. 1996. V. 79(12). P. 8944–8950.

Diffusion under the Action of Sound

A. I. Filippov and K. A. Filippov

The transfer phenomena initiated by an acoustic field in a medium are considered. It is shown that the transfer coefficients increase even in the case of a plane wave propagation in a homogeneous medium. The spectral representations obtained make it possible to construct the expressions for the transcillatory transfer coefficients (characterizing the transfer processes) caused by acoustic oscillations for various wave packets.