АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 3, с. 397–403

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ В ЗАКРЫТОМ РЕЗОНАТОРЕ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ КОНЕЧНЫМИ СМЕЩЕНИЯМИ ЕГО ГРАНИЦЫ

© 1999 г. О. В. Руденко

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
199899 Москва, Воробьевы горы, физический факультет

Поступила в редакцию 05.10.98 г.

Изучены процессы искажения поля в резонаторе, обусловленные нелинейным характером связи между законом движения его торцевой стенки и формой бегущих волн. Рассчитаны форма и спектр нелинейных колебаний среды при гармонической накачке. Решена и обратная задача: найден закон движения границы, обеспечивающий эффективное возбуждение резонансных колебаний. Показано, что в добротных резонаторах эффекты граничной нелинейности могут быть выражены при скоростях колебаний стенки, малой по сравнению со скоростью звука.

Проблема повышения добротности акустических резонаторов возникает во многих разделах физики и техники. В распределенных системах с высокой добротностью можно накопить значительную энергию и создать условия для наблюдения сильно выраженных нелинейных эффектов даже при слабой накачке [1]. Высокоточные измерительные системы, используемые, в частности, для поиска всплесков гравитационного излучения [2], содержат механические резонаторы из сапфира и кремния, добротность которых Q превышает 10^9 для звукового диапазона частот при температуре жидкого гелия [3]. Минимизация всех возможных диссипативных потерь (путем выращивания совершенных кристаллов, тщательной полировки торцов и т.д.) позволила даже при комнатных температурах добиться значений $Q \approx 10^8$ [4] (соответствующее время релаксации порядка 3 лет).

В столь добротных системах, когда линейные (амплитудно-независимые) потери практически исключены, роль ограничивающего фактора может играть нелинейное поглощение. Нелинейность является основной причиной ограничения Q в менее совершенных резонаторах, но при наличии интенсивной накачки. В этих случаях на первый план выступает проблема борьбы с нелинейным искажением профиля волны, приводящим к образованию крутых ударных фронтов, поскольку именно на фронтах происходит поглощение, не зависящее от линейных диссипативных параметров среды [1].

Известны по крайней мере 3 способа подавления процесса формирования ударного фронта. В работе [5] предложен способ искусственного введения расстроек между гармониками в резонаторе, одна из границ которого обладает частотно-зависимым импедансом. В работах [6–8] сообщается о реализации идеи управления формой волны и фазовыми сдвигами между гармониками за счет использования резонаторов сложной формы – конических, бульбообразных и др. На этом пути в газонаполненных объемах удалось достичь значений избыточного положительного давления в несколько атмосфер и добиться подавления ударных фронтов в условиях сильной нелинейности (для больших акустических чисел Маха).

Третий способ основан на введении в среду селективных поглотителей. Вообще говоря, идея [9] подавления "ключевых" гармоник, присутствие которых ведет к неконтролируемому растеканию волновой энергии по спектру, позволяет управлять потоками энергии и, в частности, сконцентрировать ее в нужных гармонических составляющих. Ряд возможностей управления волновыми взаимодействиями, описанных в обзоре [10], можно использовать для улучшения добротности нелинейного резонатора. В эксперименте [11], например, добротность повышалась благодаря тому, что одна из границ частично пропускала наружу вторую гармонику, будучи хорошо отражающей для волны основной частоты. Таким образом, для повышения Q вводились искусственные потери на частоте 2-й гармоники. В последнее время этот способ вновь привлекает к себе интерес [12].

Итак, существуют способы подавления как линейных, так и нелинейных потерь в резонаторе. Когда эти потери удается свести к минимуму, определяющим может стать еще один процесс. В отличие от известных эффектов, приводящих к прогрессивному искажению бегущих волн и связанных с нелинейными упругими свойствами сред либо нелинейностью уравнений, описывающих

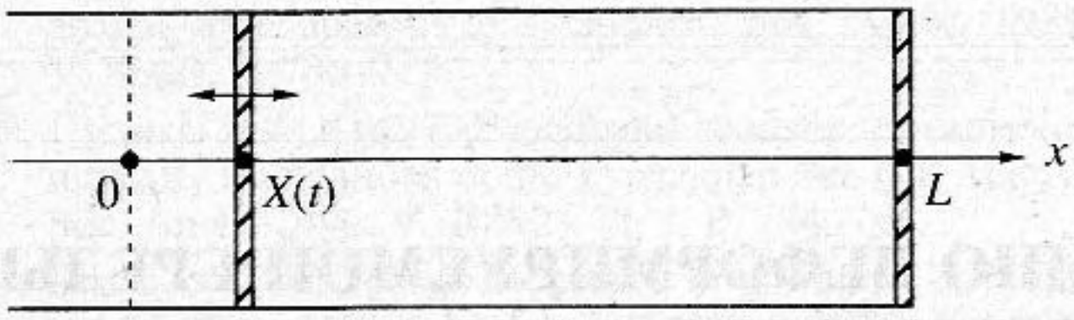

Рис. 1.

их динамику, этот процесс имеет чисто геометрическую природу. Он обусловлен нелинейным характером связи между законом движения излучающей поверхности и формой убегающей волны. В задачах об излучении волн проявления такой нелинейности не накапливаются; поэтому они заметно выражены лишь при скоростях движения, сравнимых со скоростью звука. В работах [13, 14], в частности, описаны процессы нелинейного искажения шумовых спектров, создаваемых интенсивными хаотическими колебаниями поршня в среде с малой скоростью звука (например, в пузырьковой жидкости), а также процессы взаимодействия регулярного сигнала и шума (затухание сигнала при наличии шумовой компоненты, лавинное уширение шумового спектра из-за генерации гармоник сигнала и другие).

Вместе с тем, эффекты такой геометрической (граничной) нелинейности могут быть сильно выражены в резонаторе, где возможен процесс их накопления во времени. В результате этого, как показано ниже, в установившемся режиме нелинейные эффекты определяются отношением двух малых параметров $M = A/c$ и Δ (где A – амплитуда колебаний скорости для излучающей поверхности, c – скорость звука, Δ – расстройка от точного резонанса, минимальные значения которой $\Delta \sim Q^{-1}$). Отношение M/Δ может быть не малой величиной в добротных резонаторах либо при интенсивной накачке.

Рассмотрим слой линейной среды, заключенный между $x = 0$ и $x = L$ (рис. 1). Левая граница слоя завершает колебания и смещается по закону $x = X(t)$ относительно среднего положения $x = 0$. Правая граница $x = L$ считается неподвижной.

Решение одномерных уравнений линейной акустики для волн скорости u и давления p запишем в виде

$$u = F\left(t - \frac{x-L}{c}\right) - F\left(t + \frac{x-L}{c}\right),$$
$$\frac{p}{\rho c} = F\left(t - \frac{x-L}{c}\right) + F\left(t + \frac{x-L}{c}\right). \quad (1)$$

Здесь c и ρ – скорость звука и плотность среды, $F(t)$ – форма бегущей волны. Запись (1) обеспечивает выполнение граничного условия $u(t, x = L) = 0$.

Вид функции $F(t)$ для установившегося процесса определяется вторым граничным условием: на смещающейся левой стенке резонатора колебательная скорость среды должна совпадать со скоростью движения стенки, то есть

$$u[t, x = X(T)] = \frac{dX}{dt}. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\frac{dX}{dt} = F\left[t + \frac{L}{c} - \frac{1}{c}X(t)\right] - F\left[t - \frac{L}{c} + \frac{1}{c}X(t)\right]. \quad (3)$$

При известном законе движения $X(t)$ выражение (3) представляет собой функционально-разностное уравнение для нахождения формы волны $F(t)$. Интерес представляет и обратная задача, когда требуется найти закон $X(t)$ движения границы, обеспечивающий установление в резонаторе волны с заданным профилем $F(t)$. Заметим, что обратная задача имеет самостоятельное значение; поскольку ее решение сводится к более простым математическим процедурам, начнем анализ именно с нее.

Рассмотрим важный случай гармонических колебаний среды, полагая

$$F(t) = -\frac{A}{2}\frac{\cos\omega t}{\sin kL}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (4)$$

Решение (1) при этом

$$u = A\frac{\sin k(L-x)}{\sin kL}\sin\omega t \quad (5)$$

описывает хорошо известные линейные вынужденные колебания слоя. Если пренебречь смещением левой стенки из среднего положения $x = 0$, закон ее движения, как видно из (5), также должен быть гармоническим:

$$X'(t) = u(t, x = 0) = A\sin\omega t. \quad (6)$$

При $kL = \pi n$, $n = 1, 2, \ldots$, наступает резонанс и амплитуда колебаний (5) неограниченно растет почти всюду, за исключением точки $x = 0$ и узлов стоячей волны (5). В реальных условиях, когда установившиеся значения амплитуды ограничиваются диссипативными процессами, для повышения уровня этого ограничения следует увеличивать амплитуду колебаний стенки. Такое увеличение приведет к необходимости учета смещения границы, и закон ее движения (6) существенно изменится.

Итак, зададимся вопросом: как должна колебаться левая граница резонатора, чтобы внутри слоя сохранилось движение среды в форме (5)? Определив $X(t)$, мы тем самым сможем указать способ приближения к резонансам при высоких уровнях возбуждения.

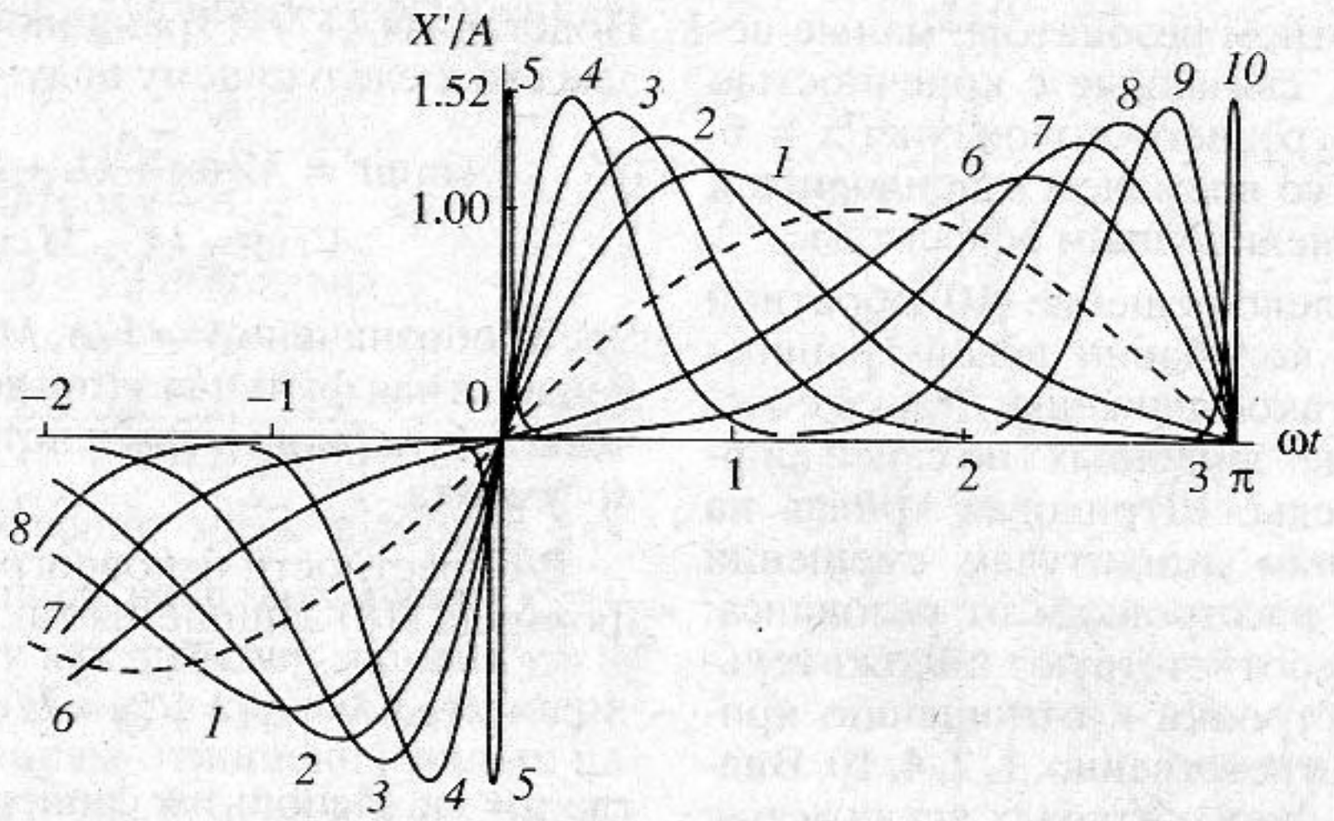

Рис. 2.

Выражение (3) для известной функции $F(t)$ (4) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{A}{\sin kL}\sin[kL - kX(t)]\sin\omega t. \qquad (7)$$

Решая (7), получим

$$\cos[kX(t) - kL] = \frac{\cos kL - \mathrm{th}\beta}{1 - \cos kL\,\mathrm{th}\beta},$$
$$\beta = \frac{A}{c}\frac{\cos\omega t}{\sin kL} + D, \qquad (8)$$

где D – постоянная интегрирования.

Рассмотрим для определенности окрестность основного резонанса, положив $kL = \pi + \Delta$. Расстройка $\Delta = \pi(\omega - \omega_0)/\omega_0$ здесь считается малой, что соответствует малости относительной ширины резонансной кривой, центральная частота которой $\omega_0 = \pi c/L$. Будем также считать малым смещение стенки по сравнению с длиной волны, $k|X| \ll 1$. Иными словами, малым предполагается акустическое число Маха $M = A/c$ – отношение амплитуды A колебательной скорости частиц среды к скорости звука c. При этом решение (8) упрощается и приводится к следующему виду:

$$kX(t) = \Delta\left[1 - \frac{\exp\left(\frac{M}{\Delta}\cos\omega t\right)}{I_0\left(\frac{M}{\Delta}\right)}\right]. \qquad (9)$$

Здесь I_0 – модифицированная функция Бесселя. При переходе от (8) к (9) константа D выбрана так, чтобы среднее (по периоду колебаний) смещение стенки равнялось нулю. Колебательная скорость движения границы равна

$$X'(t) = AI_0^{-1}\left(\frac{M}{\Delta}\right)\sin\omega t\exp\left(\frac{M}{\Delta}\cos\omega t\right). \qquad (10)$$

Разложение функции (10) в ряд Фурье по синусам

$$X'(t) = 2A\left[I_0\left(\frac{M}{\Delta}\right)\frac{M}{\Delta}\right]^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} nI_n\left(\frac{M}{\Delta}\right)\sin n\omega t \qquad (11)$$

определяет спектральный состав колебаний стенки; член ряда (11) с номером n дает выражение для амплитуды n-ой гармоники. Наконец, приведем здесь формулу для средней интенсивности колебаний границы:

$$\overline{X'^2} = \frac{A^2}{2}I_1\left(2\frac{M}{\Delta}\right)\left[\frac{M}{\Delta}I_0^2\left(\frac{M}{\Delta}\right)\right]^{-1}. \qquad (12)$$

Устремляя $M \longrightarrow 0$ в выражениях (9)–(12), придем к очевидным результатам линеаризованной задачи:

$$X = -\frac{A}{\omega}\cos\omega t, \quad X' = A\sin\omega t, \quad \overline{X'^2} = \frac{A^2}{2}. \qquad (13)$$

Принципиальное значение имеет тот факт, что малые параметры M и Δ входят в формулы (9)–(12) в виде отношения. Это означает, что в окрестности резонанса нелинейные искажения могут быть заметно выражены даже при малых числах Маха M. В этом состоит существенное отличие задач о вынужденных колебаниях резонатора с подвижными границами от излучения волн колеблющимся поршнем в неограниченную среду. В последнем случае, как известно, эффекты геометрической нелинейности при переходе от $X'(t)$ к $F(t)$ становятся заметными лишь для скоростей движения поршня, сравнимых со скоростью звука [13, 14].

Напротив, в добротном резонаторе малые нелинейные искажения, связанные с конечностью смещения стенки из среднего положения $x = 0$, могут накапливаться со временем и приводить к сильно выраженным нелинейным эффектам.

На рис. 2 представлено решение (10) обратной задачи для скорости колебаний левой границы резонатора. Именно такое движение стенки обеспечивает установление "линейных" по своей форме (5) колебаний среды. Штриховая кривая на рис. 2 отвечает малым амплитудам смещений стенки или большим расстройкам от резонанса: $M/\Delta \ll 1$. Кривые *1–4* соответствуют положительным значениями расстройки и отношению кривых M/Δ, равному, соответственно, 1, 2, 4, 10. Видно, что с ростом M/Δ форма кривых искажается; спектр обогащается гармониками (11). При больших значениях M/Δ для поддержания гармонических колебаний среды (5) необходимо возбуждать резонатор короткими двуполярными "рывками" стенки (кривая *5* на рис. 2), следующими один за другим с периодом $2\pi/\omega$.

Форма этих "рывков" и предельное (при $M/\Delta \longrightarrow \infty$) значение их амплитуды описываются следующими выражениями:

$$X'(t) = \sqrt{4\pi}A\left(\frac{M}{2\Delta}\omega^2 t^2\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{M}{2\Delta}\omega^2 t^2\right), \qquad (14)$$

$$X'_{\max} = A\sqrt{\frac{2\pi}{e}} \approx 1.52A.$$

Интенсивность (12) колебаний границы с ростом M/Δ уменьшается и при больших значениях этого параметра ведет себя как

$$\overline{X'^2} = \frac{A^2}{2}\sqrt{\pi\frac{\Delta}{M}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}c^2 M^{3/2}\Delta^{1/2}. \qquad (15)$$

Кривые *6–10* на рис. 2 построены для тех же $M/|\Delta|$, что и кривые *1–5*, но для них расстройка $\Delta < 0$.

Заметим, что энергия, запасенная в резонаторе колеблющейся по закону (5) средой,

$$E = \int_0^L \overline{u^2}\,dx \approx \frac{A^2 L}{4\Delta^2} = \frac{Lc^2}{4}M^2\Delta^{-2}, \qquad (16)$$

напротив, растет с увеличением $M/|\Delta|$. Таким образом, отношение интенсивности колебаний источника $\overline{X'^2}$ (15) к запасенной энергии E (16), равное константе в линейном случае, при учете смещения границы уменьшается как $A^{-1/2}$.

Перейдем теперь к решению прямой задачи, считая, что движение левой границы резонатора происходит по гармоническому закону

$$X' = A\sin\omega t, \quad X = -\frac{A}{\omega}\cos\omega t. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в граничное условие (3), приведем его к следующему виду:

$$\sin\omega t = V(\omega t + kL + M\cos\omega t) - V(\omega t - kL - M\cos\omega t). \qquad (18)$$

Здесь обозначено $V = F/A$, $M = A/c$. Очевидно, что неизвестная функция $V(\omega t)$ должна быть периодической (с периодом 2π) и четной функцией своего аргумента.

В окрестности основного резонанса $kL = \pi + \Delta$ формула (18) запишется так:

$$V(y + M\cos y - \Delta) - V(y - M\cos y + \Delta) = \sin y, \qquad (19)$$

где $y = \omega t$. Используя свойства четности и периодичности $V(y)$, ищем решение функционального уравнения (19) в виде ряда

$$V(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos ny \qquad (20)$$

с неизвестными коэффициентами B_n. Получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin ny \sin n(\Delta - M\cos y) = \frac{1}{2}\sin y. \qquad (21)$$

Теперь умножим обе части (21) на $\sin my$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) и усредним полученное соотношение по периоду. В результате придем к системе уравнений для определения B_n, которая имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_n(nM)\cos\left(n\Delta - n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{M}{4}, \qquad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left\{J_{|n-m|}(nM)\sin\left(n\Delta - |n-m|\frac{\pi}{2}\right) - J_{n+m}(nM)\sin\left(n\Delta - (n+m)\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 0. \qquad (23)$$

В уравнениях (23) следует полагать $m = 2, 3, \ldots$, а уравнение (22) отвечает значению $m = 1$.

При $M \longrightarrow 0$ система (22), (23) обнаруживает очевидный переход к решению линейной задачи: $B_2 = B_3 = \ldots = 0$,

$$B_1 \approx \frac{1}{2\sin\Delta}, \quad V(y) \approx \frac{\cos y}{2\sin\Delta}. \qquad (24)$$

В общем случае эта система может быть решена только численными методами. Аналитическое решение удается получить лишь для малых значений M и $|\Delta|$, однако при этом удобнее исходить из функционального уравнения (19), которое при-

ближенно сводится к следующему дифференциальному:

$$\frac{dV}{dy} = \frac{1}{2}\frac{\sin y}{M\cos y - \Delta}. \qquad (25)$$

Его решение при $M < |\Delta|$ имеет вид

$$V = \frac{1}{2M}\ln\frac{1+\sqrt{1-(M^2/\Delta^2)}}{2[1-(M/\Delta)\cos y]}. \qquad (26)$$

Константа интегрирования здесь выбрана так, чтобы среднее по периоду равнялось нулю, $\bar{V} = 0$.

Форма колебания V как функция времени $y = \omega t$ изображена на рис. 3. Номера кривых *1–4* отвечают различным значениям отношения малых параметров M/Δ, равного 0.5, 0.7, 0.9 и 0.95. Видно, что при $M/\Delta < 0.5$ форма колебания близка к гармонической. С приближением M/Δ к единице все сильнее проявляются нелинейные искажения, приводящие к формированию острых и высоких положительных "пиков".

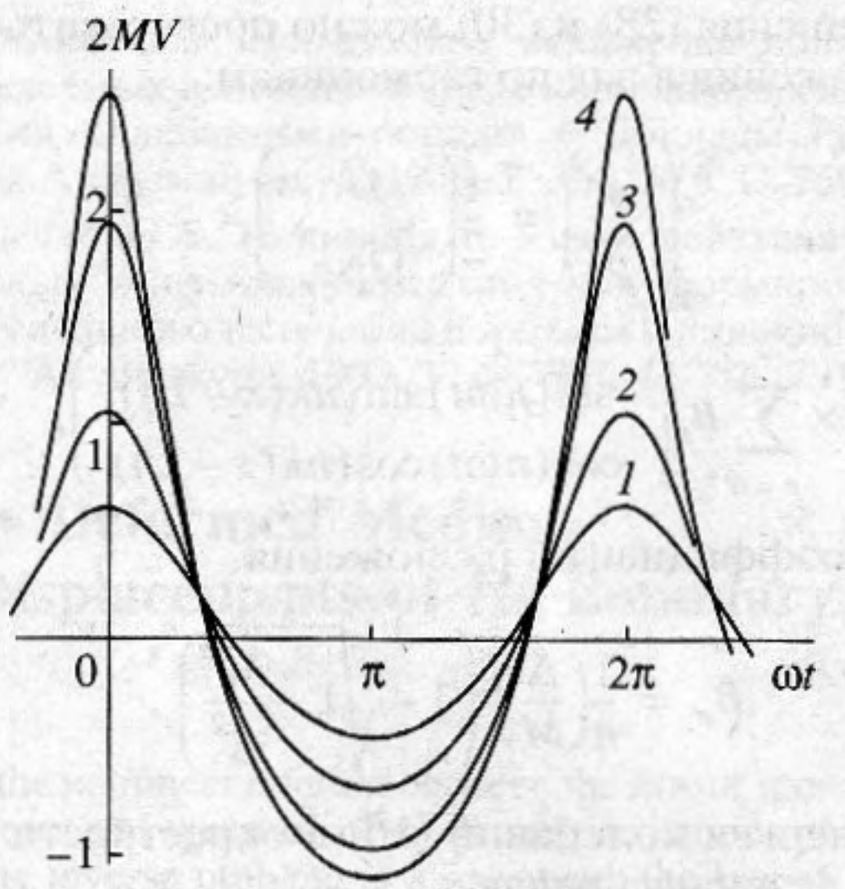

Рис. 3.

Важно заметить, что кривые рис. 3 в точности описывают пульсации давления на закрытом торце резонатора, поскольку, согласно второй из формул (1)

$$\frac{1}{\rho c^2}p(x = L, t) = 2MV(\omega t = y). \qquad (27)$$

После того, как найдена функция V (26), нетрудно рассчитать поле колебательной скорости (1) в резонаторе:

$$u = \frac{c}{2}\ln\frac{1-\frac{M}{\Delta}\cos[\omega t + k(x-L)]}{1-\frac{M}{\Delta}\cos[\omega t - k(x-L)]}. \qquad (28)$$

Поставленные граничные условия

$$u(x = L, t) = 0, \quad u\left(x = -\frac{A}{\omega}\cos\omega t, t\right) = 0 \qquad (29)$$

в решении (28) выполняются, но второе из них – приближенно, с учетом малости M и Δ, в окрестности основного резонанса $kL = \pi$.

Соответствующее (28) поле акустического давления описывается выражением

$$p = \rho c^2 \ln\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{M^2}{\Delta^2}}\right) -$$

$$-\frac{\rho c^2}{2}\ln\left\{\left[1-\frac{M}{\Delta}\cos(\omega t + k(x-L))\right]\times\right. \qquad (30)$$

$$\left.\times\left[1-\frac{M}{\Delta}\cos(\omega t - k(x-L))\right]\right\}.$$

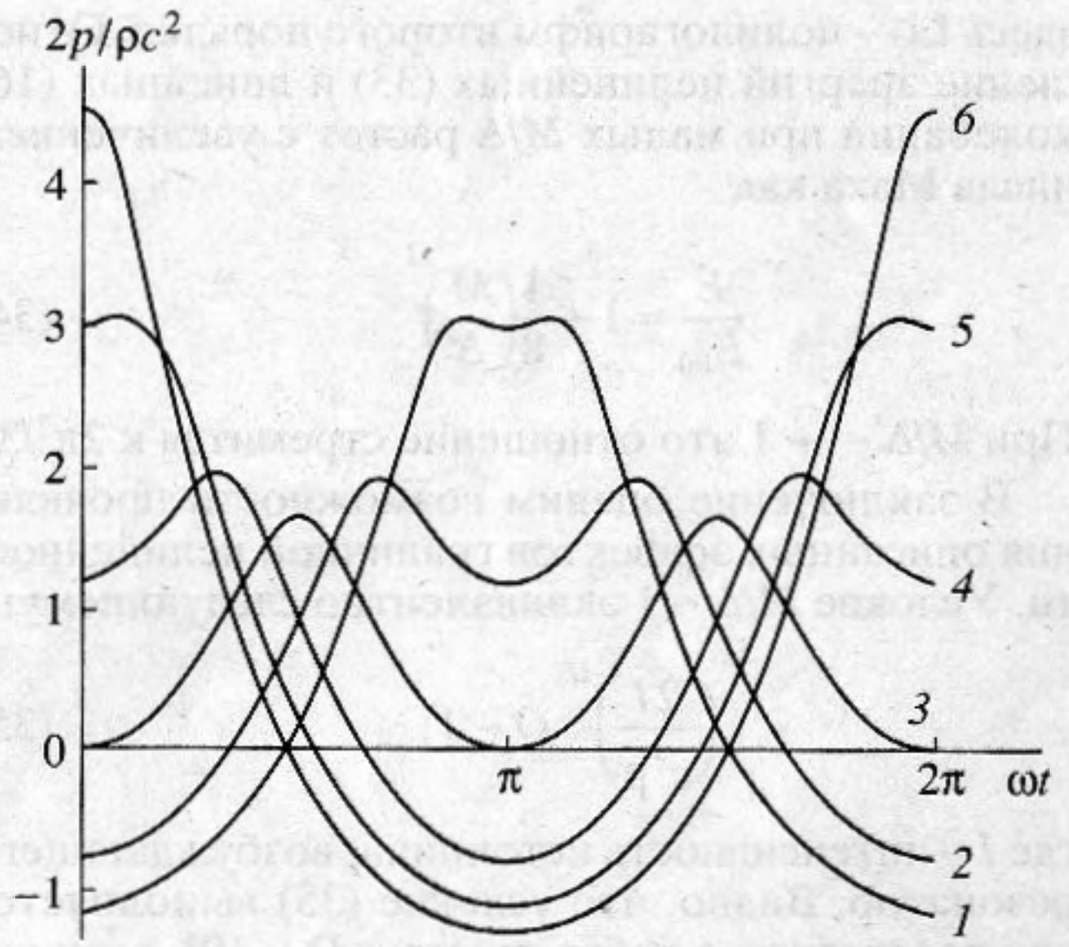

Рис. 4.

Формы колебаний давления в различных сечениях резонатора изображены на рис. 4. Кривые *1–6* отвечают сечениям x/L, равным 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6 и 1. Чтобы эти кривые не накладывались друг на друга, первое (не зависящее от t) слагаемое в формуле (30) при построении графиков не учтено. Однако следует помнить, что колебания имеют нулевую постоянную составляющую, и каждую из кривых *1–6* нужно сместить вдоль оси ординат вниз. Как показывает сравнение кривых, временные формы и спектры колебаний в различных сечениях резонатора сильно различаются между собой.

Решения (28) и (30) можно представить в виде разложения в ряд по гармоникам:

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/c \\ 1/\rho c^2 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} B_n \begin{pmatrix} \sin(n\omega t)\sin(nk(x-L)) \\ \cos(n\omega t)\cos(nk(x-L)) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где коэффициенты разложения

$$B_n = \frac{1}{n}\left(\frac{\Delta}{M}\right)^n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M^2}{\Delta^2}}\right)^n. \quad (32)$$

Энергия колебаний (16) в окрестности основного резонанса равна

$$E = c^2 L \mathrm{Li}_2\left[\left(\frac{\Delta}{M}\right)^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M^2}{\Delta^2}}\right)^2\right], \quad (33)$$

здесь Li_2 – полилогарифм второго порядка. Отношение энергий нелинейных (33) и линейных (16) колебаний при малых M/Δ растет с увеличением числа Маха как

$$\frac{E}{E_{\mathrm{lin}}} \approx 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{M}{\Delta}\right)^2. \quad (34)$$

При $M/\Delta \longrightarrow 1$ это отношение стремится к $2\pi^2/3$.

В заключение оценим возможности проявления описанных эффектов граничной нелинейности. Условие $M/\Delta \sim 1$ эквивалентно следующему:

$$\left(\frac{2I}{c^3 \rho}\right)^{1/2} Q \sim 1, \quad (35)$$

где I – интенсивность источника, возбуждающего резонатор. Видно, что условие (35) выполняется для резонатора с добротностью $Q \sim 10^4$, если интенсивность $I \sim 2$ Вт/см^2 (здесь для определенности ρ и c взяты такими же, как у воды).

Простая оценка показывает, что граничная нелинейность, весьма вероятно, проявлялась в проводившихся ранее экспериментах. Однако нам не известны наблюдения этих явлений в "чистом" виде, когда в достаточно добротных резонаторах удавалось избавиться от фона объемных нелинейных эффектов и при этом обращалось бы внимание на эффекты граничной нелинейности.

В области теории здесь также остается ряд нерешенных проблем. В отличие от искажений волны в объеме среды, описываемых нелинейными уравнениями с частными производными, граничные искажения описываются функционально-разностными уравнениями типа (19), регулярных методов решения которых не существует. Из-за этого, в частности, остался открытым вопрос о приближении к резонансу (для гармонического закона движения границы), вблизи которого отношение $M/|\Delta| > 1$. В стационарном решении при этом возникают особенности, поэтому необходим анализ процесса установления колебаний. Представляет интерес также одновременный учет конкурирующего фактора – слабых потерь за счет линейной диссипации и объемного нелинейного поглощения. Наконец, интересно рассмотреть колебания резонаторов более сложной формы и с другими свойствами отражающих границ.

Я благодарен В.Б. Брагинскому и С.А. Рыбаку за полезные обсуждения постановки задачи, Е.А. Лапшину и А.В. Шанину – за обсуждение соответствующих математических проблем.

Работа поддержана грантами РФФИ и CRDF.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
   Rudenko O.V. , Soluyan S.I. Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. New York: Plenum, Consultants Bureau, 1977.
2. *Брагинский В.Б., Митрофанов В.П., Панов В.И.* Системы с малой диссипацией. М.: Наука, 1981.
   Braginsky V.B. , Mitrofanov V.P., Panov V.I. Systems with Small Dissipation. Chicago Univ. Press, 1985.
3. *Митрофанов В.П.* Механические системы с малой диссипацией и их применение в физических экспериментах. Автореферат докторской диссертации. Физический факультет МГУ, 1996.
4. *Braginsky V.B. , Mitrofanov V.P., Tokmakov K.V.* Energy dissipation in the pendulum mode of the test mass suspension of a gravitational wave antenna // Phys. Lett. A. 1996. № 218. P. 164 –166.
5. *Зарембо Л.К., Сердобольская О.Ю., Чернобай И.П.* Влияние фазовых сдвигов при отражении от границ на нелинейное взаимодействие продольных волн в твердых телах // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 397–403.
6. *Ladbury R.* Ultrahigh – Energy Sound Waves Promise New Technologies // Physics Today. 1998. V. 51. № 2. P. 23–24.
7. *Lawrenson C.C., Lipkens B., Lucas T. S., Perkins D.K., Van Doren T.W.* Measurements of macrosonic standing waves in oscillating cavities // J. Acoust. Soc. America. 1997. V. 102. № 5. Pt. 2. P. 3064.
8. *Ilinskii Y.A., Lipkens B., Lucas T.S., Van Doren T.W., Zabolotskaya E.A.* A theoretical model of nonlinear standing waves in an oscillating closed cavity // J. Acoust. Soc. America. 1998. V. 104. № 2. Pt. 2. P. 623–636.
9. *Руденко О.В.* К проблеме искусственных нелинейных сред с резонансным поглотителем // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 3. С. 398–402.
10. *Руденко О.В.* Нелинейная акустика: достижения, перспективы, проблемы // Природа. 1986. № 7. С. 16–26.
11. *Андреев В.Г., Гусев В.Э., Карабутов А.А., Руденко О.В., Сапожников О.А.* Повышение добротнос-

ти нелинейного акустического резонатора с помощью селективно поглощающего зеркала // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 275–276.

12. *Gusev V.E., Bailliet H., Lotton P., Job S., Bruneau M.* Enhancement of the *Q* of a acoustic resonator by active suppression of harmonics // J. Acoust. Soc. America. 1998. V. 103. № 6. P. 3717–3720.

13. *Руденко О.В.* Нелинейное искажение волн возбуждаемых в линейной среде конечными хаотическими колебаниями поршня // Доклады Российской Академии Наук. 1998. Т. 360. № 6. С. 759–761.

14. *Руденко О.В.* Нелинейные взаимодействия регулярных и шумовых спектров при формировании интенсивного излучения поршнем в линейной среде // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 6. С. 786–791.

Nonlinear Oscillations of Linearly Deformed Medium in a Closed Resonator Excited by Finite Displacements of Its Boundary

O. V. Rudenko

Processes of field distortion that occur in a resonator because of the nonlinear relation between the law of motion of its end and the form of travelling waves are studied. The form and spectrum of nonlinear oscillations of the medium in the case of harmonic pumping are calculated. The inverse problem is also solved: the law of boundary motion that provides effective excitation of resonance oscillations is determined. It is demonstrated that effects of boundary nonlinearity in high-Q resonators can manifest themselves at the velocities of wall vibration much less than the sound velocity.