АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1998, том 44, № 5, с. 709–711

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534

О ЗАТУХАНИИ ЛАНДАУ В СРЕДЕ СО МНОГИМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

© 1998 г. С. А. Рыбак

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4
E-mail: bvp@acoins.msc.ru

Поступила в редакцию 30.12.97 г.

Затухание Ландау было впервые описано для бесстолкновительной плазмы в отсутствие диссипативных процессов в ней [1, 2]. Впоследствии подход Ландау стали активно применять для вычисления затухания волн в средах, включающих внутренние степени свободы – осцилляторы.

Примером среды, включающей множество осцилляторов, является жидкость с пузырьками газа [3]. Другой пример – активно обсуждаемый в последние годы – так называемые "нечеткие структуры" (Fuzzy structures) [4–6], представляющие собой упругую систему (оболочку, пластину и т.д.) сцепленную со множеством осцилляторов. Во всех случаях осцилляторы в среднем равномерно распределены по пространственным координатам, в любом физически бесконечно малом объеме среды распределение осцилляторов по собственным частотам $f(\omega_n^2)$ предполагается одинаковым и нормированным на единицу. Во всех указанных моделях наличие даже исчезающе малого поглощения в осцилляторах приводит к конечной величине поглощения волны, распространяющейся в среде. Необходимо, однако, подчеркнуть существенное различие реальных сред, сцепленных с осцилляторами, и модели Ландау, в которой диссипация предполагается полностью отсутствующей (бесстолкновительная плазма): модель Ландау описывает обратимые волновые движения, в то время как затухание в среде с осцилляторами есть необратимый процесс. Анализу этого различия и посвящена данная работа.

В качестве простейшего примера рассмотрим струну, сцепленную с набором осцилляторов:

$$\rho y_{tt} - T y_{xx} + \rho\beta y_t = F(x, t),$$

$$F(x, t) = -\int f(\omega_n) g(n)[y(x, t) - \xi_n(x, t)]dn, \quad (1)$$

$$m_n \xi_{ntt} + m_n \beta_n \xi_{nt} + g_n[\xi_n - y(x, t)] = 0.$$

Здесь ρ, T – погонная масса и натяжение струны, g_n, m_n – жесткость пружины и масса n-го осциллятора, β, β_n – коэффициенты диссипации, соответственно, в струне и присоединенных осцилляторах, $y(x, t)$, $\xi_n(x, t)$ – динамические перемещения точек струны и осцилляторов, $\omega_n^2 = g/m_n$ – квадрат собственной частоты осциллятора, $c^2 = T/\rho$ – квадрат скорости волны в однородной струне.

Нетрудно получить первый интеграл системы уравнений (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\rho y_t^2}{2} + \frac{T y_x^2}{2} + \int\left[\frac{m_n \zeta_{nt}^2}{2} + \frac{g_n (y - \zeta)^2}{2}\right] f(n)dn\right\} - \quad (2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(T y_x y_t) + \rho\beta y_t^2 + \int m_n \beta_n \zeta_{nt}^2 f(n)dn = 0.$$

Выражение (2) представляет собой закон сохранения энергии, выполняющийся в каждой точке (x, t): выражение в фигурных скобках есть плотность энергии E, выражение под знаком градиента – плотность потока энергии вдоль струны, последние два члена описывают диссипацию энергии, т.е. необратимую потерю энергии E_1 в той же точке (x, t) в единицу времени.

Будем считать систему определенной на полубесконечном отрезке:

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < t < \infty.$$

В точке $x = 0$ действует сосредоточенный источник, задающий движение по гармоническому закону с малым инкрементом δ, описывающим включение при $t = -\infty$, согласно Ландау [1]:

$$y(0, t) = y_0 \exp(-j\omega t + \delta t), \quad \delta > 0. \quad (3)$$

Граничному условию (3) при любом $t > 0$ соответствует решение:

$$\zeta_n(x, t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - (\omega + j\delta)^2 - j\beta_n\omega} y(x, t),$$

$$y(x, t) = y_0 \exp(-j\omega t + \delta t + jkx),$$

где k находится из дисперсионного уравнения:

$$k^2 = \frac{(\omega + j\delta)^2 + j\beta\omega}{c^2} + \quad (4)$$

$$+\int f(n)(m_n/\rho c^2)\frac{(\omega + j\delta)^2\omega_n^2 + j\beta_n\omega\omega_n^2}{[\omega_n^2 - (\omega + j\delta)^2 - j\beta_n\omega]}\frac{\partial n}{\partial\omega_n}d\omega_n.$$

Мнимая часть k отсюда может быть найдена в форме:

$$\mathrm{Im}k = \frac{\eta}{2c} + \int f(n)(m_n/\rho c^2)(\omega_n^2/2\mathrm{Re}k)\times$$
$$\times\left[\frac{2\omega\delta(\omega_n^2-\omega^2)+\omega^3\eta_m}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+\omega^2\eta_n^2}\right]\frac{\partial n}{\partial\omega_n}d\omega_n, \quad (5)$$

где $\eta = \beta + 2\delta$, $\eta_n = \beta_n + 2\delta$.

Подчеркнем, что истинное поглощение β и инкремент δ дают вклад в коэффициент пространственного затухания поля η с одинаковым знаком. Выражение в квадратных скобках под знаком интеграла при $\eta_n \longrightarrow 0$ переходит в $(\pi\omega/2)\delta(\omega_n - \omega)$. Окончательно в этом пределе имеем

$$\mathrm{Im}k = f(n)\frac{\pi\omega^3 m_n}{4\rho c^2\mathrm{Re}k_0}\frac{\partial n}{\partial\omega_n}, \quad (6)$$

n определяется соотношением $\omega_n = \omega$ и $\mathrm{Im}k$ не зависит от η, η_n.

В соответствии с теорией Ландау мы получили конечное значение пространственного декремента для волны даже при исчезающе малом $\eta > 0$. Заметим, что несмотря на аддитивный вклад в η инкремента δ и коэффициента поглощения β, их роль, тем не менее, существенно различна. В каждой точке $x > 0$ колебания нарастают с инкрементом δ. Если же поменять знак у δ, что означает просто изменение граничного условия (3), то при $\delta = 2\beta_n$ пространственный декремент $\mathrm{Im}k$ исчезнет, то есть исчезнет пространственное спадание поля с ростом x, однако во времени колебательный процесс будет теперь затухать с декрементом δ. Подчеркнем, что изменение знака перед β, β_n невозможно: этот знак задан в (1) термодинамическим условием поглощения колебаний.

Со стороны границы, согласно граничному условию (3), имеется поток энергии:

$$Q = \mathrm{Re}[-Ty_x y_t^*] =$$
$$= (Tk\omega - \mathrm{Im}k\delta)\exp(2\delta t)|y(x=0)|^2. \quad (7)$$

Членом $\mathrm{Im}k\delta$ здесь можно пренебречь. Поток энергии, вводимый в систему со стороны границы, расходуется, во-первых, на раскачку осцилляторов (обратимый процесс), во-вторых, часть энергии теряется $\sim\beta$, β_n (необратимый процесс). Естественно, что при $\beta = 0$ процесс обратим во времени: если, начиная с некоторого момента $t_1 > 0$ для всех последующих моментов времени $t = t_1 + \tau$ изменить знак перед τ в граничном условии (3):

$$y(0, t_1 + \tau) = y_0\exp[(-j\omega + \delta)(t_1 - \tau)], \quad (8)$$

то фазовая точка начнет перемещаться вдоль фазовой траектории строго в обратном направлении, как если бы мы просто изменили направление течения времени. При этом скорости точек струны и всех осцилляторов меняют знак. Это означает, что решением системы уравнений (1) являются при этих условиях выражения:

$$y(x, t_1 + \tau) = y(x, t_1)\exp(j\omega\tau - \delta\tau),$$
$$\xi_n(x, t_1 + \tau) = \xi_n(x, t_1)\exp(j\omega\tau - \delta\tau). \quad (9)$$

Заметим, что поток энергии через границу (7) при условии (8) также меняет знак. Это означает, в частности, что энергия, запасенная в осцилляторах на отрезке времени $-\infty < t < t_1$, перетекает теперь в волну и, далее, в сторону источника при $x = 0$. Подставив решения в форме (9) в (2), убеждаемся непосредственным вычислением, что изменяется знак перед производной по времени от суммы кинетической и потенциальной энергии системы:

$$\frac{\partial E}{\partial t} \sim \int f(n)(-2\delta/|-2\delta + \beta_n|)E_n dn.$$

$$E_n \sim (\pi\omega/2)\delta(\omega_n - \omega)|y|^2, \quad \delta, \beta_n \longrightarrow 0.$$

Выражения (9) не являются, однако, решением системы (1) при наличии диссипации. В этом случае решения при граничном условии (8) получаются из (4) также путем замены знака у ω и δ, но теперь это приводит к изменению знака перед β, β_n в выражениях (4), что отнюдь не эквивалентно обращению знака времени. При этом знак диссипативной функции в (2) (группа членов, пропорциональных β, β_n) не меняется. Энергия осцилляторов не полностью возвращается волне, поскольку имеются необратимые потери, пропорциональные β, β_n:

$$E_1 \sim \int E_{1n}dn,$$

$$E_{1n} \sim (\beta_n/|-2\delta + \beta_n|)(\pi\omega/2)\delta(\omega_n - \omega)|y|^2 f(n),$$
$$\delta, \beta_n \longrightarrow 0.$$

Рассмотрим теперь другую постановку задачи: Пусть на бесконечной оси $-\infty < x < \infty$ имеется не затухающая вдоль оси x плоская волна, описываемая выражениями (4) при действительном k (в этом случае $\mathrm{Im}k = 0$). Воспользуемся теперь дисперсионным уравнением (4) для нахождения комплексной частоты колебаний. В результате перехода к пределу β, $\beta_n \longrightarrow 0$ получим, что $\mathrm{Im}\omega = c\mathrm{Im}k$, где $\mathrm{Im}k$ определяется выражением (6). Важно подчеркнуть, что колебательный процесс теперь необратим. Так произошло вследствие выбранного порядка перехода к пределу в интеграле типа (5). Если же положить β, $\beta_n = 0$ уже в интеграле (4) до разделения его на действительную и мнимую части, то мнимой добавки к частоте не будет вовсе. Интеграл в (4) следует теперь понимать в смысле главного значения, и он даст лишь дисперсион-

ную добавку к зависимости $\omega = \omega(k)$. Такой идеальный процесс, разумеется, обратим. Он, однако, невозможен в реальных (не активных) средах с включенными осцилляторами, и конечное затухание Ландау имеет место при сколь угодно малом поглощении в осцилляторах [7].

Для случая, когда диссипация отсутствует, применима теорема Пуанкаре [8, 9] о возврате фазовой траектории в окрестность любой своей точки за характерное время T_0. В рассмотренной предельной модели континуума степеней свободы это время стремится к бесконечности. Однако, при рассмотрении счетного числа присоединенных осцилляторов, это время конечно. Так, если $\omega_n = n\omega_0$, то $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Явление возврата проанализировано для модели с конечным числом осцилляторов в [10]. В этой работе предположено фактически весьма малое, но конечное поглощение в осцилляторах, и поэтому восстановление исходного состояния системы не является полным.

В заключение сформулируем основные выводы работы. Затухание Ландау при строгом отсутствии поглощения в осцилляторах, сцепленных со средой, является обратимым: энергия запасенная в системе осцилляторов, может быть возвращена источнику.

Наличие малого поглощения (которое всегда присутствует в среде и в осцилляторах), приводит к необратимым потерям энергии волны, причем, декремент описывается по-прежнему выражением, аналогичным декременту затухания Ландау, однако, теперь помимо перетекания энергии волны в осцилляторы, имеются также необратимые потери ее энергии. В рассмотренной нами модели они определяются отношением $\beta/2\delta$ в выражениях типа (5).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 96-02-16561-а и 96-15-96608-л).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 574–577.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
3. *Рютов Д.Д.* Аналог затухания Ландау в задаче распространения звуковой волны в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. № 9. С. 446–449.
4. *Soize C.* A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. V. 94. P. 849–865.
5. *Pierce A.D., Sparrow V.W., Russell D.A.* Fundamental structural-acoustic idelizations for structures with fuzzy internals // Vibr. and Acoust. 1995. V. 17. P. 339–348.
6. *Strasberg M., Feit D.* Vibration damping of large structures induced by attached small resonant structures // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 99. P. 335–344.
7. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* Влияние распределения пузырьков по размерам на распространение звука в средах с резонансной дисперсией // Акуст. журн. 1997. № 6. С. 730–736.
8. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
9. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
10. *Weaver R.L.* Mean and mean-square responses of a prototypical master/fuzzy structure // TAM Report № 823. UILU-ENG-96-6010. April 1996. P. 1–22.