АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1998, том 44, № 3, с. 326–330

УДК 534.26

О ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В АКУСТИКЕ

© 1998 г. А. О. Ватульян, Е. В. Садчиков

Ростовский государственный университет

344090 г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 5

Поступила в редакцию 29.03.96 г.

В работе предлагается новый подход при формулировке ГИУ для уравнения Гельмгольца. На основе анализа преобразования Фурье решения соответствующих краевых задач Неймана и Дирихле построено функциональное уравнение, которое можно трактовать как интегральное уравнение 1-го рода с гладким ядром, которое представимо через элементарные функции в отличие от классического варианта ГИУ, где ядра выражаются через цилиндрические функции. Изучен вопрос о практической реализации полученного интегрального уравнения на основе идей МГЭ. Использование при решении возникающих алгебраических систем специального проекционно-итерационного способа позволило получить устойчивые результаты. Алгоритм апробирован на ряде задач, имеющих точное решение (круг, прямоугольник, полукруг). Результаты показали высокую точность в определении собственных частот при небольшом числе элементов.

К проблеме решения уравнения Гельмгольца в ограниченной области приводят многие задачи акустики, электродинамики, теории упругости [1]. К настоящему времени имеется достаточно богатый выбор численных методов для решения таких задач для неканонических областей, например, метод граничных элементов, вариационные методы.

Однако отметим, что при решении смешанных граничных задач возникают сложности, связанные с выбором аппроксимаций либо координатных функций в окрестности точек смены граничных условий. Метод граничных интегральных уравнений [2] и основанный на нем метод граничных элементов [3, 4] позволяет снизить размерность исследуемых задач на единицу и эффективно исследовать как основные краевые задачи для уравнения Гельмгольца, так и задачи определения собственных значений [5]. Отметим, что ядра этих интегральных уравнений выражаются через функции Ханкеля. В настоящей работе строится вариант метода граничных интегральных уравнений на основании подхода, разработанного для исследования колебаний упругих анизотропных тел [6], сводящий основные краевые задачи для уравнения Гельмгольца к интегральному уравнению первого рода с ядром, выражающимся через элементарные функции. Обсуждены способы численной реализации этого подхода, рассмотрен ряд примеров.

1° Рассмотрим в ограниченной односвязной области $V \subset R^n$ с кусочно-гладкой границей $S(n = 2, 3)$ уравнение Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{u} + k^2 \mathbf{u} = 0 \qquad (1)$$

со смешанными граничными условиями вида

$$\mathbf{u}|_{S_1} = f, \quad (\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n})|_{S_2} = g, \quad S_1 \cup S_2 = S. \qquad (2)$$

Применим к уравнению (1) преобразование Фурье с параметром $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, для чего проинтегрируем по области V, преобразуя объемный интеграл в поверхностный на основе теоремы Гаусса-Остроградского. При этом получим:

$$0 = \int_V (\Delta \mathbf{u} + k^2 \mathbf{u}) e^{i(\alpha, \mathbf{x})} dV =$$
$$= (-|\alpha|^2 + k^2)\tilde{\mathbf{u}} + \int_S [(\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n}) - i(\alpha \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}] e^{i(\alpha, \mathbf{x})} dS. \qquad (3)$$

Отсюда получаем равенство, связывающее преобразование Фурье функции $\mathbf{u}$ с ее граничными значениями и значениями ее нормальной производной:

$$(|\alpha|^2 - k^2)\tilde{\mathbf{u}}(\alpha) = \int_S [(\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n}) - i(\alpha, \mathbf{n})\mathbf{u}] e^{i(\alpha, \mathbf{x})} dS, \qquad (4)$$

где

$$\tilde{\mathbf{u}}(\alpha) = \int_V \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{i(\alpha, \mathbf{x})} dV, \quad |\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

$$(\alpha, \mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Заметим, что формальное деление в (4) на $(|\alpha^2| - k^2)$ и нахождение обратного преобразования Фурье приводит к классической формуле Гельмгольца–Кирхгофа [1], на основе которой могут быть сформулированы известные граничные уравнения [1–3].

Поступим иным образом. Отметим, что после деления обеих частей (4) на $|\alpha^2| - k^2$ получим представление $\tilde{u}(\alpha)$ в виде некоторой мероморфной функции от $|\alpha^2|$. С другой стороны, известно, что преобразование Фурье функции, заданной в ограниченной области, есть функция целая [7]. Таким образом, необходимо потребовать обращения в нуль правой части (4) на множестве $|\alpha| = k$, т.е. для $\alpha_j = k\eta_j$ и вводя вектор $\eta = \{\eta_j\}$, придем к соотношению разрешимости

$$\int_S ((\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n}) - ik(\eta, \mathbf{n})\mathbf{u})e^{ik(\eta, \mathbf{x})} dS = 0, \qquad (5)$$

которое можно трактовать как граничное уравнение, связывающее между собой значение функции и ее нормальной производной на границе, причем $|\eta| = 1$, т.е. η пробегает единичную сферу при $n = 3$ и единичную окружность при $n = 2$.

Выполнение граничных условий (2) приводит к следующему интегральному уравнению относительно неизвестных функций $\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n}$ на S_1 и $\mathbf{u}$ на S_2

$$\int_{S_1} (\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n})e^{ik(\eta, \mathbf{x})} dS - \\ -ik\int_{S_2} \mathbf{u}(\eta, \mathbf{n})e^{ik(\eta, \mathbf{x})} dS = F(\eta), \quad |\eta| = 1, \qquad (6)$$

$$F(\eta) = -\int_{S_2} ge^{ik(\eta, \mathbf{x})} dS + ik\int_{S_1} f(\eta, \mathbf{n})e^{ik(\eta, \mathbf{x})} dS.$$

Отметим, что интегральное уравнение вида (6) для несмешанной задачи при помощи формулы Грина построено в [11]. Проанализируем основные достоинства и недостатки уравнения (6).

1. Заметим, что интегральные уравнения для классических задач Дирихле и Неймана получаются из (6) очевидным образом. Кроме того, отметим, что эти уравнения не являются обобщением результатов теории потенциала для уравнения Лапласа, как это имеет место в классических ГИУ [2]. Предельный переход при $k \longrightarrow 0$ приводит к соотношению

$$\int_S (\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n}) dS = 0,$$

которое, как известно, есть условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа.

2. Важным достоинством ГИУ (6) является то обстоятельство, что оно эквивалентно краевой задаче (1)–(2).

3. Ядра интегрального уравнения (6) выражаются через элементарные функции (для сравнения, при $n = 2$ ядра в классическом варианте ГИУ выражаются через функции Ханкеля [3, 4]), однако гладкость ядер для уравнения Фредгольма 1-го рода делает задачу обращения такого оператора некорректной [8]. Несмотря на некорректность общей процедуры обращения оператора Фредгольма 1-го рода с гладким ядром, отметим, что в данном случае правая часть операторного уравнения (6) имеет весьма специфический частный вид, позволяющий судить об ограниченности обратного оператора на этом узком множестве [8]. Об этом также свидетельствует тот факт, что уравнение (6) эквивалентно краевой задаче, для решения которой справедливы соотношения корректности.

4. Уравнения вида (5), (6) позволяют изучать и вопрос о нахождении собственных значений для области V; для их отыскания необходимо, например в (6) положить $F(\eta) = 0$ и найти те значения k, при которых соответствующее (6) однородное уравнение будет иметь нетривиальное решение. Исходя из этого уравнения, очень просто решается вопрос об асимптотике собственных значений, например для круговой области. Этот подход не требует введения цилиндрических функций и изучения их свойств. Например, для задачи Дирихле для круговой области радиуса a ($n = 2$) однородное уравнение, соответствующее (6) имеет вид:

$$\int_L (\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n})e^{ik(\eta, \mathbf{x})} dl = 0, \quad |\eta| = 1. \qquad (7)$$

Вводя $\eta_1 = \cos\varphi$, $\eta_2 = \sin\varphi$ и переходя в уравнении (7) к полярной системе координат, исследуем асимптотику интеграла в (7) методом стационарной фазы [9]. Фаза $S(\psi) = \cos(\varphi - \psi)$ имеет две граничные стационарные точки $\psi_1 = \varphi$ и $\psi_2 = \pi + \varphi$ и уравнение для определения искомой асимптотики имеет вид

$$[(\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n})(\psi_1)e^{ika - i\pi/4} + (\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n})(\psi_2)e^{ika + i\pi/4}] \times \\ \times (2\pi/k\mathbf{a})^{1/2} = 0.$$

Если, кроме того, считать колебания радиальными, то в силу $(\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n})(\psi) = \text{const}$, получим, очевидное уравнение $\cos(ka - \pi/4) = 0$ и $ka = 3/4\pi + \pi m$, $m = 0, 1\ldots$ Эта асимптотика совпадает с известной асимптотикой корней функции Бесселя $J_0(ka)$, которые и определяют собственные значения поставленной задачи.

5. Предложенные ГИУ 1-го рода могут быть использованы для анализа волновых полей и в том случае, когда на части границы S_1 отсутствует информация об $\mathbf{u}$ и $\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n}$, однако на части S_2 известны обе эти величины.

2° Рассмотрим теперь более подробно вопрос о практическом применении интегральных уравнений (5), (6) к конкретным краевым задачам. При этом можно использовать основные идеи классического варианта МГЭ [3, 4], в частности, использовать линейные элементы для аппроксимации криволинейной границы и полиномиальную аппроксимацию неизвестной функции на

элементе. Число элементов N выбирается обычно таким образом, чтобы на длину волны приходилось не менее 8 элементов. При необходимости можно построить решение с высокой степенью точности, как и в классическом методе, увеличив число элементов до некоторого $N_1 > N$, сравнивая относительную погрешность между соответствующими узловыми значениями. Если точность не удовлетворяет, то процесс увеличения N продолжается далее. Удовлетворение уравнению (6) производится на основе метода коллокаций, причем число точек коллокации может выбираться равным или большим числа узловых неизвестных. При этом исходная задача сводится к решению линейной алгебраической системы, возможно переопределенной. Заметим попутно, что коэффициенты получающейся при этом алгебраической системы выражаются в явном виде, что является несомненно достоинством предлагаемого подхода по сравнению с классическим, при использовании которого необходимо вычислять N^2 интегралов от цилиндрических функций, что можно осуществить лишь численно и занимает этот процесс большую часть времени решения задачи. Отметим, что в силу некорректности задачи о решении интегрального уравнения (6) эта система оказывается плохообусловленной; при ее обращении используются специальные алгоритмы.

Приведем расчетные формулы для коэффициентов алгебраической системы, соответствующей интегральному уравнению (6) в самом простом случае, когда неизвестные функции постоянны на элементе ($n = 2$). Границу области в самом простом случае будем обозначать $L = L_1 \cup L_2$; L_1 и L_2 аппроксимируются линейными элементами L_q:

$$L_1 \sim \bigcup_{q=1}^{N_1} L_q, \quad L_2 \sim \bigcup_{q=N_1+1}^{N} L_q.$$

В простейшем варианте аппроксимации неизвестных постоянными на элементе

$$(\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n})|L_q = X_q, \quad q = 1, 2 \ldots N_1,$$
$$u|L_q = X_q, \quad q = N_1 + 1, \ldots N$$

и удовлетворении уравнений методом коллокаций в наборе точек η_p, $p = 1 \ldots N$ для определения неизвестных узловых значений X_q получим линейную алгебраическую систему вида

$$\sum_{q=1}^{N_1} A_{qp} X_q - ik \sum_{q=N_1+1}^{N} B_{qp} X_q = F_p, \quad p = 1, 2 \ldots N, \tag{8}$$

где

$$A_{qp} = \int_{L_q} e^{ik(\eta_p, \mathbf{x})} dl_x,$$
$$B_{qp} = \int_{L_q} (\eta_p, \mathbf{n}) e^{ik(\eta_p, \mathbf{x})} dl_x, \quad F_p = F(\eta_p). \tag{9}$$

Для линейных элементов L_q выражения для A_{pq} и B_{qp} могут быть представлены в виде конечных формул. Пусть x_{jq}^- и x_{jq}^+ – соответственно координаты начала и конца q-го элемента. Введем на q-м элементе параметризацию $x_j = x_{jq} + \beta_{jq} t$, $j = 1, 2$; $q = 1, 2 \ldots N$

$$x_{jq} = 1/2(x_{jq}^+ + x_{jq}^-),$$
$$\beta_{jq} = 1/2(x_{jq}^+ - x_{jq}^-), \quad t \in [-1, 1]. \tag{10}$$

Тогда, переходя к интегрированию по t и вычисляя соответствующие интегралы, находим:

$$A_{qp} = 2 r_q \sin k(\eta_p, \beta_q)/(k(\eta_p, \beta_q)) e^{ik(\eta_p, x_q)}, \tag{11}$$

$B_{qp} = (\eta_p, n_q) A_{qp}$, n_q – вектор нормалей с координатами

$$n_{1q} = \beta_{2q}/r_q, \quad n_{2q} = -\beta_{1q}/r_q, \quad r_q = (\beta_{1q}^2 + \beta_{2q}^2)^{1/2}.$$

Значения F_p, входящих в правую часть системы (8), могут быть вычислены численно на основе квадратурных формул Гаусса; возможно также получение конечных формул через узловые значения заданных функций f на L_1 и g на L_2:

$$F_p = ik \sum_{q=1}^{N_1} f_q B_{qp} - \sum_{q=N_1+1}^{N} g_q A_{qp}. \tag{12}$$

Отметим, что традиционные методы решения системы (8) оказываются неэффективными в силу того, что ее матрица является плохообусловленной ввиду некорректности процедуры обращения оператора Фредгольма с гладким ядром. Поэтому предлагается использовать проекционно-итерационную схему решения, основанную на методе Пейджа–Саундерса [10], позволяющем решать плохообусловленные и переопределенные системы. Предложенная схема решения основных краевых задач апробирована на ряде задач, имеющих аналитическое решение.

3° Численные примеры.

В качестве первого примера рассмотрим задачу Дирихле для круга радиуса 1. В уравнении (6) $f = 1$, $g = 0$, $L_1 = L$, неизвестной является функция $\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n}$ на контуре. В табл. 1 в первых 4-х колонках приведены значения неизвестной $\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n}$ в зависимости от числа элементов для разных частот; в первой строке приведено значение этой

Таблица 1

N/k	0.1	2	3	4	$k1$	$k2$	$k3$
	−0.00500	−5.1514	3.9111	−0.6648	2.4048	5.5201	8.6537
8	−0.00462	−4.0059	5.6358	0.1462	2.5334	5.7865	9.2678
16	−0.00491	−4.8141	4.2674	−0.4599	2.4360	5.5917	8.7661
32	−0.00498	−5.0634	3.9969	−0.6135	2.4126	5.5379	8.6816
50	−0.00499	−5.1152	3.9461	−0.6439	2.4085	5.5277	8.6654
60	−0.00499	−5.1264	3.9355	−0.6504	2.4076	5.5257	8.6625
70	−0.00500	−5.1331	3.9291	−0.6543	2.4066	5.5238	8.6595
80	−0.00500	−5.1357	3.9246	−0.6568	2.4066	5.5238	8.6582

же величины, найденное по точной формуле $\mathbf{u} = -kJ_1(k)/J_0(k)$.

В последних 3-х колонках приводятся первые 3 собственных числа этой же задачи в зависимости от числа используемых элементов, причем в 1 строке приведены точные значения частот.

Расчет показывает достаточную эффективность и надежность предлагаемого способа даже при небольшом числе используемых элементов (погрешность в определении первых 3-х частот менее 1%).

Второй пример – смешанная задача для прямоугольника:

$$L_1 = \{|x_1| \le a, x_2 = \mp b\},$$

$$L_2 = \{x_1 = \mp a, |x_2| \le b\},$$

$$a/b = 3/4, \quad f = 1, \quad g = 0.$$

Третий пример – задача Дирихле для полукруга:

$$L_1 = L = \{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \ge 0\}, \quad f = 0.$$

В табл. 2 приведены значения первых трех частот для прямоугольника и полуокружности для разных N, причем в первой строке приведены точные значения резонансных частот. Расчеты показывают достаточную эффективность алгоритма.

Замечание 1. Элементы матриц A_{qp} и B_{qp}, вообще говоря, комплексные величины, а вектор неизвестных X_q – вещественный по смыслу задачи. Поэтому при численном решении (8) можно использовать лишь вещественные части этих матриц и правых частей, возможно решение переопределенной системы, результаты в обоих случаях разнятся незначительно.

Замечание 2. Серия численных расчетов для различных конфигураций показала несомненную простоту реализации предложенной схемы для определения собственных частот. При анализе граничных полей, по возможности, необходимо использовать априорную информацию. При этом необходимо использовать априорную информацию о решении [8], в частности при наличии угловых точек в области S или точек смены граничных условий нужно использовать специальные граничные элементы, где в качестве аппроксимирующих брать функции, учитывающие структуру решения задачи в окрестности особых точек. При этом такая схема использования метода граничного элемента позволяет отыскивать решение в более узком классе функций, что дает возможность строить обратный оператор к оператору Фредгольма 1-го рода, который, вообще говоря, может не иметь обратного на более широком классе функций.

Замечание 3. Отметим, что идеи, лежащие в основе альтернативного подхода, конечно же не ограничиваются рамками краевых задач для уравнения Гельмгольца, для решения которых имеется достаточный арсенал численных методов [2, 3]. Этот подход может быть перенесен на более сложные случаи распространения волн в ограниченной среде, например на анизотропные среды. В анизотропном случае классический вариант метода ГИУ наталкивается на серьезные трудности, связанные с отсутствием явного представления фундаментальных решений для анизотропной среды. Подход, предлагаемый в настоящей работе, не использует понятие фундаментального решения и позволяет сразу формировать алгебраические системы, связывающие узловые значения известных и неизвестных величин. Несмотря на плохую обусловленность этих систем, как показывают расчеты для уравнения Гельмгольца, применение для их решения проекционно-итерационного метода достаточно эффективно.

Таблица 2

N/k	Прямоугольник			Полуокружность		
	$k1$	$k2$	$k3$	$k1$	$k2$	$k3$
	0.3927	1.1781	1.9635	3.8320	7.0160	10.173
8	0.3933	1.2443	1.7444	4.0382	7.4100	10.6592
16	0.3999	1.1784	1.9838	3.8815	7.1068	10.3052
32	0.3999	1.1781	1.9640	3.8440	7.0382	10.2062

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Код проекта 97-01-00633.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
2. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
3. *Галишникова Т.Н., Ильинский А.С.* Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1987. 207 с.
4. *Бреббия Л., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
5. *Kamiya N., Andoh E.* Вычисление собственных значений уравнения Гельмгольца методом граничных элементов // J. Sound and Vibr. 1993. 160. № 2. P. 279–287.
6. *Ватульян А.О.* О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // ДАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 312–314.
7. *Титчмарш Е.К.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л., 1948.
8. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
9. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
10. *Paige C.C., Saunders M.A.* An algorithn for sparse linear equations and sparse least squares // ASM Trans. Math. Softw. 1982. V. 8. P. 43–71. P. 195–209.
11. *Cheung Y.K., Jin W.G., Zienkiewicz O.C.* Solution of Helmholtz Equation by Trefftz method // Int. J. Numer. Methods Eng. 1991. 32. P. 63–68.

A New Formulation of Boundary Integral Equations

A. O. Vatul'yan and E. V. Sadchikov

This paper introduces a new formulation of boundary value integral equations for the Helmholtz equation. From an analysis of the Fourier transformed solution of the respective boundary-value Neumann and Dirichlet problems we derived a functional equation that can be treated as an integral equation of the first kind with a smooth kernel. In contrast to the classical version where kernels are expressed through cylindrical functions, this equation is expressed in terms of elementary functions. The practical realization of the derived integral equation in the context of the method of boundary elements was studied. A special projection-iteration method used to solve the resultant algebraic problems yielded stable results. The solution algorithm was tested on several geometries that have exact solutions (circle, rectangle, and semicircle). Results proved a high accuracy in the evaluation of resonance frequencies even with a small number of boundary elements.