АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 5, с. 703–704

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.23

СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ИМПЕДАНСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ПОТОКА КОМПЛЕКСНОЙ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧАТЕЛЯ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

© 1997 г. Ю. И. Бобровницкий

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
101830 Москва, ул. Грибоедова, 4

Поступила в редакцию 22.01.97 г.

В связи с практической потребностью в простых методах прогнозирования акустических уровней в проектируемых инженерных конструкциях, например, в космических аппаратах, на скоростном транспорте и др. в акустической литературе последних лет возрос интерес к изучению структуры и общих свойств звуковых полей и источников звука, в особенности к исследованию их квадратичных (энергетических) характеристик (см., например, [1, 2]). В настоящей заметке выводится новое соотношение для интегрального потока комплексной мощности излучателя конечных размеров и дается его физическая интерпретация.

Полный поток F комплексной мощности от излучающей поверхности S колеблющегося тела (излучателя) и комплексный импеданс излучения Z определяются следующим образом [3]:

$$F = I + iQ = -0.5\iint_S p\mathbf{v}^* d\mathbf{S},$$
$$Z = R + iX = 2F/|v_0|^2. \qquad (1)$$

Здесь p – комплексная амплитуда давления, $\mathbf{v}$ – вектор комплексных амплитуд скорости частиц среды, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ – элемент площади поверхности тела, направленный по нормали $\mathbf{n}$, внешней по отношению к среде, знак (*) указывает на эрмитово сопряжение, v_0 – амплитуда некоторой опорной скорости, в качестве которой обычно берут максимальную или среднюю на S нормальную скорость. Подразумевается гармоническая зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ с круговой частотой ω.

Действительная часть I потока (1) представляет собой активную звуковую мощность, излученную источником на бесконечность. Она, как известно [3], может быть также вычислена более просто, путем интегрирования по сфере большого радиуса S_r:

$$I = (1/2\rho c)\iint_{S_r}|p|^2 dS, \quad R = 2I/|v_0|^2. \qquad (2)$$

Мнимая часть Q потока (1) характеризует реактивную, не уходящую от источника, энергию ближнего поля, которая приравнивается кинетической энергии так называемой присоединенной массы [3]. Соотношение, полученное в данном сообщении, уточняет это положение, связывая, аналогично (2), мнимую часть потока Q с интегральными характеристиками поля. Именно, имеют место равенства:

$$Q = -2\omega L, \quad X = -4\omega L/|v_0|^2, \qquad (3)$$

где усредненная по времени функция Лагранжа L равна разности между кинетической и потенциальной энергиями, взятыми во всем пространстве V, внешнем по отношению к излучателю:

$$L = (1/4)\iiint_V(\rho\mathbf{v}^*\mathbf{v} - p^*p/\rho c^2)dV. \qquad (4)$$

Физический смысл соотношения (3) состоит в следующем. Кинетическая энергия любой линейной механической системы в среднем равна потенциальной энергии только в случае свободных колебаний. При вынужденных колебаниях на нерезонансных частотах они не равны и если $L > 0$, то говорят, что по отношению к данным внешним усилиям система ведет себя как масса, а если $L < 0$ – как упругость.

Для звукового поля в неограниченном пространстве средние кинетическая и потенциальная энергии равны между собой, только когда поле представляет собой свободное движение такое, например, как распространение плоской волны или собственное колебание газового пузырька в жидкости. Поле акустического излучателя конечных размеров в общем случае есть результат вынужденных колебаний с неравной нулю функцией Лагранжа. Как правило, реакция среды на такой излучатель является инерционной, т.е. в поле имеет место избыток кинетической энергии, который равен энергии присоединенной массы. Величина присоединенной массы M_{add}, как следует из (3), может быть также вычислена через функцию Лагранжа:

$$M_{add} = -X/\omega = 4L/|v_0|^2. \qquad (5)$$

Если же в системе "излучатель–среда" возможны свободные колебания, то на собственной частоте кинетическая энергия равна потенциальной энергии и реактивная компонента звукового поля отсутствует. На других частотах функция Лагранжа может быть и отрицательной, что означает, что реакция среды упругая и характеризуется "присоединенной упругостью", величину которой можно вычислить по избытку потенциальной энергии аналогично (5). Примером такого излучателя является пульсирующая открытая цилиндрическая оболочка, поле которой в литературе хорошо изучено, например, в работах [4, 5], где показано, что на частотах собственных колебаний внутренней полости оболочки реактивная компонента мощности излучения равна нулю, а на соседних частотах реактивное поле носит как упругий, так и инерционный характер. Таким образом, смысл полученного соотношения (3) состоит в том, что реактивная мощность излучения Q пропорциональна нескомпенсированной (избыточной) кинетической или потенциальной энергии звукового поля. Другими словами, реактивная мощность Q характеризует степень удаленности от резонанса вынужденных колебаний системы "излучатель–среда".

Приведем теперь строгое доказательство соотношения (3). Рассмотрим пространство V между поверхностью S излучателя и поверхностью S_r сферы большого радиуса r, целиком окружающей излучатель. В подынтегральное выражение функции Лагранжа (4) подставим выражения:

$$\mathbf{v} = (1/ik\rho c)\,\mathrm{grad}p, \quad p^* = (-\rho c/ik)\,\mathrm{div}\mathbf{v}^*,$$

которые непосредственно следуют из уравнений Эйлера и неразрывности [6]. В результате получаем при $r \longrightarrow \infty$

$$L = (1/4i\omega)\iiint\limits_V \mathrm{div}(p\mathbf{v}^*)dV =$$

$$= (-1/4i\omega)\int\limits_{S+S_r}\int p\mathbf{v}^* d\mathbf{S} =$$

$$= (-1/2i\omega)(F-I) = -Q/2\omega,$$

откуда и следует соотношение (3). Здесь были использованы теорема Остроградского–Гаусса и известный факт, что реактивный поток через сферу бесконечно большого радиуса равен нулю. Отметим, что соотношение (3) можно вывести также путем интегрирования локальных соотношений для квадратичных величин звукового поля, приведенных, например, в работе [1].

Автор проверил полученное соотношение для сферического излучателя радиуса a, на поверхности которого задано распределение нормальной скорости в виде произвольной сферической гармоники: $v_r = v_0 Y_{nm}(\theta, \varphi)$. Поле такого излучателя описывается функциями [7]:

$$p(r, \theta, \varphi) = i\rho c v_0 Y_{nm}(\theta, \varphi) h_n(kr)/h_n'(ka),$$

$$\mathbf{v}(r, \theta, \varphi) = (1/ik\rho c)\,\mathrm{grad}p(r, \theta, \varphi),$$

где (r, θ, φ) – сферические координаты, $h_n(kr)$ – сферическая функция Ганкеля первого рода. Вычисление потока комплексной мощности непосредственно по формуле (1) и по формулам (2)–(4) дало тождественно равные результаты. Интересно, что кинетическая и потенциальная энергии поля порознь бесконечны, но их разность конечна.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-02-18404а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mann J.E., III, Tichy J., Romano A.J.* Instantaneous and time-averaged energy transfer in acoustic fields // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. № 1. P. 17–30.
2. *Zhe J.* Decomposition theorem of sound intensity with application // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 97. № 1. P. 25–33.
3. *Смарышев М.Д.* Направленность гидроакустических антенн. Л.: Судостроение, 1973. 280 с.
4. *Томилина Т.М.* Импеданс излучения полого цилиндрического излучателя // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 122–126.
5. *Шендеров Е.Л.* Излучение звука при осесимметричных колебаниях конечной открытой трубы // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 138–147.
6. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
7. *Скучик Е.* Основы акустики: Пер. с англ. в 3 т. М.: Мир, 1976. Т. 2. 542 с.