АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 6, с. 741–747

УДК 550.34+550.834

# ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В УПРУГОЙ ОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

© 1996 г. А. В. Бакулин, Л. Г. Тюриков

*Санкт-Петербургский государственный университет*
*199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9*

Поступила в редакцию 11.07.95 г.

Для точечного источника, действующего в упругой однородной безграничной среде с анизотропией общего вида, новым способом получено представление матрицы Грина в виде интеграла по поверхности единичной сферы. Оно позволяет получить во временнóй области простые выражения для поля смещений от сосредоточенного источника с произвольной зависимостью от времени. Проводится преобразование статического члена матрицы Грина к виду, удобному для вычислений. В заключение выводится высокочастотная асимптотика матрицы Грина.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как показывают сейсмические исследования, трансверсальная и даже орторомбическая анизотропия присущи в той или иной степени всем типам пород, в особенности осадочным и метаморфическим. При этом считается [1], что в большинстве случаев причиной ее возникновения (наряду с тонкой слоистостью) является ориентированная трещиноватость [2, 3]. Проблема определения ориентировки и интенсивности трещиноватости дистанционными геофизическими методами является весьма важной на всех стадиях разведки и разработки нефтяных и газовых месторождений. От ее правильного решения зависит многое, особенно в случае пород-коллекторов, где трещиноватость определяет основные фильтрационные свойства [4]. Кроме того, есть много других геологических и технических задач, в которых необходимо дистанционное изучение трещиноватости [1, 2].

Поэтому изучение распространения волн от точечных источников в анизотропных средах имеет важные практические следствия. В безграничных однородных средах важная роль отводится построению матрицы Грина. В отличие от работ [5–8] в настоящей статье приведен новый способ вывода интегрального представления матрицы Грина, позволяющий простым образом получить выражение для поля смещений от сосредоточенного источника с произвольной зависимостью от времени. При этом показывается, что статический член может быть сведен к однократному интегралу, который легко вычисляется с использованием теоремы о вычетах. С помощью метода стационарной фазы находится главный член асимптотики полученного решения для случая невырожденных стационарных точек. Следует обратить внимание, что в работе [6] при выводе выражения для смещения, вызванного точечным источником с произвольной временнóй функцией, была допущена ошибка, и в окончательном выражении (см. (C20), [6]) отсутствует статический член (здесь первый член (29)). Применение метода Радона в стационарном случае [5, 8] дает выражение, соответствующее выражению (26) настоящей статьи.

## 2. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ГРИНА

В математическом отношении задача сводится к отысканию решения системы дифференциальных уравнений:

$$\partial_t^2 u_i - \lambda_{ijkl}\partial_j\partial_k u_l = F(\mathbf{x}, t)e_i, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$, $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $\partial_t^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\lambda_{ijkl}$ – тензор нормированных на плотность упругих постоянных, $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$, так что $\mathbf{x}^T$ – вектор-строка, $\mathbf{x}$ – вектор-столбец, $T$ – значок транспонирования. Искомое решение подчиняется условиям:

$$u_i(\mathbf{x}, t) \equiv 0 \text{ при } t < 0. \tag{2}$$

Используя оператор Гамильтона $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^T$, удобно ввести матрицу:

$$\Lambda(\nabla) = \|\Lambda_{il}(\nabla)\| = \|\lambda_{ijkl}\partial_j\partial_k\|, \tag{3}$$

и записать уравнение (1) в матричном виде:

$$[\partial_t^2 E - \Lambda(\nabla)]\mathbf{U} = F(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}, \tag{4}$$

где $\mathbf{U}^T = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{e}^T = (e_1, e_2, e_3)$, $E$ – трехмерная единичная матрица.

В качестве $F(\mathbf{x}, t)$ возьмем дельтаобразный источник:

$$F(\mathbf{x}, t) = f(t)\frac{\varepsilon}{\pi^2(|\mathbf{x}|^2+\varepsilon^2)^2}, \quad \varepsilon > 0, \tag{5}$$

где $f(t)$ – произвольная функция такая, что $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. При этом

$$\frac{\varepsilon}{\pi^2(|\mathbf{x}|^2+\varepsilon^2)^2} \longrightarrow \delta(\mathbf{x}) \text{ при } \varepsilon \longrightarrow 0, \tag{6}$$

$\delta(\mathbf{x})$ – трехмерная дельта-функция Дирака. Соотношение (6) доказывается путем вычисления преобразования Фурье функции источника:

$$\int\limits_{R^3} \exp[-i\mathbf{kx}]\frac{\varepsilon}{\pi^2(|\mathbf{x}|^2+\varepsilon^2)^2}d\mathbf{x} = \exp[-\varepsilon|\mathbf{k}|]. \tag{7}$$

Взяв теперь преобразование Фурье по времени и по пространственным переменным от обеих частей уравнения (4) и учитывая (7), получим:

$$[\Lambda(\mathbf{k}) - \omega^2 E]\mathbf{U}(\mathbf{k}, \omega) = \exp[-\varepsilon|\mathbf{k}|]f(\omega)\mathbf{e}. \tag{8}$$

Здесь

$$\mathbf{U}(\mathbf{k}, \omega) = \int\limits_0^\infty \exp[i\omega t]dt\int\limits_{R^3}\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)\exp[-i\mathbf{kx}]d\mathbf{x}, \tag{9}$$

где $\operatorname{Im}\omega > 0$. В этом случае обратное преобразование Фурье по $\omega$ выразится равенством:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+i0}^{+\infty+i0}\mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega)\exp[-i\omega t]d\omega, \tag{10}$$

которое, как хорошо известно, обеспечивает выполнение условия (2). Для краткости мы обозначаем символом $\mathbf{U}$ различные функции, указывая аргументом области, где они рассматриваются.

Используя разложение $[\Lambda(\mathbf{k}) - \omega^2 E]$ по собственным векторам, запишем решение (8) в виде:

$$\mathbf{U}(\mathbf{k}, \omega) = f(\omega)\exp[-\varepsilon|\mathbf{k}|]\sum_{j=1}^{3}\frac{\mathbf{A}_j(\mathbf{n})\mathbf{A}_j^T(\mathbf{n})}{\mathbf{k}^2\nu_j^2(\mathbf{n}) - \omega^2}\mathbf{e}, \tag{11}$$

где учтено, что $\nu(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|\nu(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, $\mathbf{A}_j(\mathbf{n})$ – собственный вектор матрицы $\Lambda(\mathbf{n})$, соответствующий собственному числу $\nu_j^2(\mathbf{n})$, причем такой, что $|\mathbf{A}_j(\mathbf{n})| = 1$, $T$ – значок транспонирования. Поскольку для любых $f(\omega)$ и $\mathbf{e}$ (11) можно представить в форме:

$$\mathbf{U}(\mathbf{k}, \omega) = G(\mathbf{k}, \omega)f(\omega)\mathbf{e}, \tag{12}$$

то будем преобразовывать только $G(\mathbf{k}, \omega)$. Нетрудно видеть, что эта матрица будет являться матрицей Грина волнового уравнения (1).

Нашей дальнейшей целью является сведение трехкратного внутреннего интеграла (9) к двухкратному. В силу (9) и (11) имеем:

$$G(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\int\limits_{R^3}\sum_{j=1}^{3}\frac{P_j(\mathbf{n})}{\mathbf{k}^2\nu_j^2(\mathbf{n}) - \omega^2}\exp[i|\mathbf{k}|(\mathbf{nx} + i\varepsilon)]d\mathbf{k}, \tag{13}$$

где $P_j(\mathbf{n}) = \mathbf{A}_j(\mathbf{n})\mathbf{A}_j^T(\mathbf{n})$ – проектор на направление $\mathbf{A}_j$. Переходя в (13) к сферической системе координат и обозначая $s = |\mathbf{k}|$, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, получим соотношение:

$$G(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega\int\limits_0^\infty\sum_{j=1}^{3}\frac{P_j(\mathbf{n})s^2}{s^2\nu_j^2(\mathbf{n}) - \omega^2}\exp[is(\mathbf{nx} + i\varepsilon)]ds, \tag{14}$$

в котором $\mathbf{n}^T = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Представим (14) в виде суммы двух членов $G_s$ и $G_d$:

$$G_s = \frac{1}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega\int\limits_0^\infty\sum_{j=1}^{3}\frac{P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^2(\mathbf{n})}\exp[is(\mathbf{nx} + i\varepsilon)]ds, \tag{15}$$

$$G_d = \frac{1}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega\int\limits_0^\infty\sum_{j=1}^{3}\frac{P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^2(\mathbf{n})}\frac{\omega^2}{s^2\nu_j^2(\mathbf{n}) - \omega^2}\exp[is(\mathbf{nx} + i\varepsilon)]ds \tag{16}$$

и вычислим внутренние интегралы по $s$.

Для вычисления (15) воспользуемся соотношением:

$$\int\limits_0^\infty\exp[is(\mathbf{nx} + i\varepsilon)]ds = \frac{1}{\varepsilon - i(\mathbf{nx})}. \tag{17}$$

Учитывая (17), а также независимость $\nu_j(\mathbf{n})$ и $P_j(\mathbf{n})$ от направления нормали: $\nu_j(-\mathbf{n}) = \nu_j(\mathbf{n})$, $P_j(-\mathbf{n}) = P_j(\mathbf{n})$, можно заметить, что мнимая часть (15) обращается в нуль. Поэтому, получаем:

$$G_s = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega\frac{\varepsilon}{(\mathbf{nx})^2 + \varepsilon^2}\sum_{j=1}^{3}\frac{P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^2(\mathbf{n})}. \tag{18}$$

Совершая в (18) предельный переход $\varepsilon \longrightarrow 0$ и используя хорошо известное соотношение $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + z^2} = \pi\delta(z)$, в котором $\delta(z)$ – одномерная дельта-функция, получим:

$$G_s = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \delta(\mathbf{nx}) \Lambda^{-1}(\mathbf{n}). \tag{19}$$

Теперь обратимся к (16). Поскольку внутренний интеграл по $s$ равномерно сходится относительно параметра $\varepsilon \geq 0$, мы можем совершить предельный переход $\varepsilon \longrightarrow 0$ под знаком интеграла. Далее, делая последовательно замены переменных $\mathbf{n} \longrightarrow -\mathbf{n}$, $s \longrightarrow -s$, преобразуем (16) к виду:

$$G_d = \frac{1}{16\pi^3} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^2(\mathbf{n})} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{s^2 \nu_j^2(\mathbf{n}) - \omega^2} \exp[is(\mathbf{nx})] ds. \tag{20}$$

Для вычисления внутренних интегралов типа:

$$I_j = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[is(\mathbf{nx})]}{s^2 \nu_j^2(\mathbf{n}) - \omega^2} ds \tag{21}$$

воспользуемся теоремой о вычетах. Подынтегральное выражение (21) имеет полюса в точках $s = \pm\omega/\nu_j$. По лемме Жордана при $\mathbf{nx} > 0$ ($\mathbf{nx} < 0$) можем замкнуть контур в верхнюю (нижнюю) полуплоскость ($s$). При этом, с учетом того, что $\operatorname{Im}\omega > 0$, контур охватывает одну особую точку $s = \omega/\nu_j$ ($s = -\omega/\nu_j$). В результате для $\mathbf{nx} > 0$ имеем

$$I_j = \frac{i\pi}{\omega\nu_j} \exp\left[i\frac{\omega}{\nu_j}\mathbf{nx}\right], \tag{22}$$

а для $\mathbf{nx} < 0$

$$I_j = \frac{i\pi}{\omega\nu_j} \exp\left[-i\frac{\omega}{\nu_j}\mathbf{nx}\right], \tag{23}$$

где учтено, что верхняя полуокружность обходится в положительном направлении, а нижняя – в отрицательном. Объединяя (22) и (23), получаем:

$$I_j = \frac{i\pi}{\omega\nu_j} \exp\left[i\frac{\omega}{\nu_j}|\mathbf{nx}|\right]. \tag{24}$$

В результате выражение (16) преобразуется к виду:

$$G_d = \frac{i\omega}{16\pi^2} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^3(\mathbf{n})} \exp\left[i\frac{\omega}{\nu_j}|\mathbf{nx}|\right]. \tag{25}$$

Матрица Грина после преобразований представится выражением:

$$G(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \delta(\mathbf{nx}) \Lambda^{-1}(\mathbf{n}) + \\ + \frac{i\omega}{16\pi^2} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^2(\mathbf{n})} \exp\left[i\frac{\omega}{\nu_j}|\mathbf{nx}|\right]. \tag{26}$$

Поле смещений от точечного источника с произвольной зависимостью от времени $f(t)$, в направлении вдоль вектора $\mathbf{e}$, выразится равенством:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \frac{f(t)}{8\pi^2} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \delta(\mathbf{nx}) \Lambda^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{e} - \\ - \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{f'(t - |\mathbf{p}_j\mathbf{x}|) P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^3(\mathbf{n})} \mathbf{e}. \tag{27}$$

Используя тождество $1 = H(\mathbf{px}) + H(-\mathbf{px})$, где $H(t)$ – функция Хевисайда, можно преобразовать (26), (27) к виду:

$$G(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \delta(\mathbf{nx}) \Lambda^{-1}(\mathbf{n}) + \\ + \frac{i\omega}{8\pi^2} \int\limits_{(\mathbf{px})>0} d\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^3(\mathbf{n})} \exp[i\omega(\mathbf{px})], \tag{28}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \frac{f(t)}{8\pi^2} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \delta(\mathbf{nx}) \Lambda^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{e} - \\ - \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega H(\mathbf{nx}) \sum_{j=1}^{3} \frac{f'(t - |\mathbf{p}_j\mathbf{x}|) P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^3(\mathbf{n})} \mathbf{e}. \tag{29}$$

При $f(t) = H(t)$, используя (29) и заменяя $\delta(t - \mathbf{px})H(\mathbf{px})$ на $\delta(t - \mathbf{px})H(t)$, получим:

$$\mathbf{U}_H(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t)}{8\pi^2} \left\{ \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \delta(\mathbf{nx}) \Lambda^{-1}(\mathbf{n}) - \\ - \int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\delta(t - \mathbf{p}_j\mathbf{x}) P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^3(\mathbf{n})} \right\} \mathbf{e}. \tag{30}$$

Чтобы получить подобное выражение в случае $f(t) = \delta(t)$, продифференцируем (30). Если учесть, что $\delta(t - \mathbf{px})\delta(t) = \delta(\mathbf{px})\delta(t) = \nu\delta(\mathbf{nx})\delta(t)$ и $\sum_{j=1}^{3} P_j(\mathbf{n})/\nu_j^2(\mathbf{n}) = \Lambda^{-1}(\mathbf{n})$, нетрудно убедиться в

равенстве нулю произведения $\delta(t)$ на выражение, стоящее в скобках в (30). Тогда

$$\mathbf{U}_\delta(x,t) = -\frac{H(t)}{8\pi^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\mathbf{n}|=1} d\Omega \sum_{j=1}^{3}\frac{\delta(t-\mathbf{p}_j\mathbf{x})P_j(\mathbf{n})}{\nu_j^3(\mathbf{n})}\mathbf{e}. \quad (31)$$

Формула (28) работы [7] после упрощений дает выражение (31).

## 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ МАТРИЦЫ ГРИНА

Первый член в выражениях (26), (27) будем называть для краткости статической матрицей Грина. Здесь нашей целью является его упрощение и сведение к виду, удобному для вычисления. Для этого введем новую систему координат ($\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$, $\tilde{k}_3$), повернутую относительно старой системы ($k_1, k_2, k_3$) вокруг оси $k_1$ на угол $\psi$ такой, что

$$\sin\psi = \frac{x_3}{r}, \quad \cos\psi = \frac{x_2}{r}, \quad (32)$$

где ($x_1$, $x_2$, $x_3$) – координаты вектора $\mathbf{x}$, $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. При этом координаты нормали $\tilde{\mathbf{n}}$ в новой и исходной системах будут связаны равенством:

$$\tilde{\mathbf{n}} = W\mathbf{n}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}. \quad (33)$$

При преобразовании (33) матрица $\Lambda(\mathbf{n})$ заменится на

$$\hat{\Lambda}(\tilde{\mathbf{n}}) = \Lambda(W^T\tilde{\mathbf{n}}), \quad (34)$$

а скалярное произведение $\mathbf{nx}$ на $(\tilde{n}_1 x_1 + \tilde{n}_2 r)$ или $\tilde{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{x}}$, где $\hat{\mathbf{x}}^T = (x_1, r, 0)$.

Статическая матрица Грина в новой системе координат примет вид:

$$G_s(\mathbf{x},t) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\tilde{\phi}\int\limits_0^{\pi}\sin\tilde{\theta}\,\delta(\tilde{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{x}})\hat{\Lambda}^{-1}(\tilde{\mathbf{n}})d\tilde{\theta}, \quad (35)$$

где $\tilde{\mathbf{n}} = (\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\phi}, \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\phi}, \cos\tilde{\theta})^T$; $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$ – полярные координаты, связанные с системой ($\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$, $\tilde{k}_3$). Опуская знак ~ в дальнейшем, производя замену переменной $u = \mathrm{ctg}\,\theta$, $du = -d\theta/\sin^2\theta$ и вводя вместо $\mathbf{n}$ вектор $\mathbf{m}^T = (\cos\phi, \sin\phi, u)$ или $\mathbf{m} = \mathbf{n}/\sin\theta$, а также учитывая, что $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$, $\Lambda^{-1}(\mathbf{n}) = \Lambda^{-1}(\mathbf{m})/\sin^2\theta$, $\nu_k(\mathbf{n}) = \sin\theta\nu_k$ и $P_k(\mathbf{n}) = P_k(\mathbf{m})$, имеем:

$$G_s(\mathbf{x},t) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\phi\int\limits_{-\infty}^{+\infty} du\,\delta(\mathbf{m}\hat{\mathbf{x}})\hat{\Lambda}^{-1}(\mathbf{m}). \quad (36)$$

Далее, полагая

$$x_1 = R\cos\phi_0, \quad r = R\sin\phi_0, \quad (37)$$

где $R = |x| = \sqrt{x_1^2 + r^2}$, получим

$$G_s(\mathbf{x},t) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} du\,\delta[R\cos(\phi-\phi_0)]\hat{\Lambda}^{-1}\begin{pmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi \\ u\end{pmatrix}. \quad (38)$$

Аргумент $\delta$-функции в (38) обращается в нуль при двух значениях $\phi_{1,2} = \phi_0 \pm \frac{\pi}{2}$, причем $\sin\phi_{1,2} = \pm\cos\phi_0$, $\cos\phi_{1,2} = \mp\sin\phi_0$. Интегрируя по $\phi$ и учитывая, что элементы матрицы $\Lambda$ – однородные формы второй степени от своих аргументов, запишем окончательное выражение для статического члена матрицы Грина:

$$G_s(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi^2 R}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} du\,\hat{\Lambda}^{-1}\begin{pmatrix}\sin\phi_0 \\ -\cos\phi_0 \\ u\end{pmatrix}. \quad (39)$$

Интеграл (39) вычисляется с помощью вычетов в корнях определителя матрицы $\hat{\Lambda}\begin{pmatrix}\sin\phi_0 \\ -\cos\phi_0 \\ u\end{pmatrix}$ из (34).

## 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ГРИНА

Для оценки главной части поля (28) при $|\omega||x| \longrightarrow \infty$ воспользуемся методом стационарной фазы [9]. Поскольку во втором члене выражения (28) интегрирование производится по поверхности полусферы, ограниченной окружностью $\mathbf{px} = 0$, то в соответствии с [9], кроме вклада от стационарных точек фазовой функции $S(\mathbf{p}) = \mathbf{px}$, следует также учесть вклад от границы

области интегрирования. Покажем, что вклад от границы взаимно уничтожается со статическим членом (39). Для этого произведем во втором слагаемом (28) преобразования, идентичные (32)–(37) раздела 2. В результате он запишется в виде:

$$G_d = \frac{i\omega}{8\pi^2}\int\limits_{\phi_0-\frac{\pi}{2}}^{\phi_0+\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} du \times \tag{40}$$

$$\times \sum_{j=1}^{3} \frac{\hat{P}_j(\mathbf{m})}{\hat{\nu}_j^3(\mathbf{m})} \exp\left[\frac{i\omega R\cos(\phi-\phi_0)}{\hat{\nu}_j(\mathbf{m})}\right],$$

где $\phi$, $\phi_0$, $u$ – переменные, введенные в разделе 2, а $P(\mathbf{n})$, $\nu(\mathbf{n})$ трансформируются в $\hat{P}(\mathbf{m})$, $\hat{\nu}(\mathbf{m})$ также как и $\Lambda(\mathbf{n})$ в $\hat{\Lambda}(\mathbf{m})$ (см. (34), (36)). При этом, интегрирование по полусфере заменится на интегрирование по бесконечному полуцилиндру единичного радиуса: $\phi_0 - \frac{\pi}{2} < \phi < \phi_0 + \frac{\pi}{2}$ в координатах $u$, $\phi$.

Для интегралов типа:

$$F(\omega) = \int\limits_{\Omega} \Phi(\chi)\exp[i\omega S(\chi)]d\chi \tag{41}$$

известно, что в случае, если фазовая функция $S(\chi) = S_0 = \text{const}$ на границе области интегрирования $\partial\Omega$, главная часть вклада от границы представляется равенством ([9], с. 141):

$$F(\omega, \partial\Omega) = \frac{\exp[i\omega S_0]}{i\omega}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial S(\chi)}{\partial\nu}|\nabla S(\chi)|^{-2}\Phi(\chi)d\sigma, \tag{42}$$

в котором $d\sigma$ – элемент границы $\partial\Omega$, $\frac{\partial S(\chi)}{\partial\nu}$ – производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$. В нашем случае фазовая функция $S(\phi, u) = \frac{R\cos(\phi-\phi_0)}{\hat{\nu}(\mathbf{m})}$, а границами полуцилиндра являются две бесконечные прямые, параллельные оси $u$ с координатами $\phi = \phi_0 \pm \frac{\pi}{2}$. При этом

$$\left.\frac{\partial S}{\partial\nu}\right|_{\phi=\phi_0\pm\frac{\pi}{2}} = \mp\left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=\phi_0\pm\frac{\pi}{2}} = R/\hat{\nu}(\mathbf{m}_{1,2}),$$
$$|\nabla S|^2\Big|_{\phi=\phi_0\pm\frac{\pi}{2}} = \left.\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\right|_{\phi=\phi_0\pm\frac{\pi}{2}}, \tag{43}$$

где $\mathbf{m}_{1,2} = (\mp\sin\phi_0, \pm\cos\phi_0, u)$. С учетом (41), (42) главная часть вклада от границы в (40) запишется в виде:

$$G_d(\omega, \partial\Omega) = -\frac{1}{4\pi^2 R}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} du \sum_{j=1}^{3} \frac{\hat{P}_j(\mathbf{m}_{1,2})}{\hat{\nu}_j^2(\mathbf{m}_{1,2})} =$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2 R}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} du\hat{\Lambda}^{-1}(\mathbf{m}_{1,2}) \tag{44}$$

и, таким образом, действительно сократится с (39). Используя замену $u \longrightarrow -u$ и независимость $P(\mathbf{m})$ и $\nu(\mathbf{m})$ от знака $\mathbf{m}$, легко убедиться, что в выражении (44) можно брать любой из векторов $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$. Вывод о сокращении вклада от границы со статическим членом соответствует работе [5], где он был приведен без доказательства.

Теперь обратимся к отысканию стационарных точек фазовой функции $S(\mathbf{p})$. Они удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathbf{px}) = \frac{1}{\nu(\mathbf{n})}\frac{\partial\mathbf{n}^T}{\partial\alpha}[E - \boldsymbol{\xi}\mathbf{p}^T]\mathbf{x} = 0, \tag{45}$$

где $\alpha = \theta, \phi$. При выводе (45) использовалось соотношение:

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\alpha} = \frac{1}{\nu(\mathbf{n})}[E - \mathbf{p}\boldsymbol{\xi}^T]\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}, \tag{46}$$

в котором $\xi_i = \frac{\partial\nu(\mathbf{n})}{\partial n_i}$ – компоненты вектора лучевой скорости [10]. Кроме того, выполнение тождества $\boldsymbol{\xi}\mathbf{p} = 1$ [10] приводит к дополнительному условию:

$$\mathbf{n}^T[E - \boldsymbol{\xi}\mathbf{p}^T]\boldsymbol{x} = 0. \tag{47}$$

Условие (47) совместно с двумя условиями (45) означает, что вектор $[E - \mathbf{p}\boldsymbol{\xi}^T]\mathbf{x}$ ортогонален трем некомпланарным векторам $\mathbf{n}$, $\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\theta}$ и $\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\phi}$, откуда следует, что этот вектор является нулевым. Таким образом, стационарные точки фазовой функции определяются из соотношения

$$[E - \boldsymbol{\xi}\mathbf{p}^T]\mathbf{x} = 0 \text{ или } \boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{px})}. \tag{48}$$

Геометрически они отвечают точкам поверхности рефракции, в которых вектор $\boldsymbol{\xi}$, являющийся перпендикуляром к этой поверхности [10], направлен вдоль вектора, $\mathbf{x}$, так как в соответствии с (28) они должны удовлетворять условию $(\mathbf{px}) > 0$.

Для асимптотического представления матрицы Грина нам требуются выражения для $\det J$ и $\operatorname{sgn} J$, где $J$ – матрица вторых производных фазовой функции по координатам $\theta$ и $\phi$, $\operatorname{sgn} J$ – раз-

ность между числом положительных и отрицательных собственных чисел матрицы $J$ [9]. Покажем, что они могут быть просто выражены через величины главных кривизн поверхности рефракции в стационарной точке и их знаки.

Для этого воспользуемся тождеством:

$$\xi\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} = 0, \tag{49}$$

где снова $\alpha = \theta, \phi$. В справедливости (49) легко убедиться, используя (46) и тождество $\xi\mathbf{p} = 1$.

Матрица $J$ имеет элементы $\mathbf{x}\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial\alpha\partial\beta}$, $\alpha, \beta = \theta, \phi$. Дифференцирование выражения (49), деленного на $|\xi|$, и подстановка выражения для $\xi$ в стационарной точке (48) дает соотношение:

$$\mathbf{x}\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial\alpha\partial\beta} = -|\mathbf{x}|\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial\beta}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial\alpha}, \tag{50}$$

где справа стоят элементы матрицы $A_2$ второй квадратичной формы для поверхности рефракции (см. [11]), умноженные на $|\mathbf{x}|$, $\mathbf{l} = \xi/|\xi| = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ – нормаль к поверхности рефракции в стационарной точке. Детерминант матрицы $A_2$ представляется равенством [11]:

$$\det A_2 = \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial\theta}\times\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial\phi}\right)^2 k_p, \tag{51}$$

в котором $k_p = k_1k_2$ – полная кривизна поверхности рефракции; $k_1$, $k_2$ – ее главные кривизны. Пользуясь (46), после некоторых преобразований найдем:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial\theta}\times\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial\phi}\right)^2 = \frac{\sin\theta^2}{\nu^2}\xi^2. \tag{52}$$

Откуда сразу получим:

$$\det J = \mathbf{x}^2\det A_2 = \mathbf{x}^2\xi^2\frac{\sin\theta^2}{\nu^2}k_p, \tag{53}$$

$$\operatorname{sgn} J = \operatorname{sgn} A_2 = \operatorname{sgn} k_1 + \operatorname{sgn} k_2,$$

где $\operatorname{sgn} k = \begin{cases} 1, \text{ если } k > 0 \\ -1, \text{ если } k < 0 \end{cases}$. Вырожденные стационарные точки, в которых $k = 0$, требуют применения другой схемы метода стационарной фазы, которая здесь не исследуется (см. [5, 9]).

Нумеруя стационарные точки $\breve{\mathbf{p}}_j^{(i)}$ $j$-ой поверхности рефракции, удовлетворяющие (48) индексом $i = 1\ldots N_j$, получим окончательное выражение асимптотики матрицы Грина:

$$G(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i}{4\pi|\mathbf{x}|}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{N_j}\frac{P_j(\breve{\mathbf{p}}_j^{(i)})}{|\xi(\breve{\mathbf{p}}_j^{(i)})|\sqrt{k_p(\breve{\mathbf{p}}_j^{(i)})}}\times \tag{54}$$

$$\times\exp\left[i\frac{\pi}{4}(\operatorname{sgn} k_1(\breve{\mathbf{p}}_j^{(i)}) + \operatorname{sgn} k_2(\breve{\mathbf{p}}_j^{(i)}) + \omega\breve{\mathbf{p}}_j^{(i)}\mathbf{x})\right].$$

Это выражение совпадает с выражением для асимптотики матрицы Грина из работы [12].

## 5. ВЫВОДЫ

Предложен новый способ вывода интегрального представления для вектора смещения в анизотропной среде, вызванного сосредоточенной силой с произвольной зависимостью от времени. Способ основывается на двух моментах.

Во-первых, сосредоточенный источник аппроксимируется сферически симметричной функцией, зависящей от одного параметра, при стремлении которого к нулю и получается собственно точечный источник. Это позволяет с помощью преобразования Фурье по всем переменным классическим способом построить решение. При этом, вышеупомянутый параметр дает естественную регуляризацию получающихся интегралов.

Во-вторых, используется замена переменных в предварительном интегральном представлении решения, основанная на центральной симметрии (по пространственным частотам) подынтегральных матриц, которая дает возможность применить теорему о вычетах и понизить кратность исходных интегралов на единицу, не производя при этом интегрирование по временнóй частоте. Это позволяет затем получить без затруднений решение для источника с произвольной временнóй зависимостью. Ошибка в работе [6] как раз связана с тем, что сначала было произведено интегрирование по временнóй частоте без учета особенностей спектральной функции источника, которая предполагалась произвольной.

Кроме того, в настоящей работе найден простой способ вычисления статической матрицы Грина, который в дальнейшем существенно упрощает получение главного члена асимптотики искомого решения с помощью метода стационарной фазы в случае невырожденной стационарной точки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Crampin S.* Geological and industrial implications of extensive dilatancy anisotropy // Nature. 1987. V. 328. P. 491–496.

2. *Crampin S., Lovell J.H.* A decade of shear-wave splitting in the Earth's crust: what does it mean? what use can we make of it? and what should we do next? // Geophys. J. Int. 1991. V. 107. P. 387–407.

3. *Молотков Л.А., Бакулин А.В.* Эффективная модель трещиноватой среды с трещинами, описываемыми поверхностями разрывов смещений // Зап. науч. сем. ПОМИ. 1994. Т. 218. С. 118–137.

4. *Киркинская В.Н., Смехов Е.М.* Карбонатные породы – коллекторы нефти и газа. Л.: Недра, 1981. 255 с.

5. *Hanyga A.* Point source in anisotropic elestic medium // Gerlands Beitr. Geophysik. Leipzig. 1984. V. 93. № 6. P. 463–479.

6. *Ben-Menahem A., Sena A.* Seismic source theory in stratified anisotropic media // J. Geophys. Res. 1990. V. 95. N B10. P. 15395–15427.

7. *Вишвцев А.С., Татаринцев А.В., Чесноков Е.М.* Функция Грина волнового уравнения при наличии анизотропии среды // Физика Земли. 1994. № 9. С. 80–87.

8. *Tverdokhlebov A., Rose J.* On Green's functions for elestic waves in anisotropic media // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 83. № 1. P. 118–121.

9. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

10. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1984. 280 с.

11. *Норден А.П.* Дифференциальная геометрия. М.: Учпедгиз, 1947. 214 с.

12. *Musgrave M.J.P.* Crystal acoustics: introduction to elestic wave propagation and vibrations in crystals. Holden-Day, San-Francisco, 1970.

# The Field of a Point Source in an Elastic Homogeneous Anisotropic Medium

**A. V. Bakulin and L. G. Tyurikov**

A new method is applied to obtain the Green's tensor for a point source in a general anisotropic elastic homogeneous unbounded medium in the form of an integral over the surface of a unit sphere. This representation can be used to obtain, in the time domain, simple expressions for the displacement field generated by a localized source with an arbitrary time dependence. The static term of the Green's tensor is transformed into an easily calculable form. A high-frequency asymptotic expression is derived for the Green's tensor.