

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

© 1996 г. В. Л. Хитрик

Научно-исследовательский институт химического машиностроения
141300 Сергиев Посад

Поступила в редакцию 11.07.95 г.

В современной технике широко применяются пористые элементы, устанавливаемые с различными технологическими целями внутри каналов, например для фильтрации жидкости (см. рисунок). Важное значение для оценки надежности фильтрации имеет исследование устойчивости процесса подачи фильтруемой жидкости по отношению к малым возмущениям параметров среды, заполняющей канал.

Считая, что жидкость в канале движется с малой дозвуковой скоростью, для анализа устойчивости будем использовать следующие линеаризованные уравнение неразрывности и уравнение Эйлера, записанные для возмущений параметров течения среды в канале, и соотношение для возмущения скорости фильтруемой жидкости в радиальном направлении на выходе из пористой стенки:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$v(x, t, r = a) = A \Delta p, \quad (3)$$

где ρ , ρ_0 – колебательное и невозмущенное значения плотности среды в канале, соответственно; u , v – компоненты колебательной скорости вдоль и поперек оси канала; p – колебательная составляющая давления жидкости в канале; a – внутренний радиус канала; x , r – соответственно осевая и поперечная координаты; t – время; A – константа, зависящая от типа фильтруемой жидкости и структуры пористого материала и характеризующая сопротивление пористой стенки ($A = 1/(\alpha \mu h)$, где μ – динамическая вязкость фильтруемой жидкости; h – толщина пористой стенки; α – коэффициент сопротивления пористой стенки, имеющий размерность $1/m^2$). Очевидно, что $A < 0$.

Соотношение (3) представляет собой закон Дарси [1], записанный для возмущений радиальной составляющей скорости жидкости на выходе из пористой стенки и перепада давления Δp поперек этой стенки.

Примем следующие допущения:

1) физико-химические свойства фильтруемой жидкости тождественны свойствам среды, заполняющей канал;

2) возмущение Δp перепада давления на пористой стенке равно осредненному по сечению канала значению колебательной составляющей давления жидкости в канале, при этом предполагается, что давление фильтруемой жидкости на входе в цилиндрическую стенку остается невозмущенным.

Введем в рассмотрение осредненные по сечению канала возмущения давления и скорости в направлении x , определяемые по формулам:

$$P(x, t) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi r p dr, \quad (4)$$

$$U(x, t) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi r u dr. \quad (5)$$

Интегрируя уравнения (1), (2) почленно по r в пределах от $r = 0$ до $r = a$, получим с учетом выражений (3), (4), (5) и уравнения состояния

$$p = \rho c^2, \quad (6)$$

где c – скорость звука в покоящейся жидкости, следующую систему уравнений:

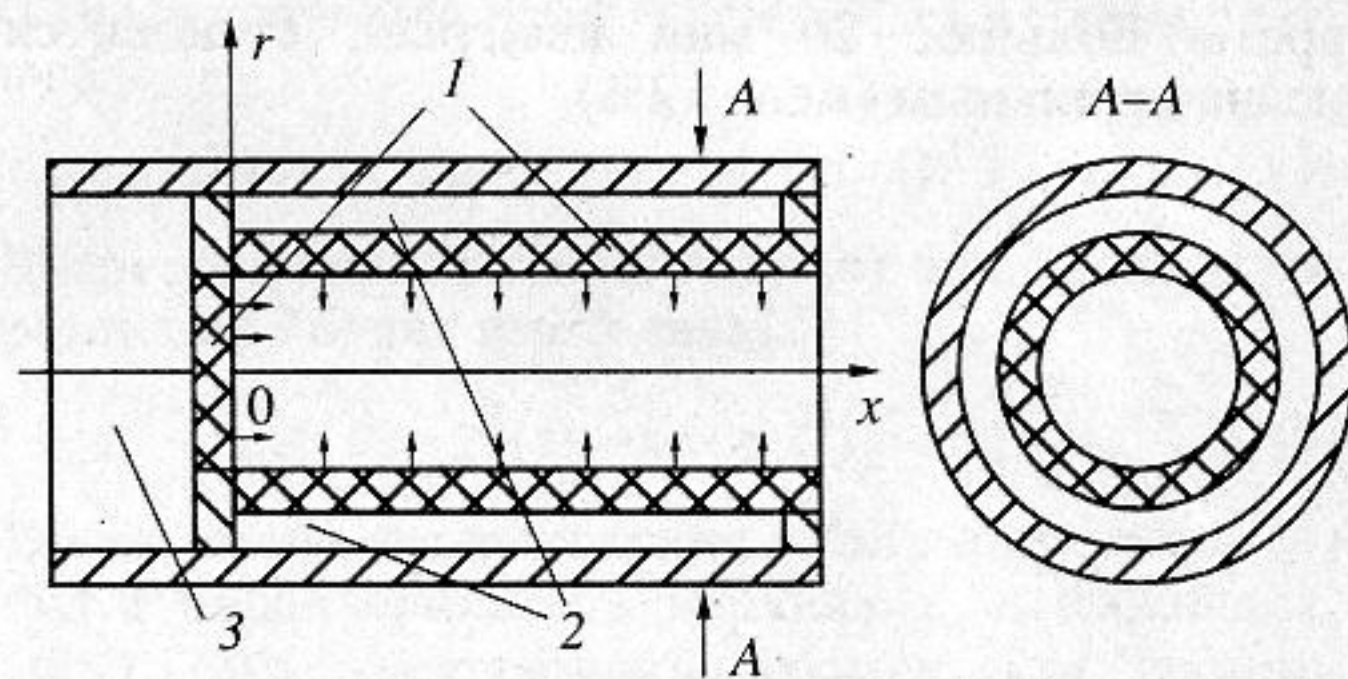


Схема фильтрующего элемента: 1 – пористые стенки, 2 – кольцевой коллектор фильтруемой жидкости, 3 – цилиндрический коллектор фильтруемой жидкости.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{2\rho_0 A}{a} P + \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

При выводе системы (7), (8) учитывалось, что колебания радиальной составляющей скорости на выходе из пористой цилиндрической стенки и параметра $P(x, t)$ происходят в противофазе.

Пусть источник нестационарных возмущений находится в сечении канала с координатой вдоль оси $x = 0$ и задан в виде гармонических колебаний параметров жидкой среды с частотой ω .

Решение системы уравнений (7), (8), соответствующее волнам, бегущим в положительном направлении оси x , будем искать в виде:

$$P(x, t) = P_A \exp[i(kx - \omega t)], \quad (9)$$

$$U(x, t) = U_A \exp[i(kx - \omega t)], \quad (10)$$

где P_A, U_A – амплитуды колебаний давления и скорости, $P_A = \text{const}, U_A = \text{const}; i$ – мнимая единица; k – волновое число.

Подставляя (9), (10) в систему (7), (8), получим после простых преобразований следующее дисперсионное уравнение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2\rho_0 A \omega}{ia}. \quad (11)$$

Из уравнения (11) видно, что k является комплексным числом. Пусть $k = k_0 + i\kappa$, где $k_0 > 0$, κ – действительные числа. Подставляя записанное выше выражение для комплексного волнового числа k в дисперсионное уравнение (11), получим соотношение:

$$k_0^2 + 2ik_0\kappa - \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{2\rho_0 A \omega}{a},$$

равносильное системе двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} k_0\kappa = -\frac{\rho_0 A \omega}{a}, \\ k_0^2 - \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} k_0\kappa = -\frac{\rho_0 A \omega}{a}, \\ k_0^2 - \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \end{cases} \quad (13)$$

Из (12) следует, что $\kappa < 0$, так как все остальные параметры, входящие в соотношение (12), положительны. Следовательно, согласно (9), (10) амплитуда звуковой волны с увеличением расстояния, пройденного волной от источника колебаний, экспоненциально возрастает. Решая (12), (13)

Результаты расчета параметра A

ω рад/с	κ_0	0.001	0.01	0.1	0.5
20 π		1.05×10^{-8}	1.05×10^{-7}	1.06×10^{-6}	5.87×10^{-6}
200 π		1.05×10^{-7}	1.05×10^{-6}	1.06×10^{-5}	5.87×10^{-5}
2000 π		1.05×10^{-6}	1.05×10^{-5}	1.06×10^{-4}	5.87×10^{-4}

относительно пространственного коэффициента усиления колебаний κ , получим следующее выражение:

$$\kappa = -\frac{\omega}{c\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + 4c^4 \left(\frac{\rho_0 A}{a\omega} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Вводя относительную величину пространственного коэффициента усиления колебаний по формуле $\kappa_0 = \kappa c / \omega$, из (14) можно получить соотношение для определения параметра A , характеризующего сопротивление пористой цилиндрической стенки, имеющее вид:

$$A = \frac{a\omega}{2\rho_0 c^2} \sqrt{[1 + 2\kappa_0^2]^2 - 1}. \quad (15)$$

Результаты расчета параметра A для дискретных значений $\kappa_0 = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5$ и частот колебаний, равных 10 Гц, 100 Гц, 1000 Гц, представлены в таблице.

Из таблицы видно, что для $\omega = 20\pi$ рад/с при изменении A в диапазоне значений от 5.87×10^{-6} до 1.05×10^{-8} м² с/кг κ_0 уменьшается с 0.5 до 0.001. Для такого изменения κ_0 при $\omega = 200\pi$ рад/с, как видно из таблицы, необходимо уменьшение параметра A с 5.87×10^{-5} до 1.05×10^{-7} м² с/кг, а при $\omega = 2000\pi$ рад/с – с 5.87×10^{-4} до 1.05×10^{-6} м² с/кг. Расчеты, представленные в таблице, выполнены для воздуха ($c = 340$ м/с, $\rho_0 = 1.293$ кг/м³), заполняющего канал, имеющий внутренний радиус $a = 0.025$ м.

Таким образом, повышение устойчивости процесса фильтрации (уменьшение пространственного коэффициента усиления колебаний) в фильтрующих элементах рассмотренного в статье типа может быть достигнуто путем уменьшения параметра A (увеличения сопротивления пористой цилиндрической стенки).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полежаев Ю.В. и Юревич Ф.Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.