АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 5, с. 667–671

УДК 534

ЛАЗЕРНЫЙ ТЕРМООПТИЧЕСКИЙ ИСТОЧНИК ЗВУКА У ФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 1996 г. Л. М. Лямшев*, М. Л. Лямшев**

* *Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН*
117036 Москва, ул. Шверника, 4
** *Институт общей физики РАН*
117942 Москва, ул. Вавилова, 38

Поступила в редакцию 20.11.95 г.

Рассматривается возбуждение звука гармонически модулированным лазерным излучением в жидком полупространстве, ограниченном неровной случайной статистически однородной изотропной фрактальной поверхностью. Неровности поверхности предполагаются пологими и большими по сравнению с длиной звуковой волны. Фрактальные свойства поверхности характеризуются функцией Вейерштрасса–Мандельброта и структурной функцией, характерной для фрактальных броуновских смещений поверхности. Анализируется дальнее поле лазерного термооптического источника звука в жидкости. Расчеты выполнены в приближении Кирхгофа. Получены выражения, характеризующие интенсивность флуктуаций и среднее поле. Показано, что интенсивность зависит от параметров лазерного излучения, характеристик жидкости и фрактальной размерности поверхности ($2 < D < 3$). При $D = 2$ из полученного выражения для интенсивности следует известная формула, описывающая интенсивность флуктуаций поля лазерного термооптического источника звука у случайной неровной нефрактальной поверхности в жидкости. Среднее поле зависит только от распределения высот неровной поверхности и определяется параметром Релея. Фрактальные свойства поверхности не влияют на среднее поле лазерного термооптического источника звука.

В последние годы получает развитие лазерная оптоакустическая диагностика [1]. Ее основу составляют исследования возбуждения звука лазерным излучением в конденсированной среде и, в частности, в условиях, когда звуковые волны обусловлены тепловым расширением области вещества, где поглощается оптическое излучение. Характеристики возникающего в среде виртуального лазерного термооптического источника звука зависят не только от параметров лазера и среды, но и от свойств поверхности, на которую падает лазерное излучение.

Влияние неровной поверхности на характеристики термооптического источника звука рассматривалось неоднократно. Во всех работах неровная поверхность описывалась в рамках традиционных геометрических представлений [2].

Исследования последних лет показали, однако, что реальные поверхности во многих случаях являются фрактальными. Опубликованы работы, указывающие на то, что фрактальны, например, молекулярные поверхности белков, нерегулярные и шероховатые поверхности разломов металлических тел и пористые поверхности. Ветровые волны образуют фрактальную поверхность моря в диапазоне масштабов от 0.1 до 100 м. Поверхность дна океана является фрактальной [3, 4].

Итак, рассмотрим термооптическую генерацию звука гармонически модулированным по интенсивности лазерным излучением в жидком полупространстве с крупномасштабной фрактальной статистически однородной изотропной свободной поверхностью. Смещения поверхности описываются функцией Вейерштрасса–Мандельброта [5]:

$$\xi(r) = \eta\xi_0(r) = \\ = N\eta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b^{-n(3-D)}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} b^n r\right)\right], \quad (1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, b – параметр, D – фрактальная размерность поверхности, η и λ_0 – соответственно смещения поверхности и масштаб, характеризующий ее пологость, а N – нормировочный множитель, величина которого определяется условием: $\langle|\xi_0(r)|^2 = 1$. Функция Вейерштрасса–Мандельброта оказывается удобной и для описания случайных фрактальных поверхностей [5].

Предполагается, что выполняются условия:

$$\lambda_0/\lambda \gg 1, \quad \eta k = \eta > 1, \quad \text{где} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2)$$

Первое соотношение означает, что рассматривается поверхность с очень пологими неровностями, а второе – неровности поверхности велики по сравнению с длиной звуковой волны λ.

Предположим, что смещения поверхности подчиняются нормальному закону распределения и их можно охарактеризовать структурной функцией, которую для броуновских фрактальных смещений записывают в виде [3]:

$$S(\rho) = \langle[\xi(r+\rho)-\xi(r)]^2\rangle = \eta T\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(3-D)}. \quad (3)$$

Здесь T – некоторая постоянная порядка единицы, η – среднеквадратичное значение и ρ_0 – характерный масштаб, например, так называемый "внешний" фрактальный масштаб или радиус корреляции смещений поверхности ($\rho_0 \sim \lambda_{0\max}$). Заметим, что математическая фрактальная поверхность обладает свойством масштабной инвариантности (скейлинга) при всех масштабах, а функция, характеризующая поверхность – недифференцируема, и поверхность не описывается в рамках традиционных геометрических представлений. Для физической фрактальной поверхности свойство масштабной инвариантности сохраняется лишь внутри некоторой области (полосы) масштабов, функция поверхности в этой полосе оказывается дифференцируемой, но имеет очень большие значения производных, а вне полосы поверхность описывается в рамках обычной эвклидовой геометрии.

При поглощении в жидкости падающего на ее поверхность в положительном направлении оси z модулированного лазерного излучения в ней возникают тепловые источники звука. Известно, что поле источников описывается решением неоднородного уравнения Гельмгольца [2]:

$$(\Delta + k^2)p(x, y, z) = \\ = i\frac{\alpha A}{C_p}m\omega\mu I(x, y)\exp[-\mu(z-\xi(x, y)]. \quad (4)$$

решение уравнения (4) может быть представлено в виде:

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} p_0(x_1, y_1, z_1/x, y, z)\times \\ \times\left\{i\frac{i\alpha A}{C_p}m\omega\mu I(x_1, y_1)\exp[-\mu(z_1-\xi(x_1, y_1)]\right\}\times \quad (5) \\ \times dx_1dy_1dz_1.$$

В выражениях (4) и (5) и далее $p(x, y, z)$ – звуковое давление в жидкости, ω – круговая частота модуляции интенсивности лазерного излучения, $k = \frac{\omega}{c}$, а c, α, C_p, μ – соответственно, скорость звука, коэффициент теплового расширения, удельная теплоемкость и коэффициент поглощения света в жидкости, A – коэффициент прохождения света на границе воздух–жидкость, Ω – объем, занятый термооптическим источником звука, т.е. объем области жидкости, где происходит поглощение лазерного излучения, $I(x_1, y_1) = I_0\exp\left[-\frac{x_1^2+y_1^2}{a^2}\right]$ – интенсивность лазерного излучения и ее распределение на поверхности жидкости, a – радиус лазерного пучка и $p_0(x_1, y_1, z_1/x, y, z)$ – решение регулярной задачи о дифракции (рассеянии) звука на неровной поверхности, когда источник регулярного звукового поля находится в точке (x, y, z), где необходимо определить искомое поле термооптического источника звука.

В рассматриваемом случае крупномасштабных и весьма пологих неровностей решение регуляторной задачи можно написать в приближении Кирхгофа. Если точка (x, y, z) находится в дальней зоне по отношению к размерам области Ω, то падающую регулярную звуковую волну можно представить в виде:

$$p_i = \frac{\exp(ikR)}{R}\exp[i(\alpha x_1+\beta y_1-\gamma z_1)], \quad (6)$$

где $R = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ и α, β, γ – компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$, направленного из точки (x, y, z) в начало координат.

Поскольку неровности являются весьма пологими, а их высота велика по сравнению с длиной звуковой волны, можно допустить, что отражение звуковой волны от неровной поверхности в каждой ее точке происходит так же, как и от плоскости, параллельной координатной плоскости (x, y) и проходящей через данную точку поверхности $z = \xi(x, y)$. В этом случае в области Ω расположения термооптического источника звука решение регулярной дифракционной задачи можно приближенно представить выражением:

$$p_0 = -2i\frac{\exp(ikR)}{R}\exp\{i[\alpha x_1+\beta y_1-\gamma\xi(x_1, y_1)]\}\times \\ \times\sin[\gamma(z_1-\xi(x_1, y_1))]. \quad (7)$$

Подставим решение (7) в (5) и получим выражение для звукового давления в поле лазерного термооптического источника звука:

$$p(x, y, z) = \frac{I_0A\alpha\mu m\omega}{2\pi C_p}\frac{\exp(ikR)}{R}\times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left[-\frac{x_1^2+y_1^2}{a^2}\right]\times \tag{8}$$

$$\times \exp(-i\gamma\xi_1)\exp[-\mu(z_1-\xi_1)]\times$$

$$\times \sin[\gamma(z-\xi_1)]\exp[i(\alpha x_1+\beta y_1)]dx_1dy_1dz_1,$$

где $\xi_1 = \xi(x_1, y_1)$. Определим величину среднего звукового поля. После замены переменных $z = z_1 - \xi_1$, усреднения и интегрирования получаем

$$\langle p\rangle = -\frac{I_0A\alpha\mu m\omega}{2C_p}\frac{\exp(ikR)}{R}\frac{a^2k\cos\theta}{\mu^2+k^2\cos^2\theta}\times \tag{9}$$

$$\times \exp\left[-\frac{k^2a^2}{4}\sin^2\theta\right]f(-\gamma),$$

где $f(-\gamma)$ – характеристическая функция, которая для нормального закона распределения случайных смещений $\xi(x, y)$ поверхности имеет вид:

$$f(-\gamma) = \exp\left(-\frac{1}{2}k^2\eta^2\cos^2\theta\right) = (-P^2/8),$$

$P = 2k\eta\cos\theta$ – параметр Рэлея, а θ – угол между осью z и направлением в точку наблюдения (x, y, z).

Из (9) следует, что среднее поле зависит только от распределения высот неровностей и не зависит от формы неровной поверхности. Другими словами, в рамках рассматриваемого приближения, как это можно было ожидать из общих физических предположений, фрактальные свойства неровной поверхности не влияют на среднее поле лазерного термооптического источника звука в жидкости.

Важной характеристикой случайного звукового поля является средняя интенсивность, выражение для которой, пользуясь формулой (8), можно написать в виде:

$$\langle|p|^2\rangle = \left(\frac{I_0A\alpha\mu m\omega}{2\pi C_pR}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left[-\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{a^2}\right]\times$$

$$\times \exp(-\mu z_1)\sin(\gamma z_1)\exp(-\mu z_2)\sin(\gamma z_2)\times$$

$$\times \langle\exp[-i\gamma(\xi_1-\xi_2)]\rangle\times \tag{10}$$

$$\times \exp\{i[\alpha(x_1-x_2)+\beta(y_1-y_2)]\}\times$$

$$\times dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2.$$

Здесь $\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, $\rho_2^2 = x_2^2 + y_2^2$ и $\langle\exp[-i\gamma(\xi_1 - \xi_2)]\rangle$ – двумерная характеристическая функция, которая для нормального двумерного закона распределения смещений случайной статистически однородной изотропной поверхности имеет вид:

$$\langle\exp[-i\gamma(\xi_1-\xi_2)]\rangle = \exp\left[-\frac{\gamma^2}{2}S(\rho)\right], \tag{11}$$

где $S(\rho)$ – структурная функция (3).

На основании (10), (11) и (3) получаем

$$\langle|p|^2\rangle = \left(\frac{I_0A\alpha\mu m\omega}{2C_pR}\right)^2\frac{\gamma^2a^2}{(\gamma^2+\mu^2)^2}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{\gamma^2}{2}\eta^2T^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]^{2(3-D)}\times \tag{12}$$

$$\times \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2}\right)J_0(\rho\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\rho d\rho.$$

Здесь $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Выражение (12) описывает среднюю интенсивность флуктуаций звукового поля лазерного термооптического гармонического источника звука у фрактальной случайной неровной крупномасштабной поверхности в жидком полупространстве.

В зависимости от различных условий фрактальная размерность D поверхности может принимать значения в пределах $2 < D < 3$. Для взволнованной поверхности моря, например, $D \sim 2.25$ [4]. При $D = 2$ – неровная поверхность нефрактальна, т.е. описывается гладкими функциями.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Примем в дальнейшем: $A = 1$ и $T = 1$. Заметим, что отношения $\eta/\rho_0 \ll \eta/\lambda_0 \ll 1$ – характеризуют пологость поверхности.

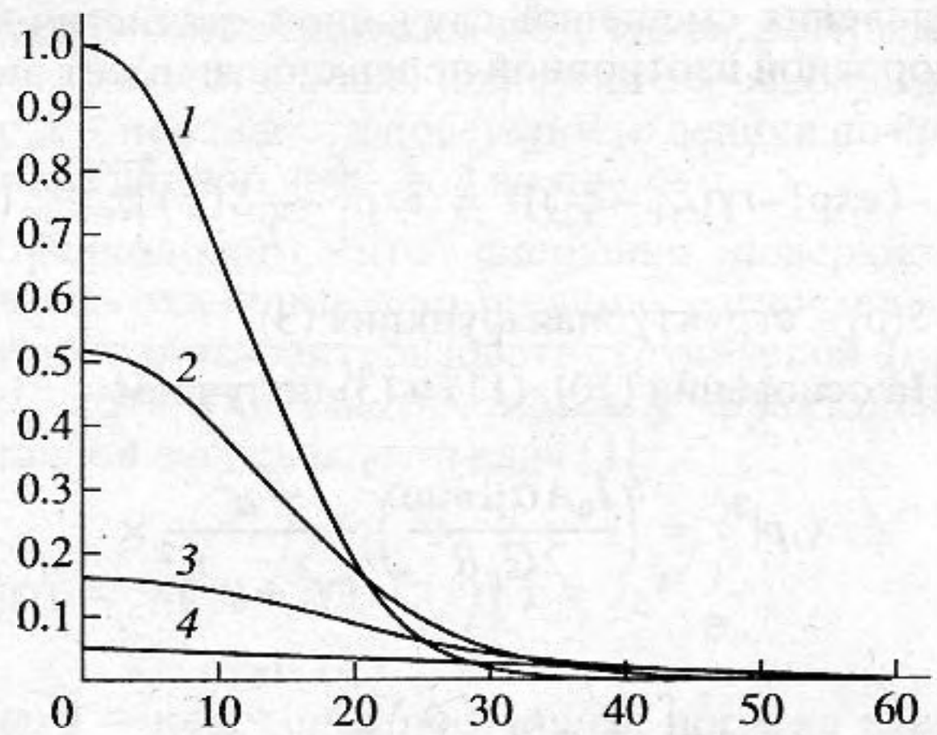
Рассмотрим случай $a \ll \rho_0$, т.е. очень узкого лазерного пучка, по сравнению с характерным масштабом смещений поверхности. Учитывая, что $k\eta \gg 1$, после интегрирования получаем

$$\langle|p|^2\rangle \sim \left(\frac{I_0\alpha\mu\omega m}{2C_pR}\right)^2\frac{\mu^2a^4\cos^2\theta}{[(\mu/k)^2+\cos^2\theta]^2}\times \tag{13}$$

$$\times \exp[-1/2k^2a^2\sin^2\theta].$$

Это хорошо известное выражение, описывающее среднюю интенсивность флуктуаций поля лазерного термооптического источника звука в жидком полупространстве с плоской свободной поверхностью [2]. Как и можно было ожидать, исходя из физических представлений, неровности поверхности в этом случае не играют роли.

Представляет интерес рассмотреть противоположный случай с точки зрения соотношения



Угловые зависимости средней интенсивности флуктуаций в поле лазерного источника звука у фрактальной поверхности в жидкости при различных значениях фрактальной размерности D: $k\eta = 5$; $k\rho_0 = 25$; *1* – $D = 2$; *2* – $D = 2.25$; *3* – $D = 2.5$; *4* – $D = 2.7$.

радиуса лазерного пучка и характерного масштаба или радиуса корреляции смещений неровной поверхности.

Пусть $a \gg \rho_0$. Выражение (12) теперь можно приближенно написать в виде:

$$\langle |p|^2 \rangle = \left(\frac{I_0 A\alpha\mu m\omega}{2C_p R}\right)^2 \frac{\gamma^2 a^2}{(\gamma^2+\mu^2)^2} \times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\gamma^2}{2}\eta^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(3-D)}\right] J_0(\rho\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\rho d\rho. \quad (14)$$

При $D = 2$, т.е. в случае гладкой (нефрактальной) поверхности, получим снова известное выражение (см. [2]):

$$\langle |p|^2 \rangle_{NF} = \left(\frac{I_0\alpha m C}{2C_p R}\right)^2 \frac{a^2}{[(\mu/k)^2+\cos^2\theta]^2} \times \left(\frac{\mu\rho_0}{k\eta}\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\eta}\right)^2 \mathrm{tg}^2\theta\right], \quad (15)$$

где индексы NF означают случай нефрактальной и ниже F – фрактальной поверхности.

Введем, следуя [2], среднеквадратичный угол наклона поверхности δ, который при нормальном законе распределения случайных смещений поверхности определяется выражением $\mathrm{tg}^2\delta = 2(\eta/\rho_0)^2$.

Теперь из формулы (15) можно видеть, что угловая характеристика интенсивность флуктуаций в звуковом поле определяется масштабами неровностей поверхности и интенсивность уменьшается в e раз для угла θ, когда $\mathrm{tg}\,\delta = 2\eta/\rho_0$. Другими словами, угловая ширина лепестка характеристики направленности излучения звука оказывается приблизительно равной среднеквадратичному углу наклона неровной поверхности $\theta = \sqrt{2\delta}$.

Рассмотрим теперь один из случаев фрактальной поверхности. Пусть, как и выше, $a \gg \rho_0$, и фрактальная размерность поверхности $D = 2.5$. Здесь мы полагаем $D = 2.5$, а не $D = 2.25$, как это можно было бы принять для случая, например, фрактальной взволнованной поверхности моря. Мы делаем это не только по соображениям удобства интегрирования выражения (12). Дело в том, что статистически изотропные поверхности, на которых не выделен какой-либо масштаб, могут быть фрактальными. Для броуновских поверхностей, т.е. в случае обычной гауссовой статистики фрактальная размерность поверхности $D = 2.5$. В общем же случае статистика фрактальных поверхностей, вообще говоря, не является гауссовой [3]. После интегрирования получаем

$$\langle |p|^2 \rangle_F \sim \left(\frac{I_0\alpha m c}{2C_p R}\right)^2 \frac{a^2}{[(\mu/k)^2+\cos^2\theta]^2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \frac{\mu^2\rho_0^2 k^2\eta^2\cos^2\theta}{[(k^2\eta^2\cos^2\theta)^2 + 4k^2\rho_0^2\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}}.$$

На рисунке показана угловая зависимость средней интенсивности флуктуаций в поле лазерного термооптического источника звука у фрактальной поверхности в жидкости для различных величин фрактальной размерности. Можно видеть, что с ростом фрактальной размерности интенсивность флуктуаций уменьшается, а индикатрисса становится более пологой.

Этот вывод согласуется с результатами расчетов угловой зависимости интенсивности флуктуаций при рассеянии волн статистической фрактальной поверхностью большой амплитуды [6].

Итак, фрактальные свойства крупномасштабной неровной статистически однородной изотропной поверхности влияют на характеристики интенсивности флуктуаций поля лазерного термооптического гармонического источника звука в жидкости. Угловая характеристика интенсивности флуктуаций оказывается более пологой, чем в случае поверхности, описываемой в рамках обычных геометрических представлений, и средняя интенсивность флуктуаций уменьшается с ростом величины фрактальной размерности

поверхности. Среднее поле определяется только масштабом (параметром Релея) неровностей и не зависит от фрактальных свойсв неровной поверхности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-02-16160 и грант 95-02-04441а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егерев С.В., Лямшев Л.М., Пученков О.В.* Лазерная динамическая оптоакустическая диагностика конденсированных сред // УФН. 1990. Т. 160. Вып. 9. С. 111–154.
2. *Лямшев Л.М.* Лазерное термооптическое возбуждение звука. М.: Наука, 1989. 240 с.
3. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
4. *Stiassne M.* Department of Applied Mathematics, California Institute of Technology, Passadena, California 91125 "The fractal dimension of the ocean surface", Preprint, 1989.
5. *Berry M.V., Lewis Z.V.* On the Weierstrass–Mandelbrot fractal function // Proc. Roy. Soc. London. 1980. A370. P. 459–484.
6. *Sanghadasa M.F.M., Sung C.C.* Scattering of electromagnetic waves from fractals of large amplitudes // J. Appl. Phys. 1994. V. 75. (11). P. 7224–7226.

Laser Thermooptical Sound Source at a Fractal Surface

L. M. Lyamshev and M. L. Lyamshev*

Andreev Acoustics Institute,
ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia
** Institute of General Physics, Russian Academy of Sciences,*
ul. Vavilova 38, Moscow, 117942 Russia

Abstract—The excitation of sound by a harmonically modulated laser radiation in a liquid halfspace bounded by a rough, random, statistically uniform, isotropic, fractal surface is considered. The irregularities of the surface are assumed to be gentle and large compared to the sound wavelength. The fractal properties of the surface are characterized by the Weierstrass–Mandelbrot function and the structural function typical of fractal Brownian displacements of the surface. The far field of the laser thermooptical sound source in a liquid is analyzed. All calculations are made in the Kirchhoff approximation. Expressions are derived for the intensity of fluctuation and the mean field. It is demonstrated that the intensity depends on the lasing parameters, liquid characteristics, and the fractal dimensionality of the surface ($2 < D < 3$). At $D = 2$, the expression for intensity yields a known formula describing the intensity of fluctuations of the thermooptically induced sound field at a random rough non-fractal surface in liquid. The mean field depends only on the height distribution of a rough surface and is defined by the Rayleigh parameter. The fractal properties of the surface do not depend on the mean field of the laser thermooptical sound source.