АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 2, с. 282 - 285

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 537.228

СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

© 1996 г. В. В. Мадорский, В. Н. Митько

Ростовский госуниверситет, ОКТБ "ПЬЕЗОПРИБОР"
334010 Ростов-на-Дону, ул. Лермонтовская, 85 - 89

Поступила в редакцию 21.11.94 г.

При изучении вынужденных колебаний идеальных пьезоэлектрических тел резонансная область недоступна для исследования, поскольку амплитуды ряда полевых величин в этой области неограниченно возрастают и, поэтому, не могут быть рассчитаны. Тем самым, из круга рассмотрения исключаются вопросы, связанные с пределами применимости линейных определяющих соотношений для среды, прочностными характеристиками конструкций и т.д. Поскольку большинство пьезоэлектрических устройств в практике используется именно в резонансном режиме работы, то возникает необходимость корректных расчетов вблизи резонансов. Этого можно достигнуть применением линейной теории электровязкоупругости [1 - 3]. Подавляющее число работ, например [4 - 6], посвящены определению напряженно-деформированного состояния в идеальных пьезоэлектрических телах.

В настоящей работе строятся однородные решения для электровязкоупругого слоя, решаются соответствующие спектральные задачи и анализируются основные отличия полученных решений от случая идеального пьезоэлектрика, когда потери энергии не учитываются.

Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания плиты из электровязкоупругого материала, занимающей объём V. Пусть S – срединная плоскость, $2h$ – толщина плиты. Лицевые поверхности $S^{\pm}$ (торцы) плиты полагаем полностью покрытыми электродами бесконечно малой толщины. Свяжем с плитой декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) с началом в S и осью ox_3, параллельной оси поляризации. Предполагая процесс изотермическим, определяющие соотношения для комплексных амплитуд электрических и механических полей запишем в виде [1, 2]:

$$T_{mj} = c^E_{mjne} S_{ne} - e_{nmj} E_n, \qquad (1)$$

$$D_m = e_{mne} S_{ne} + \varepsilon^S_{mj} E_j.$$

Здесь для комплексных амплитуд полевых величин введены следующие обозначения: T_{mj} – тензор напряжений; E_m, D_m – напряженность и индукция электрического поля; S_{ne} – инфинитезимальный тензор деформации Коши; u_j – механическое смещение. Величины c_{mjne}, e_{mnj}, ε_{mj} представляют собой комплексные упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические параметры материала, зависящие в общем случае от частоты ω вынужденных колебаний.

Везде далее верхние индексы у c_{mjne} и ε_{mj}, указывающие на режим измерения этих величин, опускаются.

Замкнутую систему уравнений, описывающих установившиеся колебания в среде, получим, добавляя к (1) уравнения движения

$$T_{mj,j} + \rho\omega^2 u_m = 0 \qquad (2)$$

и уравнения квазистатического электрического поля

$$D_{l,l} = 0;\ E = -\mathrm{grad}\varphi, \qquad (3)$$

где ρ – плотность среды, φ – потенциал электрического поля. Будем считать, что на лицевых поверхностях плиты заданы следующие граничные условия:

$$T_{m3}(x_1, x_2, \pm h) = 0,$$
$$\varphi(x_1, x_2, \pm h) = 0. \qquad (4)$$

Граничные условия на боковой поверхности плиты вводятся при рассмотрении конкретных краевых задач.

Решения системы уравнений (2, 3), удовлетворяющие нулевым граничным условиям (4) на лицевых поверхностях плиты, называются однородными. Как известно, в динамических задачах построение однородных решений для плит связано с определением зависимости корней α_k дисперсионного уравнения от частоты. Для симметричных колебаний электровязкоупругой плиты уравнение имеет вид [5, 6]

$$a_m M_m \operatorname{cth}\beta_m = 0,$$
$$(m = 1, 2, 3), \qquad (5)$$

где

$$a_m = -\alpha^2 c_{13} k_{1m} + c_{33} k_{2m} + e_{33} k_{3m},$$

$$b_m = k_{1m}\beta_m^2 + k_{2m};$$

$$M_1 = b_2k_{33} - b_3k_{32}; \quad M_2 = b_3k_{31} - b_1k_{33},$$

$$M_3 = b_1k_{32} - b_2k_{31},$$

k_{jm} – алгебраические дополнения элементов третьей строки определителя системы для симметричных колебаний, β_m – корень бикубического уравнения

$$\beta^6 + P\beta^4 + Q\beta^2 + R = 0. \qquad (6)$$

Коэффициенты P, Q, R зависят от модулей c_{jn}, e_{jn}, ε_{jn}, волнового числа α и безразмерной частоты Ω [4 - 6].

Подробный вывод дисперсионного уравнения (5) и численный анализ корней α_k для идеального пьезоэлектрического слоя приведен в [5, 6].

Для изотропного упругого слоя рассматриваемое дисперсионное уравнение известно как уравнение Реллея–Лэмба [7].

Перед исследованием корней уравнения (5) рассмотрим в общем виде следствия, к которым приводит введение комплексных модулей материала.

При действительных модулях соответствующая спектральная задача самосопряжена. Поэтому комплексные корни дисперсионного уравнения входят в спектр комплексно-сопряженными парами α, α^* и, кроме того, имеются как чисто вещественные, так и чисто мнимые корни. В случае комплексных модулей задача не может быть самосопряженной ни при каких значениях α. Поэтому для сред с потерями дисперсионное уравнение имеет только комплексные корни, а также, исходя из непрерывности рассматриваемых функций по величинам комплексных модулей, следует ожидать, что наряду с корнем $\alpha = \alpha^+$ спектру будет принадлежать и точка α^-, которая стремится к α^* при стремлении потерь к нулю.

Кроме того, для идеального пьезоэлектрика на комплексной плоскости имеется семейство начальных точек $\alpha = 0$, $\Omega \neq 0$. При этих условиях система (2, 3) вырождается и ее решение представляет толщинные колебания слоя, а удовлетворение однородным граничным условиям (4) приводит к определению собственных частот – толщинных резонансов. В случае комплексных модулей легко показать, что такое определение толщинного резонанса не имеет физического смысла, так как невозможно удовлетворить однородным граничным условиям при вещественных Ω.

Зададим комплексные модули материала в виде [1 - 3, 8]

$$c_{mj} = c'_{mj}(1 + i\delta); \quad \varepsilon_{mj} = \varepsilon'_{mj}(1 - i\delta)$$

$$e_{33} = e'_{33}(1 - i\delta); \quad e_{15} = e'_{15}(1 - i\delta);$$

$$e_{31} = e'_{31}(1 + i\delta)$$

Величина δ, определяющая потери, по литературным данным [3, 8] изменяется в пределах 0.01 - 0.1. Для идеального пьезоэлектрика $\delta = 0$.

Значения реальных частей модулей взяты для поляризованной сегнетокерамики ЦТС-19. Они равны [6]

$c'_{11} = 11.2 \times 10^{+10}$, ПА	$e_{31} = 3.4$, К/м^2	$e_{33} = 82.747 \times 10^{-10}$, Ф/м
$c'_{13} = 6.22$	$e_{33} = 15.1$	$e_{11} = 72.57$
$c'_{33} = 10.6$	$e_{15} = 9.45$	
$c'_{44} = 2.49$		

Чтобы иметь возможность сравнивать дисперсионные кривые для идеального пьезоэлектрика с соответствующими кривыми для пьезоэлектрика с потерями, нормированную частоту задаем в виде $\Omega^2 = \rho\omega^2h^2/c'_{44}$.

Для нахождения корня α при заданных значениях δ, Ω необходимо совместно решить дисперсионное (5) и бикубическое (6) уравнения.

Корни бикубического уравнения при фиксированных значениях δ и Ω находятся по формуле Кардана, а для вычисления корней дисперсионного уравнения использован метод аргумента теории аналитических функций [9], который для простого нуля α_0 функции $f(z)$ комплексного переменного дает соотношения

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 1, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \alpha_0, \qquad (8)$$

где γ – любой замкнутый контур на плоскости z, окружающий точку α_0 и не содержащий внутри себя других корней или полюсов функции $f(z)$.

Как видим, метод очень удобен тем, что позволяет одновременно решать как задачу разделения нулей – соотношение (7), так и задачу нахождения

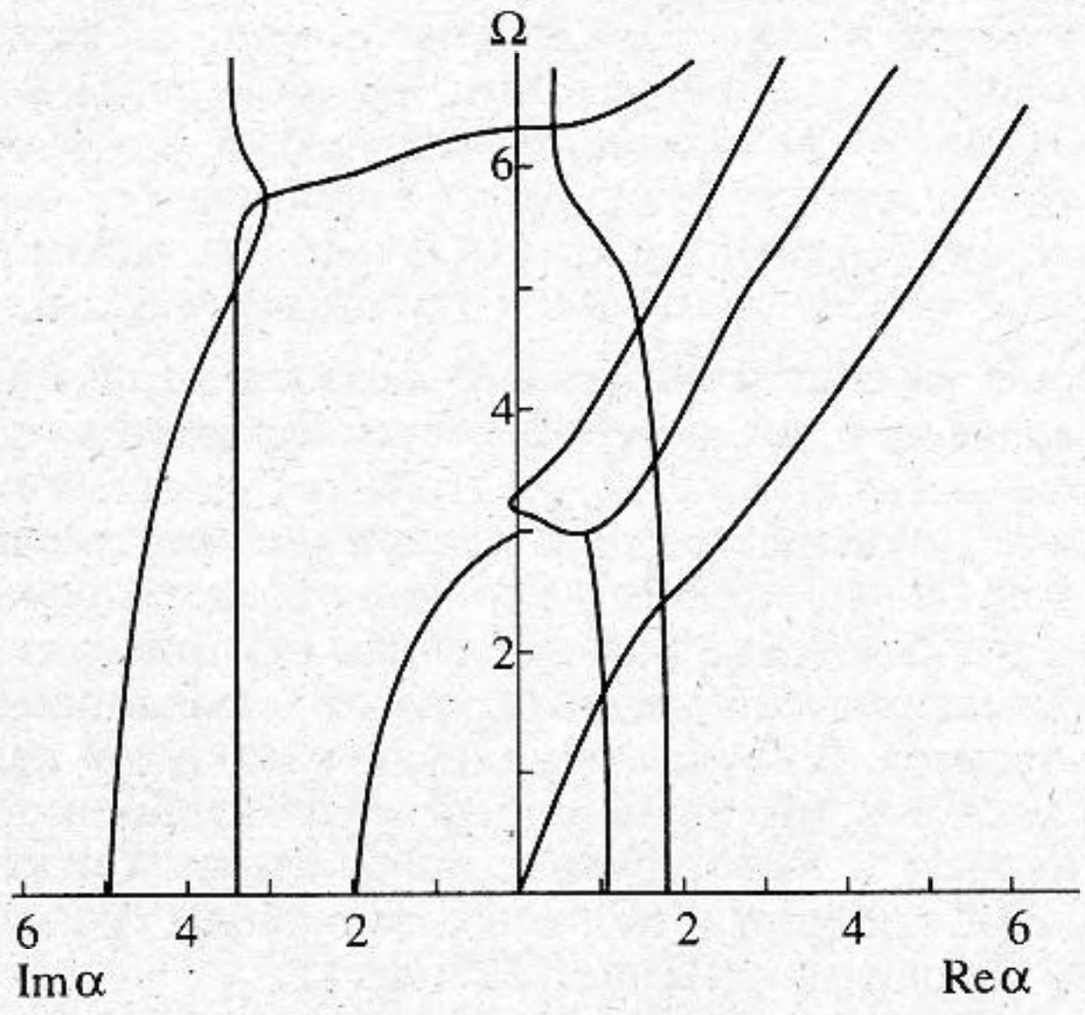

Рис. 1. Зависимость корней $\alpha(\Omega)$ для пьезокерамики без потерь $\delta = 0$.

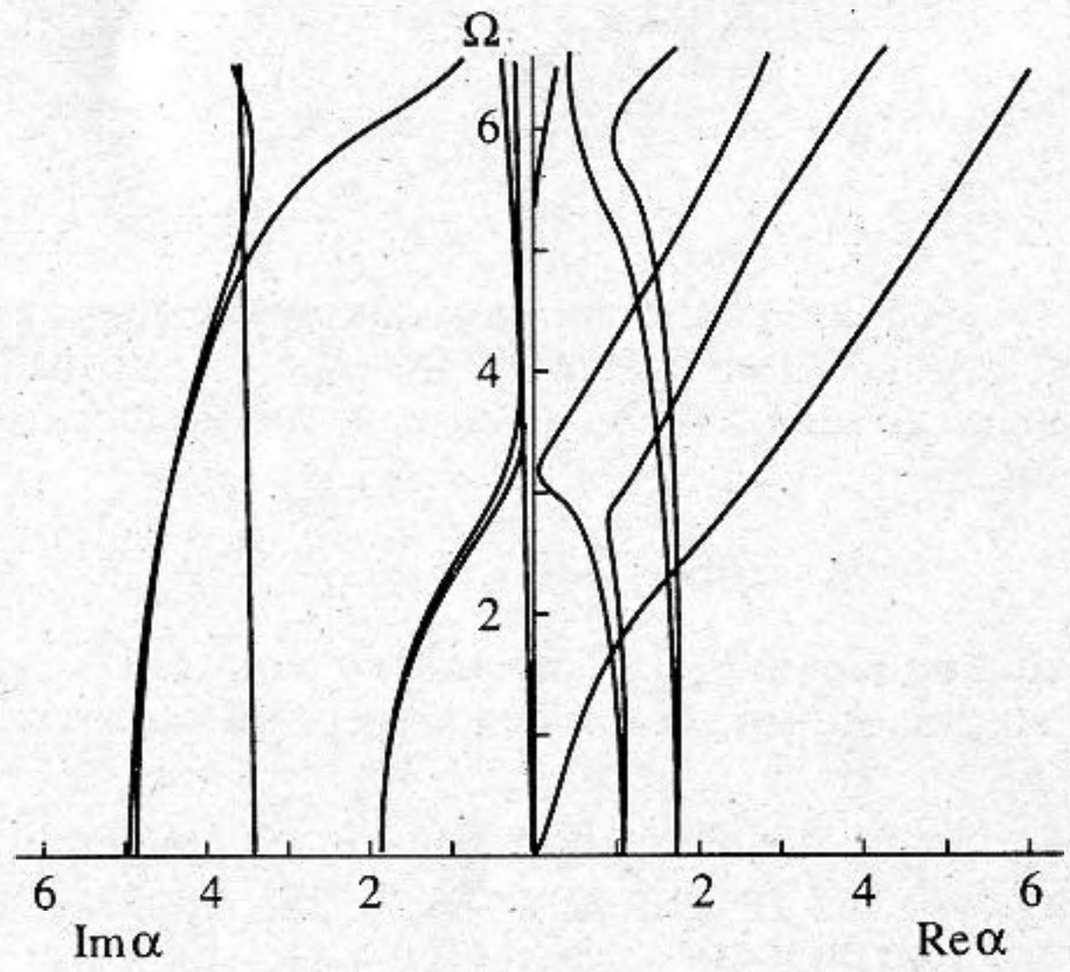

Рис. 2. Зависимость корней $\alpha(\Omega)$ для пьезокерамики с потерями $\delta = 0.1$.

нулей функции – (8). Кроме того, несмотря на использование численного интегрирования, метод очень чувствителен именно по отношению к первой задаче, поскольку точное значение интеграла заранее известно. Найденное значение корня впоследствии уточняется методом наискорейшего спуска [10].

Схема проводимых расчетов следующая. Сначала при $\Omega = 0$ находятся и уточняются начальные точки $\alpha_k^{\pm}$ дисперсионных кривых, а затем градиентным методом с заданным шагом по частоте Ω для каждой начальной точки протягивается дисперсионная ветвь до требуемого значения Ω. Сходимость градиентного метода контролируется. При возникновении осложнений, как, например, ветвление дисперсионных кривых при $\delta = 0$, спуск приостанавливается и ситуация проясняется с помощью метода аргумента.

Как показывает исследование сопряженной спектральной задачи при малых потерях и $\Omega = 0$ в первом порядке теории возмущений по δ выполняется соотношение

$$\Delta\alpha_k^- = -(\Delta\alpha_k^+)^*$$

где $\Delta\alpha_k^+$ и $\Delta\alpha_k^-$ – изменение комплексных корней α_k, α_k^* идеальной задачи.

Для нахождения дисперсионной ветви, выходящей из начала координат, удобно на начальном участке использовать соотношение [6]

$$\alpha = \Omega\sqrt{\frac{c_{44}c_{33}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}}$$

Расчеты проводились для трех фиксированных значений: идеальный пьезоэлектрик – $\delta = 0$; высокодобротный – $\delta = 0.01$; низкодобротный – $\delta = 0.1$. Предполагалось, что величина δ не зависит от частоты. Это соответствует случаю так называемых "гистерезисных потерь".

В общем случае, вводя зависимость $\delta(\omega)$, необходимо учитывать и частотные зависимости действительных частей комплексных модулей материала [8].

Несколько рассчитанных дисперсионных кривых представлены на рис. 1, 2: рис. 1 – $\delta = 0$; рис. 2 – $\delta = 0.1$. Численные результаты при $\delta = 0$ совпадают с данными работы [6].

По оси ординат откладывается нормированная частота Ω, на правой полуоси абсцисс – действительные части корней $\alpha_k^{\pm}$, на левой полуоси – мнимые части корней. Следует учитывать, что мнимые части α_k^- отрицательны.

Как видно из приведенных графиков, основное отличие дисперсионных кривых для среды с потерями от идеального случая заключается в том, что все ветви комплексны. Кроме того, реальные части корней α^+ и α^- не совпадают. Соответственно этому, отсутствуют точки ветвления дисперсионных кривых, которые наблюдаются в случае идеального пьезоэлектрика.

Чтобы выделить это обстоятельство, на рис. 3 в увеличенном масштабе представлены зависимости $\alpha^{\pm}(\Omega)$ для одного из корней дисперсионного уравнения при $\delta = 0$ и $\delta = 0.01$. Из этого рисунка видна истинная причина ветвления дисперсионной кривой при $\delta \longrightarrow 0$: точка A на рис. 3.

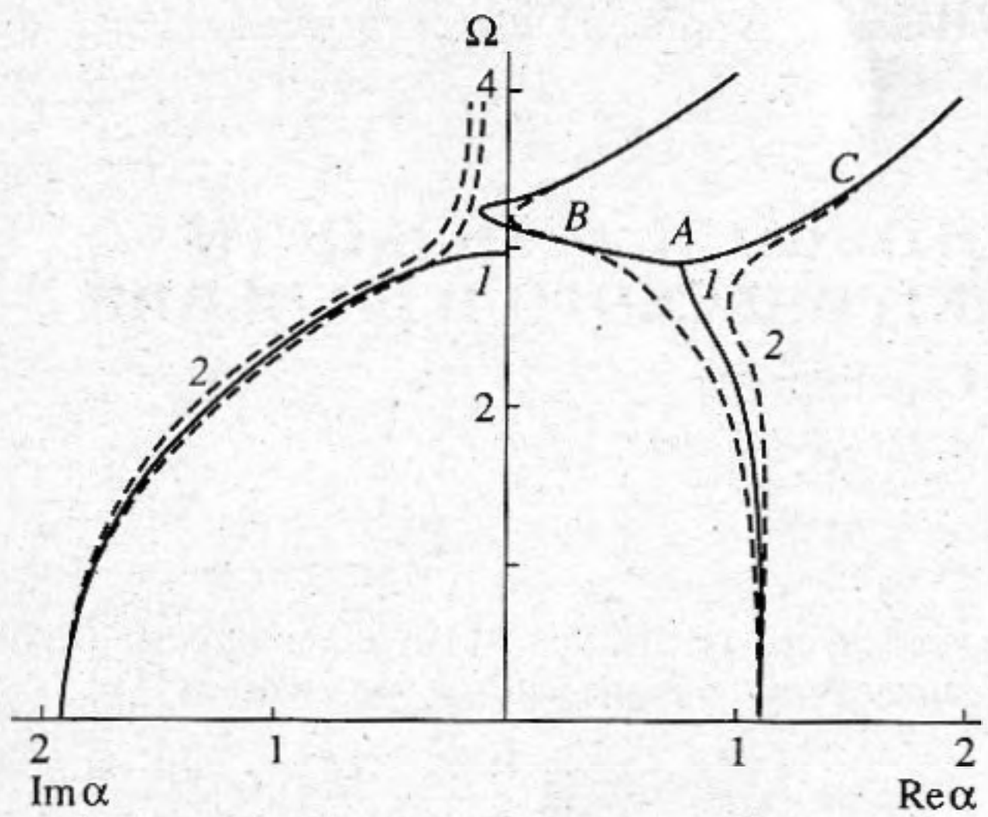

Рис. 3. Зависимость корней при различной диссипации энергии в пьезокерамике: *1* – $\delta = 0$; *2* – $\delta = 0.01$.

Кривая *BAC* является объединением участков двух разных дисперсионных кривых: участок *BA* представляет собой монотонное продолжение кривой $\mathrm{Re}\alpha^*$, а участок *AC* – кривой $\mathrm{Re}\alpha$. Объединение их в одну действительную дисперсионную кривую обусловлено тем, что в пренебрежении потерями мнимые части корней на этих участках равны нулю.

Из рис. 2, 3 видно также, что в случае диссипативной среды отсутствуют решения $\alpha = 0$ при $\Omega \neq 0$, соответствующие толщинным резонансам идеального пьезоэлектрика. Подробнее этот вопрос, а также возникающие проблемы определения резонансных частот для тел конечных размеров при наличии потерь авторы предполагают обсудить в следующей статье.

В заключении приведем численные формулы для расчета первых четырех корней дисперсионного уравнения при малых потерях ($\delta = 0.01$), которые могут быть использованы при решении квазистатических задач $\Omega < 1$ для пьезокерамики ЦТС-19:

$$\alpha_1 = (0.57426 - i0.00287)\Omega,$$

$$\alpha_2^+ = (1.11745 + i1.95206) \times$$

$$\times [1 - 0.01(5.752 + i2.909)\Omega^2],$$

$$\alpha_2^- = (1.11916 + i1.95323) \times$$

$$\times [1 - 0.01(6.106 - i3.303)\Omega^2],$$

$$\alpha 3 = (-0.002874 + i3.36229) \times$$

$$\times [1 + 0.01(4.6478 - i0.02941)\Omega^2],$$

а также значения фазовых скоростей $v = \dfrac{\Omega}{\alpha}$ при $\Omega \longrightarrow \infty$ для обобщенных поверхностных волн, полученные с помощью рассчитанных дисперсионных кривых для различных значений δ:

$$\delta = 0: \ v = 1.0644 + i0.0,$$

$$\delta = 0.01: \ v = 1.06344 - i1.7986 \times 10^{-3},$$

$$\delta = 0.1: \ v = 1.06252 - i1.7931 \times 10^{-2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Holland R., EerNisse E.* Design of resonant piezoelectric devices // Cambridge: MIT. Press, 1969. 257 p.
2. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 4. Электротермовязкоупругость. Киев: Наук. думка, 1988. 319 с.
3. *Болкисев А.М.* Диссипация энергии при гармоническом нагружении вязкоупругого пьезоэлектрического материала // Прикл. мех. 1987. Т. 23. № 3. С. 146 - 150.
4. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
5. *Tiersten H.F.* Linear piezoelectric plate vibrations. New York: Plenum press, 1969. 211 p.
6. *Мадорский В.В., Устинов Ю.А.* Симметричные колебания пьезоэлектрических пластин // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1976. Т. 29. № 5. С. 51 - 58.
7. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
8. Пьезоэлектрические преобразователи: Справочник / Ганопольский В.В., Касаткин Б.А., Легуша Ф.Ф., Прудько Н.И., Пугачев С.И. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.
9. *Корн Г., Горн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М: Наука, 1970. 720 с.
10. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М: Наука, 1978. 512 с.