АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 2, с. 267 - 268

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534

# ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ МАКСВЕЛЛА–БЕТТИ

© 1996 г. Ю. И. Бобровницкий

*Лаборатория структурной акустики, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН*
*101830 Москва, ул. Грибоедова, 4*

Поступила в редакцию 16.02.95 г.

Принцип взаимности в самом общем виде формулируется следующим образом [1]: отклик линейной системы на воздействие точечного источника гармонических колебаний не изменится, если точки возбуждения и наблюдения поменять местами. Математически принцип записывается в виде соотношений (теорем) взаимности, связывающих отклики системы на две произвольные группы внешних воздействий. В частности, для упругих сред и конструкций теорема взаимности Максвелла–Бетти [2] записывается в виде равенства:

$$\iiint\limits_V \mathbf{f}_1^{\mathrm{T}}(x, y, z)\mathbf{u}_2(x, y, z)dV = \iiint\limits_V \mathbf{f}_2^{\mathrm{T}}(x, y, z)\mathbf{u}_1(x, y, z)dV, \tag{1}$$

где $\mathbf{f}_j = [f_{jx}, f_{jy}, f_{jz}]^{\mathrm{T}}$ – комплексные амплитуды плотности двух групп внешних сил, $j = 1, 2$; $\mathbf{u}_j = [u_{jx}, u_{jy}, u_{jz}]^{\mathrm{T}}$ – соответствующие им амплитуды смещений рассматриваемой системы, или в виде эквивалентного (1) соотношения:

$$\iiint\limits_V \mathbf{f}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_2 dV = \iiint\limits_V \mathbf{f}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_1 dV, \tag{2}$$

где $\mathbf{v}_j = -i\omega\mathbf{u}_j$ – векторы скорости. В равенствах (1) и (2) индекс T означает транспонирование, интегрирование производится по всему объему $V$ системы, зависимость от времени определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, который здесь опущен. Аналогичные соотношения имеют место и для жидкой среды, в общем случае неоднородной и ограниченной, в которой могут находиться также твердые упругие тела [1 - 5]. Соотношения взаимности широко используются в прикладных задачах (см., например, [5 - 8]).

Физический смысл соотношения (1) вполне ясен для статической теории упругости: силы и смещения являются в этом случае действительными величинами, а левая и правая части (1) представляют собой удвоенную работу, затраченную одной группой сил на преодоление действия другой группы сил. Таким образом, в статике соотношение (1) – это равенство перекрестных работ двух групп внешних сил.

В динамике физический смысл теоремы не столь очевиден: хотя каждое слагаемое в соотношении (1) или (2) имеет и в этом случае размерность работы или мощности, оно не является ни средней по времени работой (мощностью), ни мгновенным ее значением. Вопрос о том, равенство каких именно энергетических характеристик устанавливает теорема Максвелла–Бетти и аналогичные теоремы акустики и механики, насколько известно автору, в литературе не обсуждался.

Квадратичная функция от величин, гармонически изменяющихся во времени с частотой $\omega$, в частности любая энергетическая характеристика, может всегда быть представлена в виде суммы постоянной составляющей, не зависящей от времени, и переменной составляющей, гармонически зависящей от времени с частотой $2\omega$.

Ниже показывается, что с физической точки зрения теорема взаимности в форме (2) представляет собой *равенство переменных составляющих перекрестных мгновенных мощностей* двух групп внешних сил. Что касается постоянных составляющих, т.е. средних по времени перекрестных мощностей, а также их мгновенных значений, то для них равенство типа (2) не выполняется.

Для доказательства запишем силу и скорость в виде действительных гармонических функций общего вида

$$f(t) = f_c\cos\omega t + f_s\sin\omega t,\qquad v(t) = v_c\cos\omega t + v_s\sin\omega t, \tag{3}$$

где $f_{c,s}$, $v_{c,s}$ – действительные величины. Тогда мгновенная мощность по определению равна произведению функций (3) или

$$W(t) = f(t)v(t) = W_0 + W_c\cos 2\omega t + W_s\sin 2\omega t, \tag{4}$$

где

$$W_0 = \frac{1}{2}(f_c v_c + f_s v_s) \tag{5}$$

– постоянная составляющая мощности, а величины

$$W_c = \frac{1}{2}(f_c v_c - f_s v_s),\quad W_s = \frac{1}{2}(f_c v_s + f_s v_c) \tag{6}$$

характеризуют переменную составляющую мощности частоты.

В комплексном представлении функции (3) имеют следующий вид

$$f(t) = \mathrm{Re}(fe^{-i\omega t}),\ v(t) = \mathrm{Re}(ve^{-i\omega t}),$$

где комплексные амплитуды равны

$$f = f_c + if_s,\ \ v = v_c + iv_s.$$

Произведения комплексных амплитуд, входящие в соотношение (2), записываются с учетом (6) как

$$fv = (f_c v_c - f_s v_s) + i(f_c v_s + f_s v_c) = 2W_c + i2W_s. \quad (7)$$

Введя в рассмотрение комплексную амплитуду переменной составляющей мощности (4)

$$W_c \cos 2\omega t + W_s \sin 2\omega t = \mathrm{Re}(We^{-i2\omega t}),$$

где $W = W_c + iW_s$, нетрудно увидеть, что произведение (7) равняется $2W$. Следовательно, теорема Максвелла–Бетти в форме (2) означает равенство комплексных амплитуд переменных составляющих удвоенных перекрестных мощностей двух групп внешних сил.

Для постоянных составляющих (5) мгновенных перекрестных мощностей равенство (2) не верно. Это очевидно из следующего рассуждения. Вследствие закона сохранения энергии для механической системы без потерь средняя по времени мощность двух групп внешних сил равна нулю как при поочередном, так и при совместном их действии. Отсюда следует, что сумма (а не разность как в (2)) постоянных составляющих перекрестных мощностей равна нулю.

В заключение отметим, что такой же физический смысл теорема имеет и в форме (1): это равенство комплексных амплитуд переменных составляющих перекрестных мощностей, умноженных на величину, пропорциональную периоду колебаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Lyamshev L.M.* Reciprocity principle and its applications in acoustics. // Proceedings of International Noise and Vibration Control Conference NOISE-93. St.-Petersburg. 1993. V. 5. P. 41 - 51.
2. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: Объед. научно-техн. изд-во НКТП СССР, 1935.
3. *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955.
4. *Фурдуев В.В.* Теоремы взаимности. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
5. *Белоусов Ю.И., Римский-Корсаков А.В.* Принцип взаимности в акустике и его применение для расчета звуковых полей колеблющихся тел (обзор) // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 2. С. 161 - 172.
6. *Салин Б.М., Тютин В.А.* Применение метода взаимности для исследования механоакустических систем // Виброакустические поля сложных объектов и их диагностика. Горький: Ин-т прикл. физики АН СССР, 1989. С. 81 - 96.
7. *Fahy F.J., Mason J.M.* Development of a reciprocity technique for the prediction of propeller noise transmission through aircraft fuselages // Noise Control Engineering Journal. 1990. V. 34. № 2. P. 43 - 52.
8. *Verheij J.W.* Reciprocity method for quantification of airborne sound transfer from machinery // Proc. of the 2nd Intern. Congress on recent developments in air- and structure- borne sound and vibration. Auburn University, USA, 1991. P. 591 - 598.