АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 2, с. 262 - 263

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЗВУКОВОМ ИМПУЛЬСЕ

© 1996 г. С. Г. Абаимов, С. А. Рыбак
Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 16.03.95 г.

В работе [1] рассмотрена задача о рассеянии плоской звуковой волны вида

$$p_s = p_{s0}\exp(-i\omega_s t + ik_{sx}x + ik_{sy}y);\quad k_{sx} = k_s\cos\theta \tag{1}$$

на ограниченном в пространстве импульсе (рис. 1)

$$p_i = p_0\exp(-i\omega_0 t + ik_0 x);\quad x_2 - x_1 = l. \tag{2}$$

Рассмотрим более реалистичную форму импульса

$$p_i = p_0\exp(-i\omega_0 t + ik_0 x)\frac{\sin\left((x-ct)\frac{\delta k}{2}\right)}{(x-ct)\frac{\delta k}{2}};\quad \delta k \ll k_0. \tag{3}$$

Чтобы определить рассеянное поле, возникающее в результате взаимодействия волн (1) и (3), воспользуемся, как и прежде, уравнением [2]

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon - 2\sin^2(\theta/2)}{\rho c^4}\times \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{p_i + p_i^*}{2}\frac{p_s + p_s^*}{2}\right). \tag{4}$$

Решение уравнения (4) с помощью функции Грина

$$G(|\bar r - \bar r'|, t - t') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\bar r - \bar r'|}\delta(|\bar r - \bar r'| - c(t - t')) \tag{5}$$

имеет вид

$$p = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz'\, G(|\bar r - \bar r'|, t - t') f(\bar r', t'); \tag{6}$$

$$f(\bar r, t) = \frac{\bar\varepsilon\omega^2}{2\rho c^4}p_0 p_{s0}\exp(-i\omega t + iqx + ik_{sy}y)\times \frac{\sin\left((x-ct)\frac{\delta k}{2}\right)}{(x-ct)\frac{\delta k}{2}}. \tag{7}$$

Здесь

$$\omega = \omega_0 + \omega_s;\quad q = k_0 + k_s\cos\theta;\quad \bar\varepsilon = \varepsilon - 2\sin^2(\theta/2). \tag{8}$$

В силу медленности огибающей импульса мы пренебрегли ее производными по времени сравнительно с производными от заполнения.

Согласно принципу причинности интегрирование в (6) происходит по прошлому $t' < t$.

Из свойств δ-функции находим

$$t' = t - \frac{|\bar r - \bar r'|}{c}. \tag{9}$$

Обозначим $R = |\bar r - \bar r'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$.

Из (6) теперь получим

$$p = -\frac{\bar\varepsilon\omega^2 a^2}{8\rho c^4}p_0 p_{s0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{R}\exp\left(-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) + iqx'\right)\times \frac{\sin\left(\left(x' - c\left(t - \frac{R}{c}\right)\right)\frac{\delta k}{2}\right)}{\left(x' - c\left(t - \frac{R}{c}\right)\right)\frac{\delta k}{2}}dx' \tag{10}$$

в приближении пологого падения волны $\sin\theta \ll \lambda_s/a$. Радиус пакета из-за дифракции увеличивается по закону $a - a_0 \sim \lambda_0 x'/a_0$, откуда следует ограничение на x'.

Из (3) следует соотношение для максимума огибающей

$$x'_{\max} = ct'. \tag{11}$$

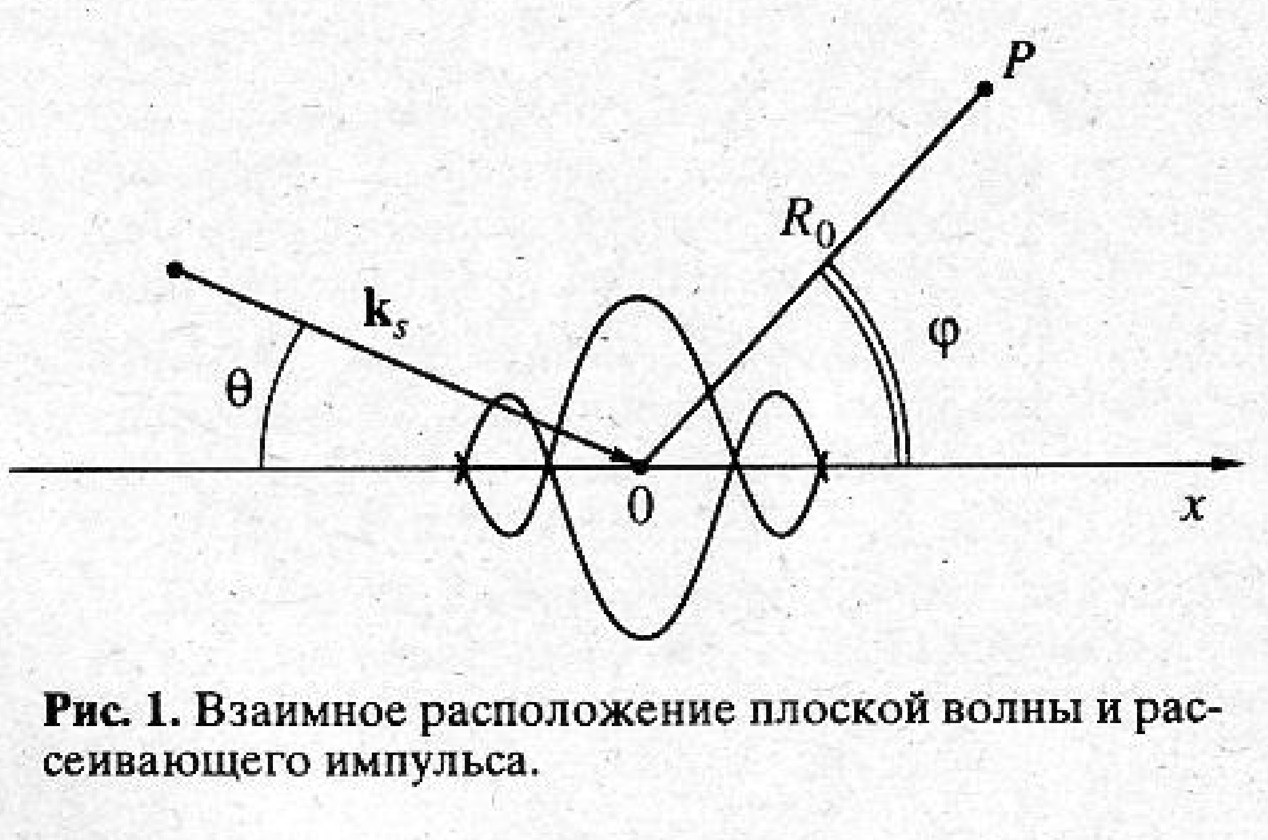

Рис. 1. Взаимное расположение плоской волны и рассеивающего импульса.

Из (11) и (9) находим

$$x'_{\max} = \frac{ct - R_0}{1 - \cos\varphi}, \quad \text{где } R_0 = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}; \quad (12)$$
$$\cos\varphi = x/R_0.$$

Соотношение (12) определяет положение максимума, рассеянный сигнал от которого приходит в точку наблюдения в момент t.

При $\varphi \longrightarrow 0$ имеем $R_0 \longrightarrow x$ и $t \longrightarrow x/c$, т.е. рассеянное поле от максимума огибающей приходит в точку x одновременно с самим максимумом.

Представим $x' = x'_{\max} + \xi$,

$$R = R_0 - x'_{\max}\cos\varphi - \xi\cos\varphi. \quad (13)$$

Разложение (13) имеет место при следующих предположениях:

а) $|x'_{\max}| \ll |x|$, т.е. (14)

$$\left|\frac{ct - R_0}{1 - \cos\varphi}\right| \ll |x|; \quad (15)$$

б) огибающая быстро стремится к нулю при уходе $(x - ct)$ от нуля.

При сделанных предположениях

$$p = -\frac{\bar{\varepsilon}\omega^2 a^2}{8\rho c^4} p_0 p_{s0} \frac{\exp\left(-i\omega_{\text{д}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)\right)}{R_0} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp(i\chi\xi) \frac{\sin\left(\xi(1-\cos\varphi)\frac{\delta k}{2}\right)}{\xi(1-\cos\varphi)\frac{\delta k}{2}}, \quad (16)$$

где $\omega_{\text{д}} = \omega_s \dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\varphi}$; $\chi = -\dfrac{\omega}{c}\cos\varphi + q$.

Производя в (16) интегрирование по ξ, получим

$$p = -\frac{\bar{\varepsilon}\omega^2 a^2}{8\rho c^4 R_0} p_0 p_{s0} \exp\left(-i\omega_{\text{д}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)\right) \times$$
$$\times \frac{\pi}{\delta k(1-\cos\varphi)} \left(\operatorname{sign}\left((1-\cos\varphi)\frac{\delta k}{2} + \chi\right) + \right. \quad (17)$$
$$\left. + \operatorname{sign}\left((1-\cos\varphi)\frac{\delta k}{2} - \chi\right)\right).$$

Таким образом, рассеяние происходит на доплеровской частоте. Последний множитель в (17) обеспечивает равенство нулю рассеянного давления везде вне области углов

$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2, \quad (18)$$

где

$$\cos\varphi_1 = \frac{k_0 + \frac{\delta k}{2} + k_s\cos\theta}{k_0 + \frac{\delta k}{2} + k_s};$$

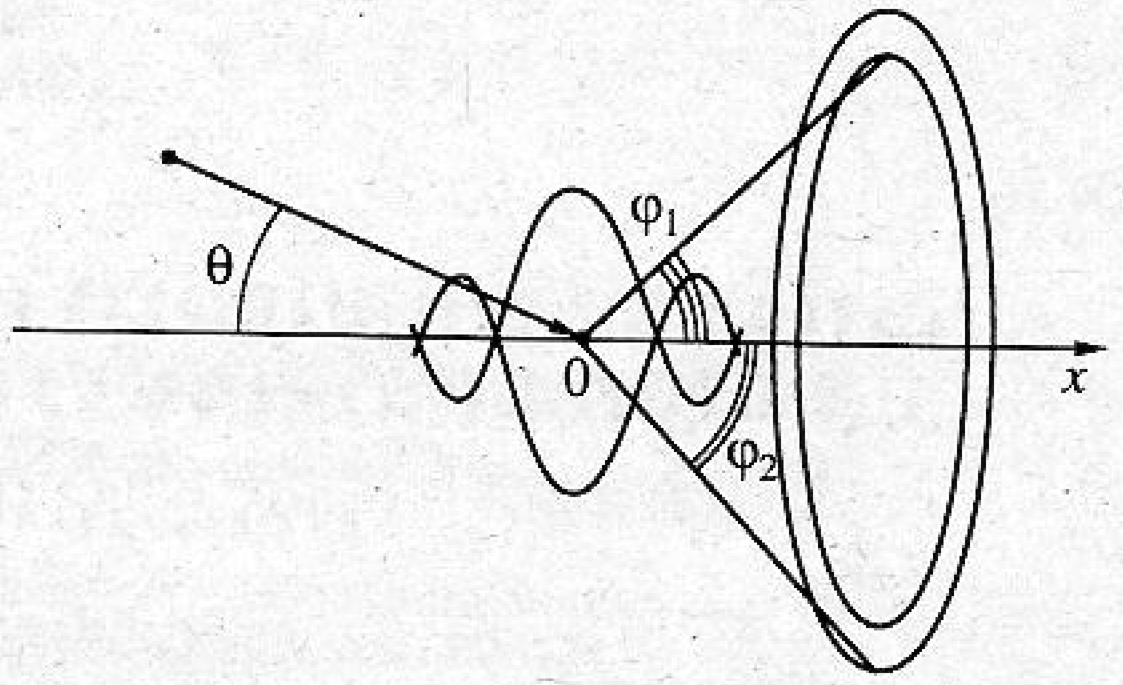

Рис. 2. Поле рассеяния плоской волны на звуковом импульсе.

$$\cos\varphi_2 = \frac{k_0 - \frac{\delta k}{2} + k_s\cos\theta}{k_0 - \frac{\delta k}{2} + k_s}.$$

Так как ширина импульса δk в импульсном пространстве много меньше волнового числа k, то рассеяние происходит только в малую окрестность угла φ_0

$$\cos\varphi_0 = \frac{k_0 + k_s\cos\theta}{k_0 + k_s}. \quad (19)$$

Ширина этой окрестности

$$|\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2| = \frac{\delta k k_s}{(k_0 + k_s)^2}(1 - \cos\theta) \ll 1,$$

из-за узкополосности импульса, т.е. рассеяние происходит только в узкую область между двумя конусами, расположенными вблизи угла (19), и разрывно спадает до нуля при пересечении границ конусов (рис. 2).

В окрестности угла (19) доплеровская частота фактически равна суммарной.

Интеграл в выражении (16) для огибающей любой формы дает множитель $(1 - \cos\varphi)^{-1}$ и спектр огибающей, как функцию выражения

$$\frac{\chi}{1 - \cos\varphi}.$$

Рассеяние, как и в рассмотренном выше случае, происходит на доплеровской частоте (также близкой к суммарной) только в малую окрестность угла (19), границы которой даются (18). Однако давление при пересечении границ может спадать не разрывно, как было в рассмотренном выше случае, а более плавно.

Работа поддержана РФФИ, № 94-02-03296.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наугольных К.А., Рыбак С.А.* Взаимодействие плоской волны с акустическим импульсом // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 101 - 103.
2. *Зверев В.А., Калачев А.И.* Модуляция звука звуком при пересечении акустических волн // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 2. С. 245 - 252.