АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 1, с. 5 - 9

УДК 539.3:534.1

# ДИСПЕРСИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ОРТОТРОПНОМ СЛОЕ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 1996 г. **О. П. Абрамова, В. И. Сторожев, В. А. Шпак**

*Донецкий государственный университет*

*340055 Донецк, ул. Университетская, 24*

Поступила в редакцию 10.10.94 г.

Представлена методика качественного и количественного анализа дисперсионных уравнений, позволяющая сформулировать для материалов орторомбического класса ряд свойств распределения дисперсионных кривых в зависимости от направления распространения плоских гармонических волн. Приведены результаты численных исследований дисперсионных характеристик для закрепленного по граням волновода из кристалла сегнетовой соли.

Нормальные волны в изотропном слое с однородными кинематическими условиями на одной либо обеих граничных поверхностях, а также в закрепленном по границе цилиндре исследовались в работах [1 - 4].

Один из выводов этих работ состоит в необходимости качественного аналитического исследования дисперсионного соотношения и порождающей его спектральной задачи, без которого существенно усложняется прямой численный анализ дисперсионного уравнения, особенно в областях асимптотического поведения дисперсионных кривых, зонах их сближения, расталкивания и взаимопревращения. В еще большей мере это относится к многофакторным задачам анализа нормальных волн в низкосимметричном анизотропном слое. Некоторые результаты, полученные для частных материалов и направлений распространения [5, 6], оставляют открытыми вопросы поиска качественных закономерностей распределения дисперсионных кривых, сохраняющих общность хотя бы для достаточно большого круга материалов, относящихся к определенному классу упругой симметрии. Для свободного прямолинейно-ортотропного слоя некоторые качественные выводы относительно структуры дисперсионного спектра волн с произвольным направлением распространения получены в работах [7 - 10].

В данной работе рассматривается методика обобщенного качественного анализа дисперсионного уравнения для прямолинейно-ортотропных волноводов с однородными условиями первого основного типа на гранях и некоторые результаты расчетов характеристик нормальных волн в кристалле сегнетовой соли.

Исследуемая форма дисперсионных соотношений для анизотропного слоя $|x_3| \le h$, характеризующегося матрицей упругих постоянных $C_{pq}$ ($p, q = \overline{1, 6}$) и плотностью $\rho$, находится в результате подстановки выражений компонент вектора упругих смещений вида

$$u_j^{\pm}(x_1, x_2, x_3, t) = f^{\pm}(x_3) \exp i(\gamma(l_1 x_1 + l_2 x_2) - \omega t); \quad (1)$$

в однородные краевые условия

$$u_j^{\pm}(x_1, x_2, \pm h, t) = 0, \ (j = \overline{1, 3}). \quad (2)$$

В представлениях (1), удовлетворяющих уравнениям движения ортотропного упругого тела [9]: $\omega$, $\gamma$ – круговая частота и волновое число нормальной волны; $l_1 = \cos\varphi$, $l_2 = \sin\varphi$ – компоненты вектора волновой нормали $\bar{l}$; $\varphi$ – угол между осью $Ox_1$ и волновой нормалью; $\mu_m = -i\lambda_m$; $\lambda_m$, $\alpha_j^{(m)}$ ($m = \overline{1, 3}$) – соответственно собственные числа и компоненты собственных векторов матрицы Кристоффеля [7]. Выражения с индексами "+" и "–" описывают симметричные и антисимметричные по $x_3$ волновые движения:

$$\{f_1^{\pm}(x_3);\ f_2^{\pm}(x_3);\ f_3^{\pm}(x_3)\} = \sum_{m=1}^{3} \left\{ \alpha_1^{(m)} \begin{matrix} A_{1m}^{+} \cos \mu_m x_3 \\ A_{1m}^{-} \sin \mu_m x_3 \end{matrix};\ \alpha_2^{(m)} \begin{matrix} A_{2m}^{+} \cos \mu_m x_3 \\ A_{2m}^{-} \sin \mu_m x_3 \end{matrix};\ \alpha_3^{(m)} \begin{matrix} A_{3m}^{+} \sin \mu_m x_3 \\ A_{3m}^{-} \cos \mu_m x_3 \end{matrix} \right\}. \quad (3)$$

При ориентации вектора волновой нормали вдоль произвольного направления, несовпадающего с координатными осями, симметричные и антисимметричные нормальные волны являются трехпарциальными. Для упруго-эквивалентных направлений анализируемые волновые движения распадаются на независимые однопарциальные $SH$-волны и двухпарциальные $P$–$SV$-волны.

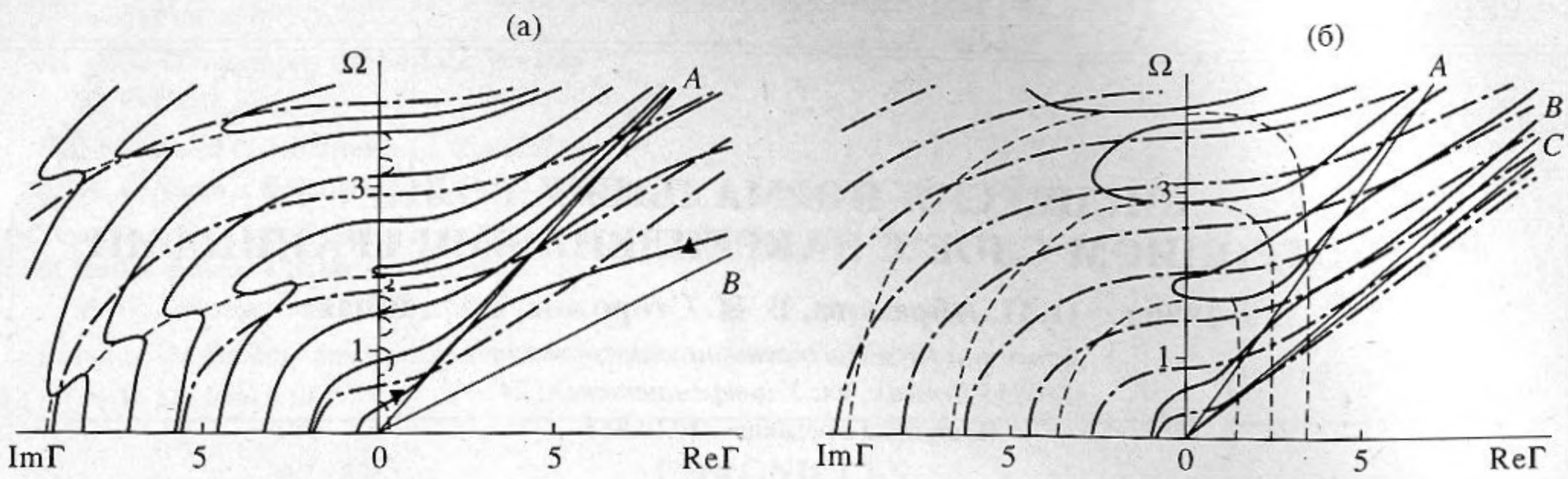


**Рис. 1.** Дисперсионные спектры симметричных нормальных волн в слое кристалла сегнетовой соли для направлений $\varphi = 0°$ (а) и $\varphi = 90°$ (б).

Дисперсионные зависимости для симметричных и антисимметричных *SH*-волн определяются явными соотношениями:

$$(\gamma^{\pm})^2 = (\rho\omega^2 - C_5\pi^2(n^{\pm})^2/n^2)/C_6;$$

$$n^+ = 1, 2, \ldots;\ n^- = (2n+1)/2;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Дисперсионные уравнения для *P–SV*-волн могут быть представлены в виде:

$$\kappa_1^{\pm}\sin(\mu_1 h)\cos(\mu_2 h) - \kappa_2^{\pm}\cos(\mu_1 h)\sin(\mu_2 h) = 0. \quad (4)$$

Здесь $\kappa_1^+ = \kappa_2^- = (\mu_1^2 - a_{11})/\mu_1$; $\kappa_2^+ = \kappa_1^- = (\mu_2^2 - a_{11})/\mu_2$; $\mu_{1,2}$ – корни характеристического уравнения

$$\mu^4 - p\mu^2 + q = 0, \quad (5)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$p = a_{11} + a_{22} - a_{12}a_{21};\ q = a_{11}a_{22};$$

$$a_{11} = (\rho\omega^2 - C_1\gamma^2)/C_3;\ a_{12} = i\gamma(C_3 + C_4)/C_3;$$

$$a_{22} = (\rho\omega^2 - C_3\gamma^2)/C_2;\ a_{21} = i\gamma(C_3 + C_4)/C_2;$$

где $C_1 = C_{rr}$, $C_2 = C_{33}$, $C_3 = C_{6-r,6-r}$, $C_4 = C_{r3}$, $C_5 = C_{3+r,3+r}$, $C_6 = C_{66}$; $r = 1$ для $\varphi = 0°$ и $r = 2$ для $\varphi = 90°$.

Установлено, что некоторые принципиальные особенности распределения дисперсионных кривых *P–SV*-мод, в частности в коротковолновом диапазоне, могут быть описаны применительно к волноводам из любых материалов орторомбического класса на основе качественного анализа дисперсионных соотношений, построенных для кратных корней характеристического уравнения. Условия существования кратных корней уравнения (5) имеют вид $\omega = v\gamma$, где значения $v$ определяются из равенства нулю свободного члена ($q = 0$) характеристического уравнения и из условия равенства нулю дискриминанта уравнения (5), которое может быть представлено в виде:

$$d_1 v^4 + d_2 v^2 + d_3 = 0, \quad (6)$$

где

$$d_1 = \tilde{C}_1^2 - 4C_1C_2C_3^2;$$

$$d_2 = 2\rho(C_1(C_2 + C_3) + 2C_2C_3(C_1 + C_3));$$

$$d_3 = \rho^2(C_2 - C_3)^2;\ \tilde{C}_1 = (2C_3 + C_4)C_4 - C_1C_2.$$

Из условия $q = 0$ устанавливается $v = v_p = (c/\rho)^{1/2}$ и $v = v_{sv} = (C_3/\rho)^{1/2}$, а уравнение (6) для всех ортотропных материалов, описываемых в работе [11], имеет либо комплексно-сопряженные корни, либо по одному положительному ($v_D^2$) и отрицательному ($v_I^2$) действительному корню.

Соотношения $\omega = v_\alpha\gamma$ ($\alpha = P, SV, D$) определяют лучи $0A$, $0B$ и $0C$ (рис. 1), которые разбивают область (Re $\gamma > 0$) на четыре сектора: $I_1 = \{v\colon\ v > v_P\}$, $I_2 = \{v\colon\ v_P > v > v_{SV}\}$, $I_3 = \{v\colon\ v_{SV} > v > v_D\}$ и $I_4 = \{v\colon\ v < v_D\}$. Если корень $v_D$ отсутствует, то характеристическое уравнение (5) в первых трех секторах имеет соответственно два действительных, по одному действительному и мнимому, оба мнимых корня. На луче $0A$ ненулевой корень уравнения (5) является действительным, а на луче $0B$ – мнимым.

Наличие корня $v_D$ не изменяет тип корней уравнения (5) в первом и втором секторе и на луче $0A$, а при $v < v_D$ появляются комплексно-сопряженные корни. В области $I_3$ тип корней характеристического уравнения определяется знаком коэффициента $p$: при $p > 0$, что выполняется для большинства рассматриваемых материалов, корни будут мнимыми, а при $p < 0$ – действительными. В последнем случае на луче $0B$ ненулевой корень также является действительным.

Дисперсионное уравнение (4) при $v = v_{SV}$ для симметричных волн имеет вид

$$C_2(C_1 - C_3)\mu_{SV}h = (C_3 + C_4)^2\mathrm{tg}(\mu_{SV}h). \quad (7)$$

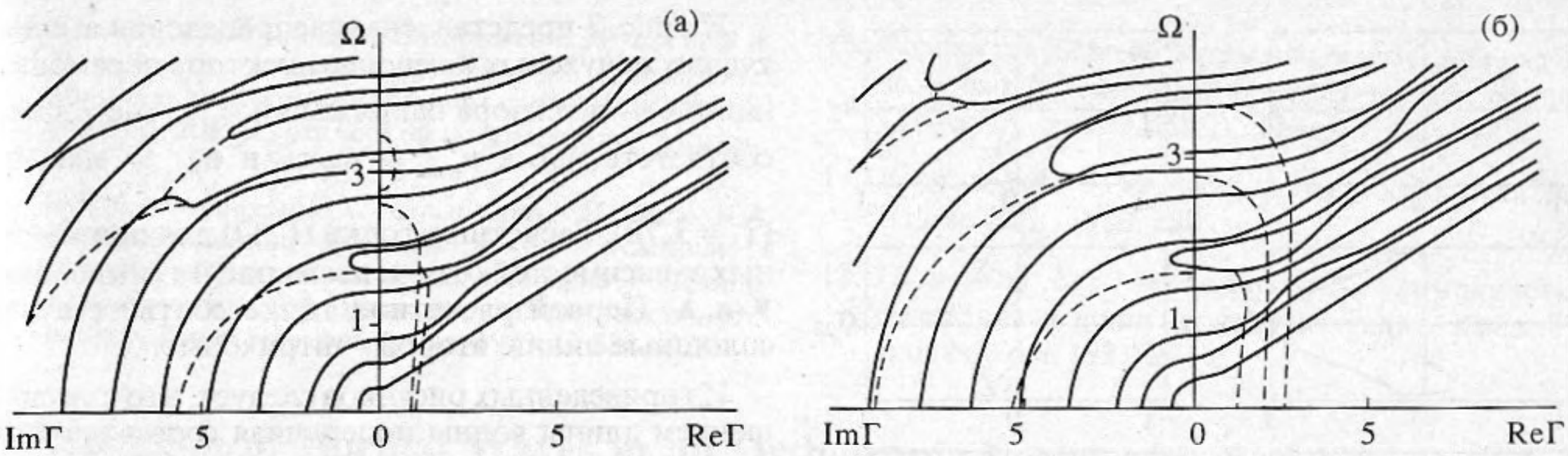


**Рис. 2.** Дисперсионные спектры симметричных нормальных волн в слое кристалла сегнетовой соли для направлений $\varphi = 35°$ (а) и $\varphi = 45°$ (б).

Если на луче $0B$ значения $\mu_{SV}$ – мнимые, то уравнение (7) имеет только нулевой действительный корень, и, следовательно, дисперсионные кривые $P$–$SV$-волн не пересекают прямую $\omega = v_{SV}\gamma$, а их фазовые скорости будут больше скорости объемной вертикально поляризованной волны.

В случае когда $\mu_{SV}$ на луче $0B$ является действительным, существует счетное число корней уравнения (7). Это означает, что $P$–$SV$-моды имеют точки пересечения с прямой $\omega = \gamma v_{SV}$ и появляются такие интервалы изменения $\omega$ и $\gamma$, в которых $P$–$SV$-волны будут медленнее объемной сдвиговой $SV$-волны. Из рассматриваемых материалов подобным свойством обладает, например, германат лития при $\varphi = 0°$. Аналогичные выводы относительно свойств корней (7) на луче $0B$ справедливы для антисимметричных волн.

Дисперсионное уравнение (4) на луче $\omega = v_D\gamma$ имеет вид

$$-(\mu_D^2 + a_{11})\sin(2\mu_D h) = (\mu_D^2 - a_{11})\,2\mu_D h. \qquad (8)$$

Уравнение (8) справедливо для обоих случаев симметрии волнового поля и имеет ($\mu_D^2 > 0$, $a_{11} < 0$) только нулевой действительный корень. Таким образом, если существует корень $v_D$ и коэффициент $p < 0$, то для $P$–$SV$-волн в коротковолновом диапазоне выполняется неравенство $v_{SV} > v > v_D$.

Для анализа мнимой части спектра рассмотрим дисперсионные соотношения (4) на оси $0\mathrm{I}m\gamma$. Если корень $v_l$ уравнения (6) отсутствует, то характеристическое уравнение (5) при $\omega = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни, а в противном случае – пару действительных. Соответственно дисперсионные соотношения (4) в этом случае примут вид:

$$A_1 \sin(\alpha_1\tilde{\gamma}) = \pm A_2 \sin(\alpha_2\tilde{\gamma}); \qquad (9)$$

$$B_1 \sin(\beta_1\tilde{\gamma}) = \pm B_2 \mathrm{sh}(\beta_2\tilde{\gamma}), \qquad (10)$$

где $\tilde{\gamma} = i\gamma$; $A_m$, $B_m$, $\alpha_m$, $\beta_m$ ($m = 1, 2$) – действительные коэффициенты, зависящие только от модулей упругости.

Уравнение (9) имеет, очевидно, счетное число действительных корней. Наличие ненулевых действительных корней уравнения (10) зависит от соотношений между его коэффициентами. Для рассматриваемых материалов, как показывают численные расчеты, $B_m > 0$ и $B_1\beta_1 > B_2\beta_2$. Это означает, что в отличие от случая свободного слоя [7], в котором нет мнимых корней при $\omega = 0$, дисперсионное уравнение (4) имеет ненулевое решение, притом только одно, для симметричных $P$–$SV$-мод.

На рис. 1 представлены результаты численного расчета дисперсионных кривых симметричных нормальных волн в слое кристалла сегнетовой соли [11] для направлений $\varphi = 0°$ (рис. 1а) и $\varphi = 90°$ (рис. 1б). Здесь $\Gamma = 2\gamma h/\pi$, $\Omega = 2\omega h/\pi v_0$, $v_0 = (C_{33}/\rho)^{1/2}$. При отклонении волнового вектора $\bar{l}$ от кристаллографических осей $0x_1$, $0x_2$ в распределении дисперсионных кривых происходят радикальные изменения, общие закономерности которых аналогичны описанным ранее для свободного слоя [7]. На рис. 2а и 2б приведены диаграммы дисперсионных кривых для двух промежуточных значений угла $\varphi$, равных соответственно 35° и 45°.

Главным отличием спектра нормальных волн в закрепленном по граням слое является отсутствие действительных мод, выходящих из начала координат. Среди особенностей поведения мнимой части спектра, кроме уже отмечавшегося существования в низкочастотной области одной мнимой моды для симметричных $P$–$SV$-волн, можно отметить появление нового типа мнимых ветвей, представляющих собой петлеобразные кривые, выходящие из точек на оси $0\mathrm{Im}\Gamma$.

Использовавшийся при анализе предельных свойств $P$–$SV$-волн ($\varphi = 0°$ и $\varphi = 90°$) способ построения дополнительных дисперсионных соотношений в случае кратных корней характеристического уравнения Кристоффеля позволяет сделать выводы о качественном поведении дисперсионных

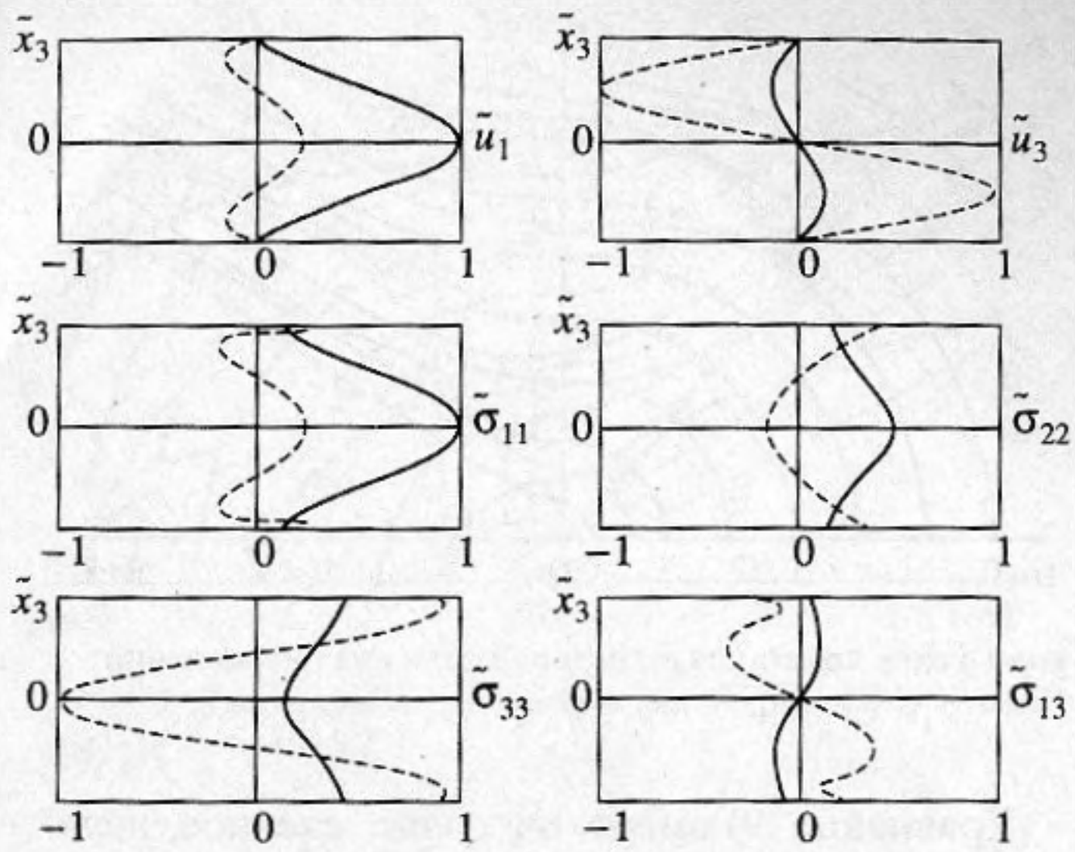


**Рис. 3.** Распределения по толщине слоя амплитудных значений перемещений и напряжений в нормальных волнах.

кривых и при произвольном значении угла φ. Из условия равенства нулю свободного члена характеристического уравнения возникают соотношения, полностью совпадающие с соотношениями для фазовых скоростей объемных волн [7 - 9]. Это означает, что зависимости $v_P = l_1(\varphi)$, $v_{SH} = l_2(\varphi)$ и $v_{SV} = l_3(\varphi)$, определяющие влияние направления распространения объемных волн на их фазовые скорости, задают на плоскости $0\varphi v$ кривые, на которых уравнение Кристоффеля имеет пару нулевых корней, и области, внутри которых не меняется знак свободного члена. Действительные корни уравнения, получаемого из условия равенства нулю дискриминанта уравнения Кристоффеля, образуют кривую $v_D = l_4(\varphi)$, устанавливающую на плоскости $0\varphi v$ границу области, внутри которой характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни.

Анализ дисперсионных соотношений в случае кратных корней характеристического уравнения позволяет построить кривую $v^*(\varphi)$, образованную из фрагментов зависимостей $v_\alpha = l_i(\varphi)$ и определяющую в коротковолновом диапазоне предельные значения фазовых скоростей нормальных волн в жесткозащемленном слое. Для кристалла сегнетовой соли кривая $v^*(\varphi)$ имеет вид [8]:

$$v^*(\varphi) = \begin{cases} v_{SV}(\varphi), & \varphi \in \left[0^\circ, \varphi_{B_1}\right]; \\ v_D(\varphi), & \varphi \in \left[\varphi_{B_1}, \varphi_{B_2}\right]; \\ v_{SH}(\varphi), & \varphi \in \left[\varphi_{B_2}, 90^\circ\right]. \end{cases} \qquad (11)$$

Здесь $B_1$ и $B_2$ соответственно точки пересечения кривых $l_3$, $l_4$ и $l_2$, $l_4$.

На рис. 3 представлены распределения амплитудных ненулевых компонент вектора перемещений $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_3$ и тензора напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$, отнесенные соответственно к $u_{\max} = \max\limits_{j,\tilde{x}_3} u_j$ и $\sigma_{\max} = \max\limits_{i,j,\tilde{x}_3} \sigma_{ij}$ ($\tilde{x}_3 = x_3/h$). Расчетные точки (Γ, Ω) для приведенных зависимостей отмечены на рис. 1а символами ▼ и ▲. Первой расчетной точке соответствуют сплошные линии, второй – штриховые.

Из приведенных рисунков следует, что с уменьшением длины волны поперечная составляющая колебаний становится преобладающей. При этом параллельно происходит увеличение компонент тензора напряжений вблизи закрепленной границы слоя.

В направлениях, отличных от упруго-эквивалентных, при стремлении скорости нормальных волн к скоростям объемных *SV*- и *SH*-волн основными становятся, соответственно, вертикальные и горизонтальные компоненты вектора перемещений. При $v \longrightarrow v_D$ обе сдвиговые составляющие становятся сравнимы по порядку. Аналогичные выводы справедливы и для компонент тензора напряжений. В поведении составляющих усредненного потока мощности [12] принципиальным является эффект локализации упругой энергии нормальных волн в срединной части слоя при $v \longrightarrow v_D$. Подобное явление имеет место и в случае свободного слоя [8].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Мартыненко О.Н., Мелешко В.В.* Распространение нормальных волн в слое, лежащем на жестком основании // Прикл. механика, 1986. Т. 22. № 7. С. 23 - 29.
3. *Генкин М.Д., Бобровицкий Ю.И.* Колебания упругой полосы // Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М.: Наука, 1975. С. 12 - 42.
4. *Комиссарова Г.Л.* Дисперсия осесимметричных нормальных волн в упругом жесткозащемленном цилиндре // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 9. С. 38 - 42.
5. *Kaul R.K., Mindlin R.D.* Vibrations of an infinite monollinic crystal plates at high frequencies and long wavelengths // I. Accust. Soc. Amer., 1962, **34**, № 12, p. 1895 - 1901.
6. *Kaul R.K., Mindlin R.D.* Frequency spectrum of monoclinic crystal plate // I. Accust. Soc. Amer., 1962, **34**, № 12, p. 1902 - 1910.
7. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И., Шпак В.А.* Спектр симметричных нормальных волн в ортотропном слое // Теорет. и прикл. механика. Харьков: 1988. Вып. 19. С. 116 - 121.

8. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И., Шпак В.А.* Новый тип локализации энергии нормальных волн в анизотропном упругом слое // Доклады XI Всесоюзной акустической конференции, Москва, 1991. С. 155 - 158.

9. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И., Шпак В.А.* Распространение длинных волн в композитах (континуальная теория первого порядка) // Механика композитов. Т. 2. Динамика и устойчивость материалов. Киев: Наукова думка, 1993. С. 388 - 376.

10. Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах // Сб. научн. тр. ЛОМИ. Л.: Наука, 1984. 282 с.

11. *Шутилов В.А.* Основы физики ультразвука // Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 280 с.

12. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.

## Dispersion of Normal Waves in an Orthotropic Layer with Fixed Boundaries

**O. P. Abramova, V. I. Storozhev, and V. A. Shpak**

[For orthorhombic materials,] a method of qualitative and quantitative analysis of dispersion equations is suggested that reveals a number of properties of the distribution of dispersion curves depending on the direction of propagation of plane harmonic waves. For a waveguide of a crystal of Seignette salt fixed at its faces, the results of numerical studies of dispersion characteristics are presented.