*АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 6, с. 1003 - 1005*

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

*УДК 534.222*

# УСРЕДНЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ (МОМЕНТЫ) ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА–ЗАБОЛОТСКОЙ

**© 1994 г. Ю. Н. Маков, О. А. Сапожников**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

*199899 Москва, Ленинские горы, МГУ*

Поступила в редакцию 01.04.94 г.

Хорошо известное в нелинейной акустике уравнение Хохлова–Заболотской [1, 2] естественным образом обобщается для описания распространяющихся волновых пучков в средах без дисперсии со степенной нелинейностью произвольного порядка:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\gamma\frac{\partial u^n}{\partial\tau}\right)=\frac{c}{2}\Delta_\perp u, \qquad (1)$$

где $z$ – расстояние вдоль направления распространения волны, $\Delta_\perp$ – лапласиан по поперечным координатам $\mathbf{r}_\perp=(x, y)$, $\tau=t-z/c$ – время в системе координат, движущейся вместе с волной со скоростью $c$, $u$ – колебательная скорость волны в $n$ – нелинейной среде с характерным параметром нелинейности $\gamma$.

Отметим, что случаю $n=2$ соответствует классическое уравнение Хохлова–Заболотской нелинейной акустики; при $n=3$ уравнение (1) описывает пучок сдвиговых волн в твердом теле [3]; дробные значения $n$ характерны для сред, структура которых моделируется соприкасающимися твердыми элементами (так называемая нелинейность Герца [4]).

В отсутствие точных аналитических решений уравнения (1) даже при простейших и традиционных типах нелинейности ($n=2, 3$) большой интерес могут представлять усредненные характеристики, для получения и анализа которых можно использовать, например, известный метод моментов [5].

Прежде всего, приведем различные дивергентные (консервативные) формы записи уравнения (1), что вместе с условием достаточно быстрого стремления функции $u$ к нулю на бесконечно удаленных границах интервала изменения переменных $\tau$, $x$, $y$ позволит найти сохраняющиеся по $z$ величины и необходимые уравнения для моментов.

При введении функции $w=\int_{-\infty}^{\tau}u d\tau$ и интегрировании (1) по времени от $-\infty$ до $\tau$ оно примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\gamma\frac{\partial u^n}{\partial\tau}=\frac{c}{2}\Delta_\perp w. \qquad (2)$$

Полагая в (2) $\tau=\infty$ и используя теорему единственности для решений уравнения Лапласа (с учетом нулевого значения $u$ на бесконечно удаленной границе области переменных $x$, $y$), имеем сохраняющийся интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}u d\tau=0$.

Повторное интегрирование уравнения (2) по времени позволяет записать его в виде

$$\frac{\partial w}{\partial z}+\gamma u^n=\frac{c}{2}\Delta_\perp\int_{-\infty}^{\tau}w d\tau, \qquad (3)$$

откуда аналогичными рассуждениями получаем[1] $\int_{-\infty}^{\infty}w d\tau=0$.

Умножение уравнения (2) на $2u$ дает

$$\frac{\partial u^2}{\partial z}=-\mathrm{div}\,\mathbf{j}^{(1)}, \qquad (4)$$

где

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j}^{(1)}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2n}{n+1}\gamma u^{n+1}+\frac{c}{2}(\nabla_\perp w)^2\right]+\nabla_\perp(-cu\nabla_\perp w),$$

$$\nabla_\perp=\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Из (4) следует

$$\frac{dI_1}{dz}=0, \quad \text{т. е. } I_1=\int u^2 d\tau ds_\perp=\mathrm{const}. \qquad (5)$$

Здесь и далее подразумевается интегрирование по бесконечному интервалу изменения $\tau$ и по всей "поперечной" плоскости $s_\perp$ с координатами $(x, y)$.

Умножая обе части уравнения (2) на $u^n$ и используя уравнение (3) для замены этого множителя в правой части, получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{c}{4}(\nabla_\perp w)^2-\frac{\gamma}{n+1}u^{n+1}\right]=-\mathrm{div}\,\mathbf{j}^{(2)}, \qquad (6)$$

[1] Для периодической по $\tau$ функции $u$ равны нулю интегралы, взятые по временному периоду $T$.

где

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{c^2}{8}\left(\Delta_\perp\int_{-\infty}^{\tau} w d\tau\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2}u^{2n}\right] + \nabla_\perp\left(-\frac{c}{2}\frac{\partial w}{\partial z}\nabla_\perp w\right).$$

Следствием (6) является существование следующего сохраняющегося интеграла

$$I_2 \equiv H = \int\left[\frac{c}{4}(\nabla_\perp w)^2 - \frac{\gamma}{n+1}u^{n+1}\right]d\tau ds_\perp = \text{const}, \quad (7)$$

который имеет смысл гамильтониана, поскольку волновое уравнение (2) с его помощью записывается в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\delta H}{\delta u}, \quad (8)$$

где в правой части стоит вариационная производная от функционала $H$.

Переход от полученного гамильтониана (7) к соответствующей плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial\tau} - \frac{c}{4}(\nabla_\perp w)^2 + \frac{\gamma}{n+1}\left(\frac{\partial w}{\partial\tau}\right)^{n+1}$$

и использование теоремы Нетер [6] позволяет регулярным образом получить другие законы сохранения для обобщенного уравнения Хохлова–Заболотской (1).

Сохранение интеграла $I_1$ от положительно определенной величины позволяет эффективно использовать эту величину (сопоставляя ее с функцией плотности вероятности) для определения соответствующих средних характеристик (моментов) распространяющегося в $n$ – нелинейной среде пучка.

Определим положение "центра тяжести" поперечного сечения пучка как соответствующий момент первого порядка:

$$R_\text{ц}(z) = \langle\mathbf{r}_\perp\rangle = \frac{1}{I_1}\int\mathbf{r}_\perp u^2 d\tau ds_\perp. \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по $z$ с использованием соотношения (4) и формул векторного анализа, получаем

$$\frac{d\mathbf{R}_\text{ц}}{dz} = -\frac{c}{I_1}\int u\nabla_\perp w d\tau ds_\perp. \quad (10)$$

Повторное дифференцирование (10) по $z$ с использованием (2) и (3) дает следующий результат:

$$\frac{d^2\mathbf{R}_\text{ц}}{dz^2} = -\frac{c^2}{I_1}\int\nabla_\perp w\Delta_\perp w d\tau ds_\perp = 0. \quad (11)$$

Таким образом, отсюда получаем следующий вывод: любые деформации исходного сечения пучка (прежде всего, за счет дифракции) при его распространении в $n$ – нелинейной среде происходят таким образом, что точка "центра тяжести" сечения пучка движется прямолинейно с постоянной скоростью, т.е. $\mathbf{R}_\text{ц}$ изменяется линейно с изменением координаты

$$\mathbf{R}_\text{ц}(z) = \mathbf{R}_\text{ц}(0) + \mathbf{V}_\text{ц}z, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{V}_\text{ц} = -\frac{c}{I_1}\int u\nabla_\perp w d\tau ds_\perp = \text{const}.$$

Рассмотрим квадрат "эффективного" радиуса пучка как момент второго порядка

$$a^2_\text{эфф} = \langle\mathbf{r}_\perp^2\rangle = \frac{1}{I_1}\int\mathbf{r}_\perp^2 u^2 d\tau ds_\perp. \quad (13)$$

Используя (4), (2), (3) и формулы векторного анализа, получаем следующие выражения для производных от квадрата эффективного радиуса:

$$\frac{da^2_\text{эфф}}{dz} = -\frac{2c}{I_1}\int\mathbf{r}_\perp u\nabla_\perp w d\tau ds_\perp, \quad (14)$$

$$\frac{d^2a^2_\text{эфф}}{dz^2} = \frac{1}{I_1}\left[8cH + 2c\gamma\frac{4-(n-1)d}{n+1}\int u^{n+1}d\tau ds_\perp\right], \quad (15)$$

где $d$ – размерность поперечного сечения пучка, т.е. $d = 1$ для одномерного ("щелевого") в поперечном сечении пучка и $d = 2$ для произвольного двумерного сечения пучка.

Выражение (15) выделяет два особых случая:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ d = 1 \quad (\text{"щелевой" пучок}) \text{ и } n = 5, \\ &\text{б)}\ d = 2 \quad (\text{двумерный в поперечном сечении пучок}) \text{ и } n = 3, \end{aligned} \quad (16)$$

когда второе слагаемое в правой части (15) обращается в нуль, что ведет к постоянству второй производной от эффективного радиуса пучка и, следовательно, к изменению этого радиуса в любой $n$ – нелинейной среде по параболическому закону

$$a^2_\text{эфф}(z) = a^2_\text{эфф}(0) + Az + \frac{4c}{I_1}Hz^2, \quad (17)$$

где

$$A = -\frac{2c}{I_1}\int\mathbf{r}_\perp u\nabla w d\tau ds_\perp\Big|_{z=0}.$$

Полученное соотношение (17) позволяет также сделать некоторые выводы о возможных решениях для волноводного распространения пучка (стационарного относительно координаты $z$), когда существующая нелинейность определенным

образом компенсирует дифракционные деформации поперечного сечения пучка. Для таких характерных решений (стационарных относительно координаты $z$) выражение (15) должно равняться нулю. В двух выделенных случаях (16) для обсуждаемых стационарных решений с необходимостью получаем $H = 0$. Однако это означает, что в этих двух выделенных случаях возможные стационарные по $z$ решения будут неустойчивы, так как если в начальный момент времени из-за флуктуаций стационарного решения величина $H$ окажется положительной (отрицательной), то вторая производная от квадрата эффективного радиуса будет также положительной (отрицательной), что означает расплывание (схлопывание) пучка при его распространении вдоль оси $z$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-02-15453).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заболотская Е.А., Хохлов Р.В.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 1. С. 40 - 47.
2. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
3. *Руденко О.В., Сапожников О.А.* Безынерционная самофокусировка недиспергирующих волн с широким спектром // Квантовая электроника. 1993. Т. 20. № 10. С. 1028 - 1030.
4. *Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.
5. *Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И.* Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов) // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 9. С. 1353 - 1363.
6. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961.