АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 6, с. 1001 - 1002

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ВОЛНОВОДЕ С БОКОВЫМ ОТВЕТВЛЕНИЕМ ПРИ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТАХ МОД

© 1994 г. А. Д. Лапин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 25.04.94 г.

Пусть волновод с сечением S имеет жесткие стенки и в цилиндрической системе координат (r, φ, z) они описываются уравнением $r = G(\varphi)$. Волновод заполнен однородной средой, плотность среды и скорость звука в ней равны соответственно ρ и c. К волноводу в точке $(r_0, \varphi_0, 0)$, где $r_0 = G(\varphi_0)$, присоединено узкое (по сравнению с длиной звуковой волны) боковое ответвление с сечением S_0, характеризуемое импедансом Z_0. Например, импеданс бокового отростка длиной L с закрытым концом равен $i\rho c\,\mathrm{ctg}(kL)$, где k – волновое число, импеданс присоединенной полубесконечной трубы – ρc. Пусть на ответвление падает гармоническое звуковое поле $p^{(0)}$. В результате рассеяния возникает дополнительное поле $p^{(1)}$. Полное поле в волноводе равно $p^{(0)} + p^{(1)}$. Требуется найти рассеянное поле $p^{(1)}$ и исследовать влияние бокового ответвления на передачу звука по волноводу.

Гармоническое звуковое поле в волноводе можно представить в виде суперпозиции нормальных мод, т.е. волн, распространяющихся без изменения формы [1]. Для нахождения поля $p^{(1)}$ используем следующий прием. Поскольку поперечные размеры бокового ответвления малы по сравнению с длиной звуковой волны, то можно считать приближенно, что нормальная скорость на его входе одинакова на всей площади S_0. Обозначим эту нормальную скорость через v_0. Можно полагать, что рассеянное поле $p^{(1)}$ создается источником объемной скорости $(v_0 S_0)$, расположенным в точке $(r_0, \varphi_0, 0)$. Пользуясь стандартным методом [1, 2], опишем рассеянное поле в виде суперпозиции мод:

$$p^{(1)}(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k\rho c S_0 v_0}{2\theta_m \xi_m S} \psi_m(r_0, \varphi_0)\psi_m(r, \varphi) e^{i\xi_m |z|}, \tag{1}$$

где

$$\theta_m = \frac{1}{S}\int_S \psi_m^2(r, \varphi)dS,$$

$\psi_m(r, \varphi)$ – собственные функции волновода, ξ_m – волновые числа нормальных мод, $\xi_0 = k = \omega/c$, ω – частота звука. С увеличением номера m волновое число ξ_m уменьшается для однородных (распространяющихся) мод и увеличивается по модулю для неоднородных (затухающих) мод. Собственные функции $\psi_m(r, \varphi)$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta_\perp \psi_m + (k^2 - \xi_m^2)\psi_m = 0$$

(где $\Delta_\perp = (\Delta - (\partial^2/\partial z^2))$ – двумерный лапласиан по координатам r, φ) и граничному условию

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } r = G(\varphi),$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к стенке волновода.

Для всех мод, кроме нулевой, степень возбуждения зависит от положения монополя (источника объемной скорости). Амплитуда моды может изменяться от нуля (при помещении монополя в узел распределения давления моды) до максимального значения (в пучности распределения). Максимальная степень возбуждения распространяющихся мод по мере увеличения номеров растет, а степень возбуждения неоднородных мод падает. Амплитуда данной распространяющейся моды с ростом частоты убывает, а амплитуда неоднородной моды растет. Общее правило для распространяющихся и неоднородных мод – увеличение степени возбуждения по мере приближения к критической частоте.

Входной импеданс волновода равен

$$Z = \frac{p^{(1)}(r_0, \varphi_0, 0)}{v_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k\rho c S_0}{2\theta_m \xi_m S}\psi_m^2(r_0, \varphi_0). \tag{2}$$

Он стремится к бесконечности при приближении частоты звука к критической частоте какой-либо моды волновода.

Величину v_0 и, следовательно, поле $p^{(1)}(r, \varphi, z)$ можно найти, используя граничное условие на входе бокового ответвления

$$(p_0^{(0)} + p_0^{(1)}) / v_0 = -Z_0,$$

где $p_0^{(0)} = p^{(0)}(r_0, \varphi_0, 0)$, $p_0^{(1)} = p^{(1)}(r_0, \varphi_0, 0)$. Из этого граничного условия при учете соотношения $p_0^{(1)}/v_0 = Z$, получим:

$$v_0 = -\frac{p_0^{(0)}}{(Z_0 + Z)}.$$

Подставляя v_0 в формулу (1), получим рассеянное поле в волноводе, обусловленное боковым ответвлением с импедансом Z_0

$$p^{(1)}(r, \varphi, z) = -\frac{\rho c S_0 p_0^{(0)}}{2S(Z_0 + Z)} \times \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k}{\theta_m \xi_m} \psi_m(r_0, \varphi_0) \psi_m(r, \varphi) e^{i\xi_m |z|}. \tag{3}$$

Для резонатора Гельмгольца, присоединенного к волноводу, рассеянное поле было рассчитано в работе [3].

Исследуем структуру рассеянного поля при критических частотах мод. Пусть частота ω приближается к критической частоте q-й моды. Тогда получим следующие соотношения:

$$\xi_q \longrightarrow 0, \quad Z \approx \frac{k\rho c S_0}{2\xi_q S} \psi_q^2(r_0, \varphi_0) \longrightarrow \infty,$$

$$v_0 \approx -\frac{p_0^{(0)}}{Z} \longrightarrow 0,$$

$$p^{(1)}(r, \varphi, z) \longrightarrow -p_0^{(0)} \frac{\psi_q(r, \varphi)}{\psi_q(r_0, \varphi_0)}.$$

При частоте звука, равной критической частоте q-й моды, рассеянное поле состоит из одной q-й стоячей моды, бегущие моды не возбуждаются. Таким образом, на критических частотах нормальных мод звуковое поле $p^{(0)}(r, \varphi, z)$ без ослабления передается по волноводу при любом импедансе Z_0 бокового ответвления.

В области низких частот, когда поперечные размеры волновода малы по сравнению с длиной звуковой волны, из общих формул (2) и (3) получим известные результаты теории длинных линий [4]:

$$Z \approx \rho c \frac{S_0}{2S}, \quad p^{(1)}(z) \approx -\frac{\frac{1}{2}\frac{\rho c S_0}{Z_0 S}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\rho c S_0}{Z_0 S}} A e^{ik|z|},$$

где A – амплитуда падающей волны. Полное поле равно $A(e^{ikz} + Ve^{-ikz})$ при $z < 0$ и равно AWe^{ikz} при $z > 0$, где V и W соответственно коэффициенты отражения и прохождения, определяемые по следующим формулам:

$$V = -\frac{1}{2}\frac{\rho c}{Z_0}\frac{S_0}{S}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho c}{Z_0}\frac{S_0}{S}\right)^{-1},$$

$$W = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho c}{Z_0}\frac{S_0}{S}\right)^{-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
2. *Урусовский И.А.* // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 2. С. 304 - 312.
3. *Лапин А.Д.* // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 4. С. 773 - 775.
4. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ. 1960.