АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 5, с. 829 - 836

УДК 523.592

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

© 1994 г. И. А. Сазонов

Институт физики атмосферы РАН
109017 Москва, Пыжевский пер., 3

Поступила в редакцию 24.08.93 г.

Проведен расчет теплового поля в сдвиговом потоке вблизи плоской стенки, нагреваемой гармоническим источником. Для линейного профиля скорости потока получено точное выражение для пространственного спектра, само же поле восстанавливалось по спектру двумя способами: аналитическим (для асимптотики) и численным с использованием методов БПФ. Проведено сравнение обоих методов между собой и с данными эксперимента, взятыми из литературы, получено неплохое совпадение. Показано, что для описания распространения тепловых волн в потоке удобно использовать методы, сходные с лучевыми в акустике. Показано, что при определенных условиях могут наблюдаться интерференционные явления, характерные для обычных волновых процессов.

Наряду с традиционными методами дефектоскопии в последнее время получили широкое распространение тепловые методы. Суть их заключается в том, что для зондирования среды вместо источника и приемника обычных волн (например, ультразвуковых или рентгеновских и т.п.), используют источник и приемник тепла [1, 2]. Распространение тепла по телу во многом напоминает распространение акустических волн в сильно вязких средах. В настоящей работе будет изучаться распространение гармонических тепловых волн в сдвиговом потоке, при этом будет показано, что при их описании можно использовать модовый, а в некоторых случаях даже лучевой подходы, применяемые для расчета распространения звуковых волн в неоднородных средах.

В работе Бюссе [2] описан ряд экспериментов по распространению тепловых волн в движущихся образцах. Один из них заслуживает особого внимания. Стенка трубки, по которой протекала жидкость, периодически нагревалась внешним источником. В качестве источника использовался модулированный лазерный луч, сфокусированный в малую область стенки (рис. 1). Тепловое поле на стенке трубки, обусловленное как теплопередачей в самой стенке, так и в потоке жидкости, измерялось инфракрасным детектором. В опыте Бюссе отмечено резкое изменение амплитуды и фазы тепловой волны вниз по потоку по сравнению со случаем покоящейся жидкости. Вверх по потоку обнаружено лишь незначительное изменение фазы.

На взгляд автора этот эксперимент может стать основополагающим для множества приложений. На этом принципе могут быть созданы удобные расходомеры. Тепловые волны благодаря своей малой длине могут оказаться полезными для изучения процессов, происходящих в вязком подслое – самой важной области пристеночной турбулентности, и т.п.

Ясно, что для эффективного применения подобных методов необходимо уметь рассчитывать распространение тепла в сдвиговых потоках. Причем необходимо решать как прямую, так и обратную задачу: восстановить характеристики потока по данным измерения теплового поля. Настоящая работа посвящена расчетам теплового поля в сдвиговом потоке около стенки, нагреваемой периодическим локализированным источником, т.е. решению прямой задачи, однако для определенных областей параметров получены формулы и для обратной задачи. При этом для количественных оценок и выбора приближений использованы параметры модели (теплопроводность, частота источника, размеры трубки и т.д.) такого же порядка, как и в опыте Бюссе.

Отметим, что, например для изучения турбулентных движений жидкости важно, чтобы само введенное в жидкость тепло не оказывало влияния на ее движение, т.е. чтобы не создавался конвективный перенос тепла, а наоборот, чтобы

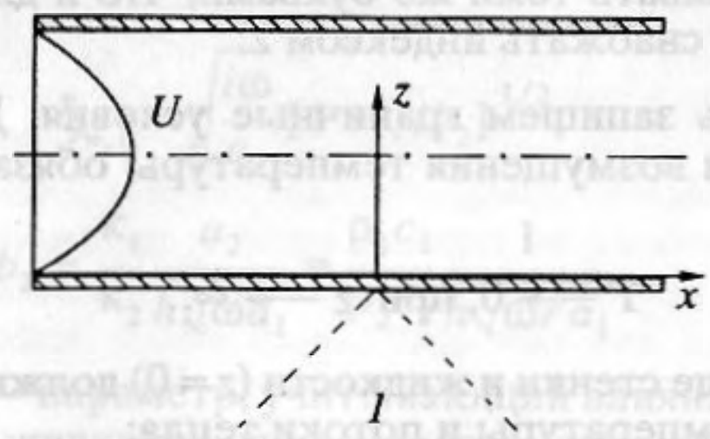

Рис. 1. Схема эксперимента Бюссе: *1* – модулированный лазерный луч.

тепло распространялось как пассивная примесь. Это накладывает ограничение на интенсивность источника, но существенно упрощает решение задачи.

При постановке задачи и выборе расчетной модели учтем, что глубина проникновения тепловой волны в стенку трубки (≈0.3 мм), а особенно в жидкость (≈0.05 мм) много меньше радиуса кривизны трубки (≈3 мм). Поэтому кривизна трубки слабо повлияет на тепловое поле в стенке и около нее. То же можно сказать и о слоях жидкости, далеких от стенки. Из этого следует, что можно вместо цилиндрической рассмотреть плоскую стенку, поток считать полубесконечным, а его профиль скорости линейным (вблизи стенки он действительно близок к линейному). Таким образом, в работе будет рассмотрена следующая модель (рис. 1): внешняя поверхность плоской стенки толщины h нагревается локальным гармоническим источником, характеризуемым потоком тепла $P(x, y, t)$ (x – координата вдоль потока, y – ортогональная ей вторая координата, также параллельная стенке, далее используем также координату z – ортогональную стенке). Поток будем считать плоско-параллельным с профилем $U(z)$. Требуется рассчитать возмущения температуры $T(x, y, z, t)$ в среде, и, в частности, на внешней поверхности стенки $T(x, y, -h, t)$, где она измерялась в опыте Бюссе.

Возмущения температуры в движущейся среде удовлетворяют модифицированному уравнению теплопроводности (см., например, [4]):

$$(\partial_t + U\partial_x)\, T = a_1 \Delta T, \tag{1}$$

где $(\partial_t + U\partial_x)$ – оператор полной производной по времени t, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ – оператор Лапласа, $a_1 = \kappa_1/\rho_1 c_1$ – коэффициент температуропроводности жидкости (κ_1 – ее коэффициент теплопроводности, ρ_1 – плотность, c_1 – теплоемкость).

Уравнение теплопроводности в стенке имеет стандартный вид:

$$\partial_t T = a_2 \Delta T. \tag{2}$$

Все параметры среды, относящиеся к стенке, будем описывать теми же буквами, что и для жидкости, но снабжать индексом 2.

Теперь запишем граничные условия. Далеко от стенки возмущения температуры обязаны исчезать.

$$T \longrightarrow 0, \text{ при } z \longrightarrow \infty. \tag{3}$$

На границе стенки и жидкости ($z = 0$) должны совпадать температуры и потоки тепла:

$$T|_{z=+0} = T|_{z=-0}, \quad \kappa_1 \partial_z T|_{z=+0} = \kappa_2 \partial_z T|_{z=-0}. \tag{4}$$

На внешней поверхности стенки поток тепла обусловлен внешним источником:

$$\kappa_2 \partial_z T|_{z=-h} = P(x, y, t). \tag{5}$$

Таким образом, задача заключается в решении уравнений (1), (2) с граничными условиями (3) - (5).

Если источник гармонический:

$$P(x, y, t) = P(x, y) \exp(-i\omega t), \tag{6}$$

а профиль скорости линейный и не меняется во времени:

$$U = \gamma z, \tag{7}$$

то пространственный спектр решения задачи (2) - (7) может быть найден точно и выражен через функцию Эйри и ее производную. Тепловое поле естественно будет также гармоническим $T(x, y, z, t) = T(x, y, z)\exp(-i\omega t)$, множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем будем опускать.

Произведем преобразование Фурье поля возмущений температуры по пространственным координатам x и y. Пусть обратное ему преобразование имеет вид:

$$T(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \times \\ \times \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(\xi, \eta, z) \exp(+i\xi x + i\eta y)\, d\xi\, d\eta. \tag{8}$$

Для спектра возмущений температуры $\tilde{T}(z)$ в жидкости получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(-i\omega + i\xi\gamma z)\, \tilde{T} = a_1 [\tilde{T}'' - (\xi^2 + \eta^2)\, \tilde{T}],$$

которое линейной заменой сводится к уравнению для функции Эйри. В стенке имеем уравнение с постоянными коэффициентами:

$$-i\omega \tilde{T} = a_2 [\tilde{T}'' - (\xi^2 + \eta^2)\, \tilde{T}],$$

С учетом граничных условий (3) - (5) получим решение для спектра:

$$\tilde{T}(z) = B\,\mathrm{Ai}\,(\lambda z + \chi), \quad z > 0$$

$$\tilde{T}(z) = B\left[\cos(\zeta_2 z)\,\mathrm{Ai}(\chi) + \frac{\kappa_1 \lambda}{\kappa_2 \zeta_2} \sin(\zeta_2 z)\,\mathrm{Ai}'(\chi)\right], \tag{9}$$

$$-h < z < 0,$$

где

$$B = \tilde{P}(\zeta, \eta)[\kappa_2 \zeta_2 \mathrm{Ai}(\chi) \sin(\zeta_2 h) + \kappa_2 \lambda \cos(\zeta_2 h) \mathrm{Ai}'(\chi)]^{-1},$$

$\mathrm{Ai}(\chi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \exp[iu\chi + u^3/3]\, du$ – функции Эйри, $\zeta_{1,2} = (i\omega/a_{1,2} - \xi^2 - \eta^2)^{1/2}$ – вертикальные компоненты волновых чисел тепловых волн

в жидкости без потока (ζ_1) и стенке (ζ_2), $\chi = -\zeta_1^2/\lambda^2$, $\lambda = (i\gamma\xi/a_1)^{1/3}$ – параметры, входящие в аргумент функции Эйри, причем

$$\arg\lambda(\xi) = \pi/6, \quad \text{при} \quad \xi > 0,$$
$$\arg\lambda(\xi) = -\pi/6, \quad \text{при} \quad \xi < 0. \tag{10}$$

Непосредственно на внешней поверхности стенки выражение для спектра возмущений температуры имеет вид:

$$\tilde{T}(-h) = \tilde{P}(\xi, \eta)\frac{1 - (\kappa_1\lambda/\kappa_2\zeta_2)\,\mathrm{Ti}(\chi)\,\mathrm{tg}(\zeta_2 h)}{\kappa_2\zeta_2 + \mathrm{tg}(\zeta_2 h) + \kappa_1\lambda\mathrm{Ti}(\chi)}, \tag{11}$$

где $\mathrm{Ti}(\chi) = \mathrm{Ai}'(\chi)/\mathrm{Ai}(\chi)$ – функция, играющая роль тангенса для функции Эйри.

Решение поставленной задачи в интегральной форме дается формулами (8) - (11). Чтобы получить явное выражение для $T(-h)$, необходимо вычислить обратное преобразование Фурье, и именно это является наиболее сложной задачей.

Ее можно решать двумя способами. Во-первых, можно исследовать аналитически различные асимптотики решения, например, на достаточно больших расстояниях от источника. Во-вторых, решить задачу численно, используя дискретное преобразование Фурье. Первый способ позволяет разобраться с физикой задачи, а также получить простые оценки для решения обратной задачи. Кроме того аналитический способ может явиться основой для дальнейших обобщений на нестационарные потоки, потоки с нелинейным профилем и т.д. Численный способ позволяет получить достаточно точную картину распределения теплового поля в более широком диапазоне изменения параметров.

В настоящей работе будут описаны оба способа и дано их сравнение. Начнем с аналитического.

Удобно сперва рассмотреть аналогичную плоскую задачу: все величины не зависят от пространственной координаты y. Это соответствует однородному вдоль оси y тепловому источнику. В дальнейшем будет показано, что учет трехмерности задачи внесет сравнительно небольшую ошибку, причем лишь в амплитуду тепловых волн, и слабо скажется на их фазе. Кроме того, двумерная задача сама по себе достаточно важна в практических приложениях.

В плоском случае достаточно использовать одномерное преобразование Фурье по оси x. Подставляя $\eta = 0$ в (11) и производя обратное преобразование Фурье, получим решение плоской задачи в интегральной форме:

$$T(x, -h) = -\frac{1}{2\pi}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{P}(\xi)\frac{1 - (\kappa_1\lambda/\kappa_2\zeta_2)\,\mathrm{Ti}(\chi)\,\mathrm{tg}(\zeta_2 h)}{\kappa_2\zeta_2\mathrm{tg}(\zeta_2 h) + \kappa_1\lambda\mathrm{Ti}(\chi)}e^{i\xi x}d\xi. \tag{12}$$

Здесь $\zeta_{1,2} = (i\omega/a_{1,2} - \xi^2)^{1/2}$.

Удобно начать исследование интеграла (12) с рассмотрения двух предельных случаев: отсутствия жидкости и отсутствия стенки. Для того чтобы устранить влияние жидкости, положим в (12) $\kappa_2 = 0$. Тогда подынтегральное выражение в (12) будет иметь полюса в точках $\xi = \xi_{w,n}$, в которых $\mathrm{tg}\,\zeta_2 h = 0$:

$$\xi_{w,0} = \pm(iw/a_2)^{1/2},$$
$$\xi_{w,n} \approx \pm[i\pi n/h + \omega h/(2a_2\pi n)], \quad n \neq 0.$$

Здесь и в дальнейшем берутся значения квадратного корня в правой полуплоскости. Вычеты в этих полюсах соответствуют модам тепловых волн, распространяющихся в стенке, при $x > 0$ следует брать вычеты в полюсах, лежащих в первом квадранте, т.е. со знаком плюс, а при $x < 0$ – вычеты в полюсах, лежащих в третьем квадранте. Все моды, кроме нулевой, быстро затухают на расстоянии, сравнимом с толщиной стенки ($\mathrm{Im}\xi_{w,n}h > 1$). Поэтому в дальнейшем будем учитывать лишь нулевую моду:

$$T_w(x, t) \approx -i\tilde{P}(\xi_{w,0})\,[2\kappa_2 h\xi_{w,0}]^{-1}\times$$
$$\times\exp(i\xi_{w,0}|x| - i\omega t), \tag{13}$$

которую будем называть оболочечной модой, а также упростим выражение для спектра $\tilde{T}(\xi, z)$, заменив $\mathrm{tg}\,\zeta_2 h$ на $\zeta_2 h$ и пренебрежем членами порядка h в числителе спектра:

$$\tilde{T}(\xi) \approx \frac{\tilde{P}(\xi)}{\kappa_2\zeta_2^2 h + \kappa_1\lambda\mathrm{Ti}(\chi)}. \tag{14}$$

Учет влияния жидкости на распространение оболочечной моды приведет к тому, что полюс $\xi_{w,0}$ несколько сместится со своего положения:

$$\xi_{w,0} \approx \sqrt{\frac{i\omega}{a_2}}\,[1 + \sqrt{i}b_2]^{1/2},$$
$$b_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\frac{a_2}{h\sqrt{\omega a_1}} \equiv \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\frac{1}{h\sqrt{\omega/a_1}}. \tag{15}$$

Здесь b_2 – параметр, учитывающий влияние покоющейся жидкости на распространение оболочечной моды (в опыте Бюссе $b_2 \approx 0.4$). В первом приближении влияние жидкости сводится к усилению

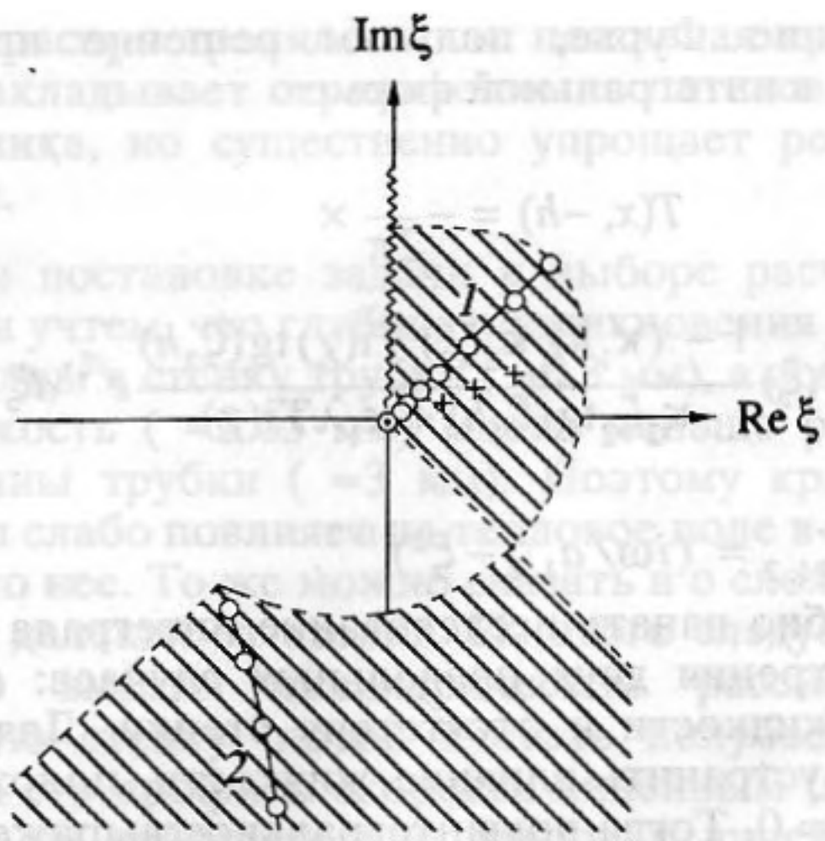

Рис. 2. Комплексная плоскость ξ. Кружками обозначены полюса, крестиками – точки перевала, извилистой линией разрез, в начале координат расположена точка ветвления, заштрихованы области, в которых $\chi(\xi) \in S_2$, *1* и *2* – линии, на которых расположены полюса при отсутствии стенки.

затухания этой моды. Как мы увидим ниже, поле оболочечной моды (13), (15) будет определяющим около источника, а также на всех расстояниях вверх по потоку.

Для расчета поля, определяемого потоком жидкости, удобно перейти к безразмерным переменным

$$\bar{\gamma} = \gamma/\omega, \quad \bar{\xi} = \xi(\omega/a_1)^{-1/2}, \quad \bar{\zeta} = \zeta(\omega/a_1)^{-1/2},$$
$$\bar{x} = x(\omega/a_1)^{1/2},$$

в которых

$$\bar{\lambda} = (i\bar{\xi}\bar{\gamma})^{1/3}, \quad \chi = -\bar{\zeta}_1^2\bar{\lambda}^{-2}.$$

При $\kappa_1 \neq 0$ появляются другие особенности аналитического продолжения $\tilde{T}(\xi)$ в комплексную плоскость, которые мы сейчас рассмотрим.

Для этого сначала проанализируем поведение функции $\mathrm{Ti}(\chi) = \mathrm{Ai}'(\chi)/\mathrm{Ai}(\chi)$ на плоскости χ, используя свойства функции Эйри. Функция $\mathrm{Ti}(\chi)$ имеет бесконечное число нулей и полюсов на полуоси $\chi < 0$ и существенную особую точку на бесконечности. При $|\chi| \longrightarrow \infty$ получаем различное асимптотическое поведение в зависимости от того, попадает χ в сектор $S_1 : |\arg(\chi)| < \pi/3$ или сектор $S_2 : |\arg(\chi)| > \pi/3$.

$$\mathrm{Ti}(\chi) = -\chi^{1/2}(1 + O(\chi^{-3/2})), \quad \text{если} \quad \chi \in S_1$$

$$\mathrm{Ti}(\chi) = -(\chi)^{1/2}\mathrm{tg}\left(\frac{2}{3}(-\chi)^{-3/2} - \frac{\pi}{4}\right)\times \tag{16}$$
$$\times(1 + O(\chi^{-3/2})), \quad \text{если} \quad \chi \in S_2.$$

Теперь рассмотрим особенности функции $\mathrm{Ti}(\chi(\xi))$. Во-первых, функция $\lambda(\xi)$ имеет точку ветвления $\xi = 0$. С учетом выбора ветви этой функции (10) ее можно аналитически продолжать с положительной полуоси на отрицательную через нижнюю полуплоскость. Проведем разрез вдоль полуоси $\mathrm{Im}\xi > 0$ и будем рассматривать ветвь спектра $\tilde{T}(\xi)$ на листе с таким разрезом (рис. 2), т.е. при $-3\pi/2 < \arg(\xi) < \pi/2$. Разрез проведен вертикально вдоль направления наискорейшего спуска подынтегральной функции в (12) (убывание обусловлено множителем $\exp(i\xi x)$).

На рис. 2 штриховкой выделены области, в которых $\chi(\xi) \in S_2$; границы между заштрихованными областями и обычными являются линиями Стокса $|\arg(\chi(\xi))| = 2\pi/3$. Функция $\chi(\xi)$ отрицательна, когда ξ принадлежит линии *1* или *2* (рис. 2). Линия *1* – прямая и лежит в первом квадранте, а линия *2* искривлена и лежит в третьем квадранте. Нули и полюса функции $\mathrm{Ti}(\chi)$ лежат на этих линиях.

При отсутствии стенки (т.е. при $h = 0$) нули функции $\mathrm{Ti}(\chi(\xi))$ являются полюсами спектра $\tilde{T}(\xi)$. При $h \neq 0$ эти полюса сместятся, но чем выше номер моды, тем ближе они будут расположены к линии *1*. Для полюсов высоких номеров можно выписать приближенное выражение:

$$\bar{\xi}_{f,n} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{i}}{\bar{\gamma}}\left[\pi n + \frac{\pi}{4} + -\mathrm{arctg}(\sqrt{i}b)\right]^{-1} = O(n^{-1}), \tag{17}$$
$$n \gg 1.$$

Здесь $b = b_2^{-1} = (\kappa_2/\kappa_1)(h/a_2)(\omega a_1)^{1/2}$ – параметр, характеризующий влияние стенки на поле в жидкости. Вычет в каждом из этих полюсов дает одну из мод тепловой волны, обусловленных потоком:

$$T_{f,n}(x,t) = \frac{\tilde{P}(\xi_{f,n})}{\kappa_1(i\omega/a_1)^{1/2}}\frac{3\bar{\gamma}\bar{\xi}_{f,n}^2}{2(1+ib^2)}\times \tag{18}$$
$$\times\exp(i\xi_{f,n}x - i\omega t).$$

Чем выше номер моды, тем меньше ее начальная амплитуда ($T_{f,n}(0) \sim \xi_{f,n}^2 = O(n^{-2})$), но тем меньше ее затухание вниз по потоку ($\mathrm{Im}\xi_{f,n} = O(n^{-1})$). Чем дальше от источника, тем моды более высоких номеров формируют поле тепловой волны, однако тем большее число этих мод одновременно участвуют в его формировании. В силу последнего обстоятельства модовый подход не дает возможности оценить поле, обусловленное потоком, на больших расстояниях от источника. Тем не менее модовое представление свидетельствует о том, что чем дальше от источника, тем меньшая окрестность начала координат плоскости ξ существенна для интегрирования (12).

Для вычисления асимптотики поля тепловых волн на значительных расстояниях от источника применим следующий прием. Заменим функцию $\mathrm{Ti}(\chi(\xi))$ при малых ξ его асимптотикой, а

появляющуюся при этом функцию tg представим в экспоненциальной форме:

$$\bar{\lambda}\mathrm{Ti}(\chi) \approx \begin{cases} i\bar{\zeta}, & \arg(\xi) < -\pi/4, \\ i\bar{\zeta}\dfrac{1-\exp(Z)}{1+\exp(Z)}, & \arg(\xi) > -\pi/4, \end{cases}$$

где $Z = (4i/3)\,(\bar{\zeta}/\bar{\lambda})^3 - \pi i/2$. Так как $\mathrm{Re}(Z) < 0$ для ξ, находящихся ниже линии *1* (т.е. при $|\arg(\xi)| < \pi i/4$), разложим подынтегральное выражение в (18) в ряд Тейлора по степеням $\exp(Z)$ и проинтегрируем его почленно:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots .$$

Нулевой член разложения вместе с интегралом по отрицательной полуоси ξ дает поле оболочечной моды, представленное формулами (13), (15):

$$T_0 \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{P}(\xi)}{\kappa_2\zeta_2^2 h + i\kappa_1\zeta_1} e^{i\xi x} d\xi \approx T_w.$$

Остальные члены разложения удобно записать через безразмерные переменные

$$T_n \approx \frac{1}{2\pi\kappa_1(\omega/a_1)^{1/2}} \frac{2\sqrt{i}}{(b+\sqrt{i})^2}\left[\frac{b-\sqrt{i}}{b+\sqrt{i}}\right]^{n-1} \times \int_0^{+\infty} \tilde{P}(\xi)\exp\left[nZ(\bar{\xi}) + i\bar{\xi}\bar{x}\right] d\bar{\xi}. \tag{19}$$

Асимпотику каждого из члена ряда $n \geq 1$ можно исследовать методом перевала, который дает для главных членов асимптотики следующее выражение:

$$T_n \approx \frac{\tilde{P}(\xi_{n,s})}{\kappa_1(\omega/a_1)^{1/2}} \frac{2\sqrt{2\pi i}}{(b+\sqrt{i})^2}\left[\frac{b-\sqrt{i}}{b+\sqrt{i}}\right]^{n-1} \times \left[\frac{n}{3\bar{\gamma}\bar{x}^3}\right]^{1/4} \exp\left[\Psi_{n,s} + \frac{5\pi i}{16}\right], \tag{20}$$

где

$$\Psi_{n,s} = nZ(\bar{\xi}_{n,s}) + i\bar{\xi}_{n,s}\bar{x} = 4\left[\frac{n\bar{x}}{3\bar{\gamma}}\right]^{1/2} e^{5\pi i/8} \tag{21}$$

– значение фазовой функции в точке перевала $\xi_{n,s}$:

$$\bar{\xi}_{n,s} = 2\left[\frac{n}{3\bar{\gamma}\bar{x}}\right]^{1/2} e^{\pi i/8}. \tag{22}$$

Аналогичный прием используется в акустических волноводах (см., например, [4]), где он имеет вполне определенный физический смысл: переход от модового представления поля к лучевому. Следуя акустической аналогии можно каждое из слагаемых T_n трактовать как поле, обусловенное приходом луча, причем T_1 – без отражений от стенки, а T_n, $n > 1$ – после $n-1$ отражений, с коэффициентом отражения равным $(b - \sqrt{i})/(b + \sqrt{i})$. Эти аналогии могут оказаться полезными при дальнейших обобщениях рассмотренной здесь задачи.

Из (21) видно, что медленнее всего затухает поле T_1, поэтому в дальнейшем только его и будем рассматривать, причем только главный член асимптотики. Соответствующее ему поле будем называть потоковой волной. Чтобы определить, при каких значениях параметров можно пренебречь остальными членами, сравним его с главным членом асимптотики поля T_2 и со вторым членом асимптотики T_1, при этом получим неравенство, имеющее простой вид в безразмерных переменных:

$$\bar{x} \gg \bar{\gamma}, \tag{23}$$

т.е., чем сильнее градиент потока, тем дальше от источника начинает "работать" формула (20) для T_1.

Таким образом, полное поле в пластинке можно представить как сумму оболочечной моды и потоковой моды

$$T = T_w + T_f, \tag{24}$$

где оболочечная мода T_w представлена формулами (13), (15), а потоковая мода T_f при $\bar{x} \gg \bar{\gamma}$ приближенно описывается (20), (21) при $n = 1$:

$$T_f \approx \frac{2\tilde{P}(\xi_{1,s})}{\kappa_1(\omega/a_1)^{1/2}} \frac{(2\pi)^{-1/2}}{(b+\sqrt{i})^2}\left[\frac{1}{3\bar{\gamma}\bar{x}^3}\right]^{1/4} \times \exp\left[4\left(\frac{\bar{x}}{3\bar{\gamma}}\right)^{1/2} e^{5\pi i/8} + \frac{21\pi i}{16}\right]. \tag{25}$$

Отметим. что при удалении от источника вниз по потоку потоковая мода затухает медленнее оболочечной: оболочечная – пропорционально $\exp(-\mathrm{const}\,x)$, потоковая – пропорционально $\exp(-\mathrm{const}\sqrt{x})$. Поэтому хотя вблизи источника доминирует поле оболочечной моды, но при удалении от него поле T_f на достаточно больших расстояниях обязательно превысит поле оболочечной моды (однако, если поток слишком слаб, то может произойти так далеко, что амплитуды обоих видов поля станут ниже уровня шумов).

Только на определенном расстоянии от источника оба поля становятся примерно равными друг другу по амплитуде. На этом расстоянии от источника суммарное поле зависит от разности фаз между оболочечной модой и волной, пришедшей по жидкости. Если окажется, что эта разность фаз близка к 180°, то на этом расстоянии возмущения температуры будут очень малы, т.е. будет наблюдаться интерференционный минимум, аналогичный интерференционным минимумам

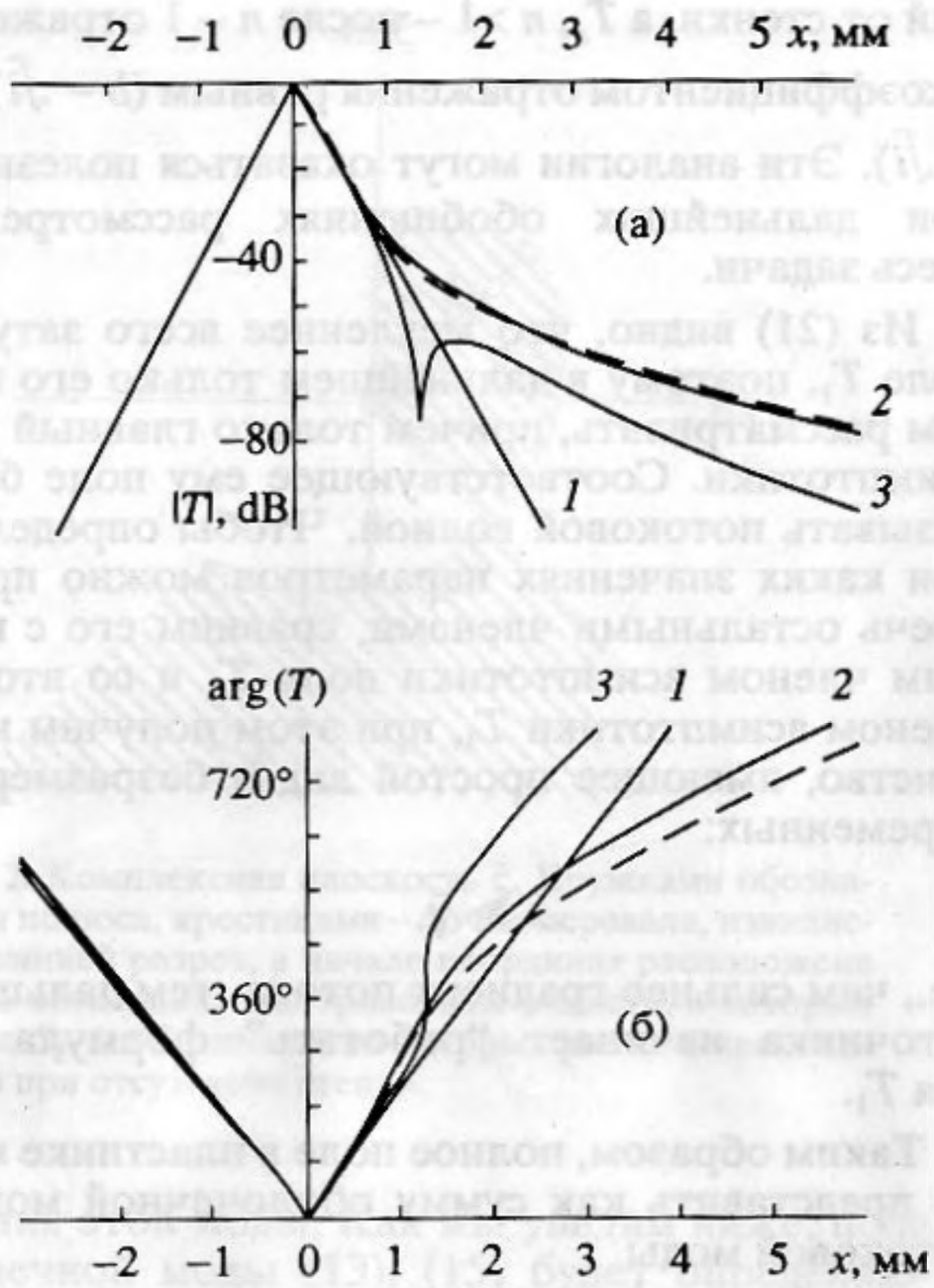

Рис. 3. Распределение амплитуды (*а*) и фазы (*б*) теплового поля, для отсутствия потока (*1*), для потока с градиентом скорости, таким же, как в опыте Бюссе (*2*), для потока с градиентом скорости, при котором наблюдается интерференционное явление (*3*); пунктиром обозначена кривая, построенная по аналитическим формулам для тех же параметров, что и кривая *2*.

в обычных волновых полях. Отличие от обычных интерференционных картин в том, что область интерференции весьма мала: при удалении от него резко начинает доминировать поле либо потоковой волны, либо оболочечной моды.

Формула (22) показывает корневую зависимость между градиентом скорости и фазой (φ, град) и амплитудой (*A*, *dB*) теплового поля, в тех местах, где оно "чувствует" поток:

$$\varphi = \varphi_0 + 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sqrt{\frac{x\sqrt{\omega/a_1}}{3\gamma/\omega}}\frac{180^\circ}{\pi},$$
$$A = A_0 - 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sqrt{\frac{x\sqrt{\omega/a_1}}{3\gamma/\omega}}\frac{20}{\ln(10)}, \tag{26}$$

где φ_0 и A_0 – некоторые условные значения отсчета фазы и амплитуды, характерные для данного эксперимента, поскольку абсолютные значения этих величин обычно определить затруднительно. Используя (26) можно решить обратную задачу: найти градиент скорости γ по измерению фазы или амплитуды поля:

$$\gamma = \left[\frac{180^\circ/\pi}{\varphi - \varphi_0}\right]^2 \frac{16\cos^2(\pi/8)}{3}\frac{x\omega^{3/2}}{a_1^{1/2}},$$
$$\gamma = \left[\frac{20/\ln(10)}{A - A_0}\right]^2 \frac{16\sin^2(\pi/8)}{3}\frac{x\omega^{3/2}}{a_1^{1/2}}.$$

Результаты, полученные для двумерного случая, сильно помогают при анализе трехмерного. Поле опять же можно представить в виде суммы оболочечной моды T_w и поля, обусловленного потоком T_f. При расчете оболочечной моды пренебрежем движением жидкости, и будем считать, что влияние жидкости мало. Тогда оболочечная мода будет уже не плоской, а цилиндрически симметричной и будет выражаться через функцию Ханкеля:

$$T_w \approx (2\pi)^{-2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{P}(\xi,\eta)}{\kappa_2\zeta_2^2 h + i\kappa_1\zeta_1}\exp(i\xi x + i\eta y)d\xi d\eta \approx$$
$$\approx \frac{\tilde{P}}{\kappa_2 h}\left[-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\xi_{w,0}r)\right],$$

где $\zeta_1 \approx (i\omega/a_1)^{1/2}$; $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$– расстояние от источника. При $|\xi_{w,0}|r \gg 1$ функцию Ханкеля можно заменить ее асимптотикой:

$$T_w \approx \frac{\tilde{P}}{\kappa_2 h}\sqrt{\frac{\pi}{2\xi_{w,0}r}}\exp(i\xi_{w,0}r - i\pi/4).$$

Потоковую волну в трехмерном случае рассчитаем следующим образом. Интегрирование по ξ проведем точно так же, как и в двумерном случае. При этом будем полагать, что основной вклад в интеграл дадут малые $\bar{\eta} = \eta(a_1/\omega)^{1/2}$. Можно показать, что это условие приведет к ограничению области рассмотрения потоковой моды $\bar{y}^2 \ll \bar{\gamma}\bar{x}$.

После интегрирования методом перевала по $\bar{\xi}$ получим для T_1 выражение, аналогичное (23), в котором лишь фазовая функция $\Psi_{1,s}$ будет несколько отличаться:

$$\Psi_{1,s} = 4\left(\frac{\bar{x}}{3\bar{\gamma}}\right)^{1/2}\left(\sqrt{i - \bar{\eta}^2}\right)^3 e^{-i\pi/8} \approx$$
$$\approx 4\left(\frac{\bar{x}}{3\bar{\gamma}}\right)^{1/2}\left(e^{5i\pi/8} - \frac{3}{2}\bar{\eta}^2 e^{-3i\pi/8}\right).$$

В остальных частях спектра по y параметром $\bar{\eta}$ можно пренебречь. Таким образом после интегрирования по $\bar{\eta}$ получаем

$$T_f \approx \frac{\tilde{P}}{\kappa_1 \pi}\sqrt{\frac{a_1}{6\omega}}\frac{1}{\bar{x}}\frac{\exp(-11\pi i/16)}{(b+\sqrt{i})^2}\times$$

$$\times \exp\left[4\left(\frac{\bar{x}}{3\bar{\gamma}}\right)^{1/2} e^{5\pi i/8} - \frac{\bar{y}^2}{4}\left(\frac{\bar{\gamma}}{3\bar{x}}\right)^{1/2} e^{-\pi i/4}\right].$$

Таким образом, в трехмерной задаче вниз по потоку ($y = 0$, $x > 0$) появляется дополнительное степенное затухание ($\sim x^{-1/2}$), обусловленное цилиндрической расходимостью, но реально оно будет слабо чувствоваться на фоне общего экспоненциального затухания. Фаза почти совсем "не чувствует" переход от плоской к трехмерной модели. При удалении от оси x поперек потока появляется дополнительное затухание по гауссовому закону ($\sim\exp(-\text{const}\, y^2/\sqrt{x})$).

Отметим, что методы аналитического решения задачи и в какой-то степени результаты аналогичны сходной акустической задаче о распространении звуковых волн в движущейся среде, в частности от локализованного источника в атмосфере с линейным профилем ветра [5]. Некоторое различие проявляется лишь в поведении полюсов на комплексной плоскости ξ.

Теперь приведем результаты второго подхода к восстановлению поля тепловых волн по его пространственному спектру: при помощи численных методов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

В двумерной постановке так же, как и при аналитическом исследовании вычислялось поле на внешней поверхности стенки, причем одновременно вверх и вниз по потоку от источника. Для того, чтобы восстановить поле на некотором участке, шаг дискретизации при вычислении спектра выбирался таким, чтобы при помощи БПФ-метода поле восстанавливалось на участке вдвое больше длины, чем требовалось, а затем "лишние" пространственные точки отбрасывались. Это позволяло устранить искажения поля, обусловленные дискретностью преобразования Фурье, увеличивающиеся к границам участка. Максимальное число точек в спектре бралось 1024, таким образом, после восстановления поля и отсекания лишних точек оставалось 512 пространственных точек. Однако, и при меньшем количестве точек спектра поле удовлетворительно восстанавливается БПФ-методом. Был выбран источник с гауссовым распределением притока тепла и характерным радиусом в 5 раз меньшим, чем толщина стенки. На рис. 3 приведены графики зависимости амплитуды и фазы тепловой волны для трех случаев: отсутствия потока, потока с таким же градиентом скорости возле стенки

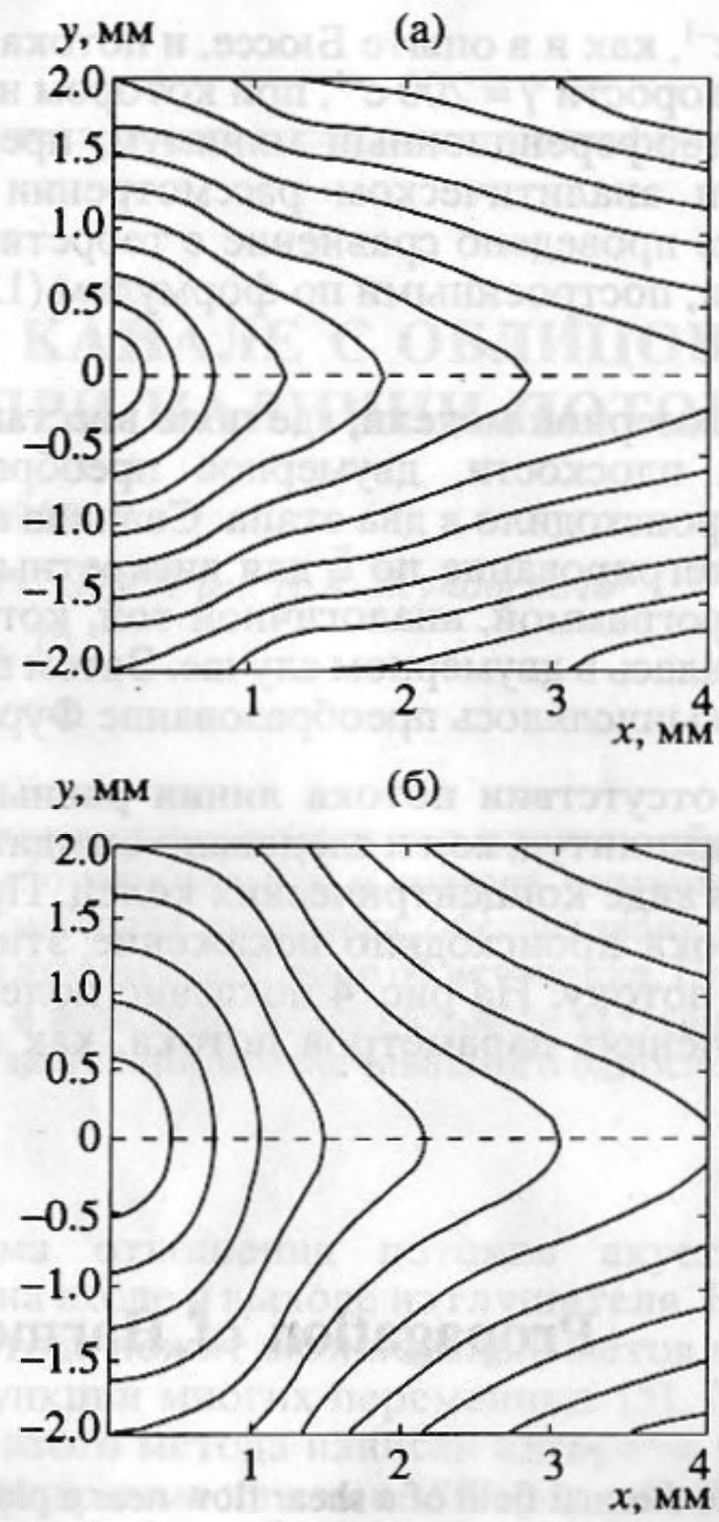

Рис. 4. Распределение амплитуды (*а*) и фазы (*б*) теплового поля на поверхности стенки в трехмерной постановке при тех же параметрах, что и в опыте Бюссе; линии равных амплитуд проведены через 10 дБ, линии равных фаз – через 90°.

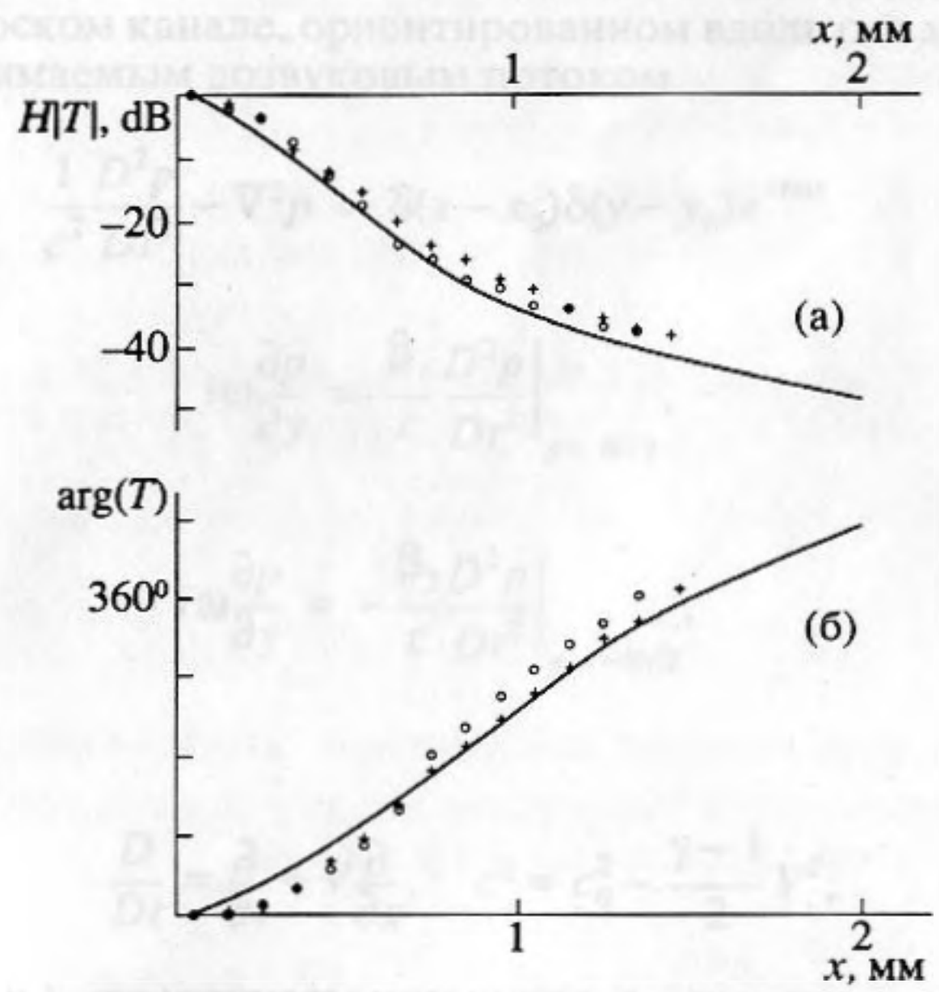

Рис. 5. Сравнение экспериментального [2] и расчетного (сплошная линия) распределения теплового поля; а – для амплитуды, б – для фазы.

$\gamma = 372\ c^{-1}$, как и в опыте Бюссе, и потока с градиентом скорости $\gamma = 200\ c^{-1}$, при котором наблюдается интерференционный минимум, предсказанный при аналитическом рассмотрении задачи. Здесь же проведено сравнение с теоретическими кривыми, построенными по формулам (13), (15) и (25).

В трехмерной модели, где поле восстанавливается на плоскости, двумерное преобразование Фурье происходило в два этапа. Сначала проводилось интегрирование по ξ для дискретных значений η программой, аналогичной той, которая использовалась в двумерном случае. Затем в каждой точке x вычислялось преобразование Фурье по η.

При отсутствии потока линии равных фаз и равных амплитуд, как и следовало ожидать, получались в виде концентрических колец. При наличии потока происходило искажение этих линий вниз по потоку. На рис. 4 показано поле как раз при значениях параметров потока, как в опыте Бюссе.

На рис. 5 приводится сравнение экспериментальных данных Бюссе и результатов счета на оси x. Данные сняты с графика, приведенного в работе [2], разные значки на рис. 5 относятся к разным направлениям потока в опыте Бюссе.

В заключение автор выражает признательность Е. М. Грешилову, который пробудил интерес к данной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burt J.A.* Thermal wave diffraction image. IEEE, 1981. P. 815 - 816.
2. *Busse G.* Thermal-wave experiments on moving samples. Can. J. Phys., 1986. V. 64. P. 1281 - 1283.
3. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
4. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 1989. 413 с.
5. *Осташев В.Е.* Распространение звука в движущихся средах. М: Наука, 1992. 208 с.

Propagation of Harmonic Thermal Waves in a Shear Flow

I. A. Sazonov

The thermal field of a shear flow near a plane wall, which was heated with a harmonic source, was computed. For a linear profile of the flow velocity, an exact expression of the spatial spectrum was obtained. The field itself was reconstructed from the spectrum using two methods: analytical (for the asymptotics) and numerical (based on FFTs). The results were compared with each other and with experimental data from the literature, and they were found to agree fairly well. Methods similar to acoustic ray formalism were readily applied to the thermal wave propagation in a flow. Under certain conditions, interference phenomena characteristics of regular wave processes were observed.