АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 3, с. 396 - 400

УДК 534.21.1

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ЛУЧЕЙ В ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕРОВНЫМ ДНОМ

© 1994 г. Е. А. Загаецкая, Ю. А. Кравцов, Г. И. Кудин

Малое специализированное предприятие "Грот"

Институт общей физики РАН

117942 Москва, ул. Вавилова, д. 38

Поступила в редакцию 30.12.92 г.

Решается задача нацеливания лучей на заданную точку наблюдений в стратифицированном океане с придонным звуковым каналом. Рассматривается плоский волновод со слабо возмущенным дном. Получены с помощью метода возмущений приближенные выражения для параметров невозмущенного луча, а также поправки к параметрам луча, вызванные возмущениями горизонтального дна. Приведены примеры расчетов, свидетельствующие об эффективности предлагаемого метода.

При моделировании звуковых полей в акустических волноводах широко применяется метод геометрической оптики [1, 2].

В области применимости этого метода несомненный практический интерес представляет задача расчета лучей, приходящих в заданную точку наблюдения с последующим расчетом полного поля как функции точки наблюдения. Задача нацеливания лучей в заданную точку предполагает преодоление вычислительных трудностей, связанных с решением специальной краевой задачи попадания лучей в точку приема после многократных ударов их в границы волновода. Частично эти трудности могут быть устранены, если характеристики среды задать аналитическими функциями с заданным множеством параметров, определяемых на этапе аппроксимации реальных физических данных, а траекторные расчеты проводить с помощью метода возмущений [3, 4].

Метод возмущений, как известно, позволяет получить параметры луча с помощью поправок к известным параметрам невозмущенного луча. Целью нашего исследования является расчет параметров луча, возмущенного малыми неровностями дна. Применение методов возмущений к расчетам лучей с учетом неоднородностей среды исследовалось ранее [5]. Здесь параметры невозмущенного луча, приходящего в заданную точку наблюдения, для случая придонного звукового канала в свою очередь определяются из специального алгебраического уравнения, решаемого методом возмущений.

Используя метод возмущений, естественно потребовать выполнения условий применимости его, а именно, отклонение луча относительно его невозмущенного положения не должно превышать характерного масштаба неоднородностей среды и дна.

В качестве нулевого приближения нижней границы волновода выбирается горизонтальное дно, а нулевое приближение для неоднородной среды осуществляется в классе кусочно-линейных функций для квадрата показателя преломления среды.

В плоском стратифицированном океане зададим правую систему координат $0XZ$, где ось $0X$ совпадает с поверхностью океана, а ось $0Z$ направлена вглубь. Согласно законам геометрической оптики [1], уравнения для лучей имеют вид

$$\frac{dx}{dz} = \frac{p_x^s \operatorname{sign}\theta(z)}{\sqrt{n^2(z) - (p_x^s)^2}}, \quad x(z^s) = x^s, \tag{1}$$

где введены следующие обозначения:

$$n^2(z) = a_0 + a_1(z), \ |a_1(z)| \ll a_0, \tag{2}$$

$$p_x^s = a_0 \cos\theta_0, \quad a_0 = n^2(z^s), \tag{3}$$

θ_0 – угол скольжения луча в источнике, $\theta(z)$ – угол скольжения в точке траектории луча, z^s – глубина расположения источника звука. Считаем известными все параметры невозмущенного луча, который выходит из источника, отражается от плоских границ океана ($z = 0$ и $z = H$) и попадает в приемник (x^R, z^R). Угол выхода луча из источника обозначим через θ^s. Задача состоит в получении параметров возмущенного луча, который удовлетворяет уравнению (1) и отражается от слабо возмущенного дна:

$$z = H + \varepsilon h(x) \ , \ 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{4}$$

и попадает в точку приема. Для параметров возмущенного луча введем обозначения:

z^k – глубина k-той точки удара в дно;

θ^k – угол скольжения падающего луча в k-той точке удара в дно;

$x^{k-1,k}$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) – расстояние k-той точки удара в дно от $(k-1)$ точки, N – количество ударов луча в дно.

Возмущенный луч получит в точках удара его в дно дополнительные, по сравнению с невозмущенным лучом, отклонения и, естественно, без предварительной коррекции в точке излучения не попадет в приемник, поэтому представим угол выхода возмущенного луча в источнике в виде:

$$\theta^s = \theta_0^s + \varepsilon\theta_1^s, \tag{5}$$

где θ_1^s – неизвестное возмущение первого порядка малости. Параметры возмущенного луча будем искать в окрестности невозмущенного луча и схему вычислений приведем для случая нахождения параметров луча в k-той точке удара в дно при известных возмущениях в $(k-1)$-й точке.

Представим в первом приближении параметры k-той точки удара возмущенного луча в дно в виде:

$$\begin{gathered} z^k = z_0^k + \varepsilon z_1^k + O(\varepsilon^2), \\ \theta^k = \theta_0^k + \varepsilon\theta_1^k + O(\varepsilon^2), \\ x^{k-1,k} = x_0^{k-1,k} + \varepsilon x_1^{k-1,k} + O(\varepsilon^2). \end{gathered} \tag{6}$$

Интегрируя уравнения (1) на участках $[z^{k-1}, z^k]$ в предположении, что $a_1 = bz$, получим:

$$\begin{gathered} x_1^{k-1,k} = x_0^{k-2,k-1} z_1^k + x_1^{k-2,k-1} + \\ + (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}F^{k-1})\, z_1^{k-1} + \gamma^{k-1}F^{k-1}\theta_1^{k-1}, \end{gathered} \tag{7}$$

$$z_1^k = h(x_0^{k-1,k}), \tag{8}$$

где обозначено

$$\alpha^{k-1} = \operatorname{ctg}\theta_0^{k-1}, \tag{9}$$

$$\beta^{k-1} = b\cos\theta_0^{k-1}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} F^{k-1} = -2\sin\theta_0^{k-1}\,(\sqrt{a_0 + bz_0^{k-1} - \cos^2\theta_0^{k-1}} - \\ - \sqrt{a_0 - \cos^2\theta_0^{k-1}} - \cos^2\theta_0^{k-1} \times \\ \times (1/\sqrt{a_0 + bz_0^{k-1} - \cos^2\theta_0^{k-1}} - \\ - 1/\sqrt{a_0 - \cos^2\theta_0^{k-1}}\,)\,), \end{gathered} \tag{11}$$

$$\gamma^{k-1} = n(z_0^{k-1})\sin\theta_0^{k-1}. \tag{12}$$

Используя известный закон отражения луча от границы

$$\underline{l}_r = \underline{l}_i - 2\underline{N}(\underline{N}\underline{l}_i), \tag{13}$$

где $\underline{l}_r$ – орт отраженного луча, $\underline{l}_i$ – орт падающего луча, $\underline{N}$ – орт нормали к границе, направленный навстречу падающей волне, после необходимых преобразований получим

$$\theta_1^k = d^k - a^k z_1^k + b^{k-1,k} z_1^{k-1} - c^{k-1,k}\theta_1^k, \tag{14}$$

где

$$a^k = \operatorname{ctg}\theta_0^k n'(z_0^{k-1})/n(z_0^k), \tag{15}$$

$$b^{k-1,k} = (n'(z_0^{k-1})\cos\theta_0^{k-1}) / (n(z_0^k)\sin\theta_0^k), \tag{16}$$

$$c^{k-1,k} = (n(z_0^{k-1})\sin\theta_0^{k-1}) / (n(z_0^k)\sin\theta_0^k). \tag{17}$$

Формулы (7) - (8) и (15) позволяют записать связь между возмущениями параметров в k-той и $k-1$-ой точках удара луча в дно в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1^k \\ z_1^k \\ \theta_1^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & Q^{k-1} & S^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k-1,k} & c^{k-1,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ z_1^{k-1} \\ \theta_1^{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P^k \\ h(x_0^{k-1,k}) \\ D^k \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Элементы матриц имеют вид:

$$\begin{gathered} Q^{k-1} = \alpha^{k-1} - \beta^{k-1}F^{k-1}, \\ S^{k-1} = \gamma^{k-1}F^{k-1}, \quad P^k = x_0^{k-1,k}H, \\ D^k = d^k - a^k H. \end{gathered} \tag{19}$$

Полученные соотношения (19) позволяют выразить возмущения параметров луча в k-той точке удара в дно через возмущения во всех предыдущих ударах луча в дно и в источнике:

$$\begin{gathered} x_1^{k-1,k} = x_1^s + \left(S^s + \sum_{k=1}^{N-1} S^k \prod_{j=1}^{k} c^{j-1,j}\right)\theta_1^s + \\ + \sum_{k=1}^{N} f^{k-1,k} + \sum_{k=3}^{N} S^{k-1,k}\Bigg[\,(c^{1,2}q^{s,1} + q^{1,2}) \times \\ \times \prod_{k=3}^{N-1} c^{k-1,k}\Bigg] + \sum_{k=3}^{N-2} q^{k-1,k} \prod_{j=k-2}^{N-2} c^{N-2-j,N-1-j}, \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$f^{k-1,k} = Q^{k-1}z_1^{k-1} + P^k, \quad q^{k-1,k} = b^{k-1,k}z_1^{k-1} + D^k.$$

Приравнивая к нулю выражения (20), получим уравнение для определения возмущения угла скольжения в источнике, обеспечивающее попа-

Таблица 1

Параметры луча	Расстояние, глубина, угол скол.	Точное решение	Прибл. решение		Относ. погр., %	
			нулевое	первое	нулевое	первое
Координаты точки удара в дно	x, км	2.65413	2.63809	2.65041	0.60	0.14
	z, км	0.20936	0.2	0.20964	4.47	0.13
	θ, град	9.17398	9	9.10638	1.89	0.43
Координаты прихода луча в точку наблюдения	x, км	3.4072	3.3907	3.4081	0.48	0.026
	z, км	0.1	0.1	0.1	0	0
	θ, град	8.74206	8.615	8.731	1.45	0.11

дание луча в точку приема. Приведенные выше соображения позволяют утверждать, что

$$\left|x(z^R) - \tilde{x}(z^R)\right| \le A\varepsilon^2, \tag{21}$$

где $x(z^R)$ – точное решение уравнения (1) при краевых условиях $x(0) = x^s$, $x(z^R) = x^R$, $\tilde{x}(z^R)$ – приближенное решение, полученное с помощью метода возмущений. Авторами получены формулы типа (18), (20) для приближения второго порядка, т.е. когда точность приближенных вычислений по методу возмущений достигает $O(\varepsilon^2)$.

Применение предложенной методики проиллюстрируем на примере расчета параметров луча в волноводе с квадратом показателя преломления среды (формула (2)), где $a_0 = 1$, $a_1(z) = 0.02(z - 0.2)$. В формуле (4) для поверхности дна полагаем

$$h(x) = H\sin x, \quad H = 0.2 \text{ км}, \ \varepsilon = 0.1.$$

Точечный источник звука расположен на дне океана $\mathbf{r}^s(0, H)$. Невозмущенный луч выходит из источника под углом $\theta_0^s = 9°$, отражается от поверхности и дна океана и затем приходит в точку приема $\mathbf{r}^R = (3.407 \text{ км}, 0.1 \text{ км})$.

Поправка θ_1^s угла выхода возмущенного луча из источника, вычисленная из формулы (19) равна 0.14°.

Точность вычислительных формул представлена в табл. 1. Расчеты показывают, что в точке приема относительная погрешность вычислений по методу возмущений в первом приближении составляет 0.026% по расстоянию и 0.11% – по углу выхода луча, и это соответствует отклонению луча от точки приема на 1 м.

Для метода возмущений необходимы параметры невозмущенного луча. Используя малость функции $a_1(z)$, параметры невозмущенного луча находятся методом возмущений. Методика решения этой задачи приводится для придонного звукового канала.

В плоском стратифицированном океане решим задачу нацеливания лучей, которые выходят из источника (x^s, z^s) под углом θ^s, отражаются от поверхности ($z = 0$) и от дна океана ($z = H$) и попадают в приемник (x^R, z^R). Неизвестным считается угол θ^s.

Предположим, что квадрат показателя преломления имеет вид (2), где

$$a_0 = 1, \quad a_1(z) = b(z - H), \tag{22}$$

b – градиент квадрата показателя преломления. Для нахождения параметров луча, вышедшего из заданного источника и пришедшего в заданную точку наблюдения, определяется расстояние, прошедшее лучом по горизонтали, между источником и приемником как функция угла входа луча. Для среды с параметрами (22) это расстояние определяется явно. Расчетные формулы упрощаются, если вместо угла выхода луча из источника введем угол скольжения луча на оси канала – χ.

Выбор угла χ в качестве неизвестного параметра луча полезен тем, что его значение является максимальным для луча вдоль всего цикла. Значение углов скольжения на других интересующих горизонтах определяется по общеизвестному закону Снеллиуса. Пусть $D(\chi)$ – длина полного цикла луча, $Q(\chi, z)$ – проекция на горизонтальную плоскость пути луча от горизонта корреспондента z до верхней или нижней границы волновода. Величины $D(\chi)$ и $Q(\chi, z)$ определяются в виде:

$$Q(\chi, z) = \cos\chi \int_z^0 \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2\chi}}, \tag{23}$$

$$D(\chi) = 2\cos\chi \int_H^0 \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2\chi}}. \tag{24}$$

В случае (22) интегралы берутся в явном виде:

$$Q(\chi, z) = 2\cos\chi\,(\sqrt{n^2(z) - \cos^2\chi} - \sqrt{n^2(0) - \cos^2\chi}\,)/b, \tag{25}$$

$$D(\chi) = 2\,(\sin 2\chi - \cos\chi\sqrt{n^2(0) - \cos^2\chi})/b. \tag{26}$$

Расстояние, проходимое лучом по горизонтали между источником и приемником представляется в виде

$$r(\chi, z^s, z^R, N) = ND(\chi) + \sigma_1 Q(\chi, z^s) + \sigma_2 Q(\chi, z^R). \quad (27)$$

Здесь через N обозначено количество полных циклов, прошедших лучом между корреспондентами. Величины σ_1 и σ_2 введены с целью учета направления выхода луча из источника и входа в точку наблюдения. Так при выходе луча из источника вверх $\sigma_1 = 1$, вниз – $\sigma_1 = -1$. Аналогично, $\sigma_2 = 1$ для лучей, приходящих в приемник сверху и $\sigma_2 = -1$ для лучей, приходящих в точку наблюдения снизу.

Выражение (27), при заданном расстоянии между корреспондентами r, количестве полных циклов N и глубинах источника z^s и приемника z^R можно рассматривать как уравнение для определения угла скольжения θ^s. Это уравнение относится к классу довольно сложных трансцендентных уравнений, которые, как правило, решают численно. Алгебраическое уравнение (27) обладает рядом отягощающих его численное решение обстоятельств, а именно: корни для каждого χ располагаются группами по четыре или два, которые очень близки по значению и нет эффективных методов для их разделения, в расчетах присутствуют трудно вычислимые с заданной точностью функции. Для решения этого уравнения можно применить метод возмущений. В качестве малого параметра выберем безразмерную величину $\mu = a_1(z^s) \equiv b(z^s - H)$, которая входит в уравнение (27) (второе слагаемое). Заметим, что для реальных волноводов эта величина имеет порядок 0.001 - 0.01.

Полагая $x = \sin\chi$, представим x в виде

$$x = x_0 + \mu x_1. \quad (28)$$

Для упрощения выкладок расположим источник на дне океана. Подставляя (28) в (27) и приравнивая нулю коэффициенты при μ, $i = 0.1$ получим

$$x_0 = [4(N+1)rb + (2N+1)^2 + (2+N) \times \sqrt{8(N+1)(rb - 2n^2(0) + N^2 - 4(N+1))}]^{1/2} \times ((N+1)\sqrt{8})^{-1}. \quad (29)$$

Первое приближение имеет вид:

$$x_1 = x_0\{En^2(m-n^2) + (n^2 - m^2 - (rb)^2)x_0^2 + 2rbm(x_0 - n^2E) + 2m^2\} / \{2m(m(m^2-4) + n^2(n^2-2) + (rb)^2(rb + (2m+1)x_0) + 3rb(n^2-m^2)x_0^2)\}, \quad (30)$$

$$E = a_1(z^R)/\mu, \quad m = 2N+1, \quad n = 2N-1.$$

Заметим, что эти формулы справедливы и для приповерхностного звукового канала.

Таблица 2

Параметры луча	Расстояние глубина, угол скол.	Точное решение	Прибл. решение		Относ. погр., %	
			нулевое	первое	нулевое	первое
Угол выхода луча из источника	θ, град	9.06	8.87	9	2.09	0.66
Координаты прихода луча в точку наблюдения	z, км	0.1	0.2	0.1	0	0
	x, км	3.386	3.335	3.3907	1.5	0.13

Проанализируем применение этой методики для мелкого моря с плоскими поверхностью океана ($z = 0$) и дном ($z = H$). В условиях существования придонного звукового канала (квадрат показателя преломления среды представляется формулой (22)) для источника, расположенного на дне океана, получен луч, вышедший из источника под углом 9.06°, который один раз отражается от поверхности и дна океана, а затем попадает в точку приема на расстоянии 3.386 км и глубине 0.1 км. Параметры этого луча, рассчитанные по формулам (29), (30), приведены в табл. 2. Абсолютное отклонение луча по расстоянию в точке приема в нулевом приближении составляет 5 м, а в первом – 0.5 м, по углу выхода луча из источника имеем 0.19° в нулевом приближении и 0.06° – в первом. Здесь уместно отметить, что оценки погрешности соответствующих приближений, согласуются с величиной применения малого параметра.

В заключение кратко перечислим основные результаты работы.

В условиях применимости метода геометрической оптики предложен метод расчета параметров лучей в среде со слабо возмущенным плоским дном. Основным ограничением является типичное для методов возмущений требование соответствия возмущений параметров луча масштабам неоднородности среды и дна океана.

Для плоского волновода с горизонтальными границами и кусочно-линейным квадратом показателя преломления методом возмущений получено аналитическое решение задачи нацеливания лучей в заданную точку. Решение этой задачи является нулевым приближением для нахождения лучей в водном слое со слабо возмущенным горизонтальным дном.

Применение методов возмущений в задачах геометрической оптики, обеспечивая удовлетворительную точность, может дать значительный выигрыш в затратах машинного времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. С. 304.
2. *Галкин О., Вагин А.* К вопросу о расчете звукового поля точечного источника при наличии берегового клина и переменных гидрологических условий на трассе распространения звука. М.: Акуст. ин-т, 1974. С. 37.
3. *Тинин М.В.* Применение метода возмущений для решения двухточечной траекторной задачи в сферической системе координат // В сб.: Теория дифракции и распространения волн (7 Всесоюзный симпозиум). М.: Изд-во АН СССР, 1977. Т. 1. С. 58.
4. *Julian B.R., Gubbins D.* Two-Point Seismic Ray Trasing. // Trans. AGU, 1975. V. 56. № 12. P. 1027.
5. *Кравцов Ю.А., Фейзулин З.И.* О решении лучевых уравнений методом возмущений // Радиотехника и электроника. 1971. Т. 16. № 2. С. 1777.

A Perturbation Technique for Rays in an Ocean Waveguide with a Rough Bottom

E. A. Zagaetskaya, Yu. A. Kravtsov, and G. I. Kudin

The problem of ray aiming at a given observation point in a stratified ocean with a bottom acoustic channel is discussed. A plane waveguide with a slightly perturbed bottom is considered. Using a perturbation technique, approximate expressions for the parameters of an unperturbed ray, as well as corrections to ray parameters caused by perturbations of the horizontal bottom, are obtained. Examples of calculations illustrating the efficiency of the suggested technique are given.