АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 3, с. 385 - 389

УДК 534.222

# ПОЛЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ВОЛНОВОДЕ С ПЛАВНОНЕОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

© 1994 г. В. Г. Дмитриев, К. А. Наугольных

*Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН*

*117036 Москва, ул. Шверника, 4*

Поступила в редакцию 14.12.93 г.

**Теоретически рассмотрено поле параметрического излучателя в волноводе с плавнонеоднородным потоком. Влияние потока приводит, наряду с другими эффектами, к модуляции нелинейного параметра среды, что, в свою очередь, влияет на формирование диаграммы направленности параметрического излучения, приводя к появлению дополнительных максимумов. Их относительная величина при формировании поля в волноводе оказывается более существенной, чем в поле параметрического излучателя в безграничном пространстве в присутствии вихря.**

Как показали недавно проведенные эксперименты по зондированию океанического вихря [1], наличие неоднородного течения может существенно повлиять на характеристики параметрического излучения, что открывает новые возможности акустического зондирования океана. В работе [2] проведен теоретический анализ диаграммы направленности параметрического излучателя (ПИ), работающего в неограниченной плоскоскоростной среде в режиме Вестервелта, низкочастотное излучение которого генерируется в присутствии неоднородного потока жидкости. В настоящей работе рассматривается задача о влиянии океанического течения на формирование низкочастотного поля ПИ, работающего в условиях мелкого моря.

Как показано в работе [2], влияние плавнонеоднородного потока жидкости на нелинейное взаимодействие звука сводится к следующим трем главным эффектам: рассеянию поля накачки на потоке, сопровождающемуся генерацией звука; рассеянию волн комбинационного тона на потоке и генерации звука полем накачки в результате нелинейного взаимодействия, модулированного потоком. При этом все перечисленные эффекты имеют одинаковый порядок малости: второй – по акустическому и первый – по гидродинамическому числам Маха. Следовательно, вклад каждого из перечисленных механизмов в формирование низкочастотного звукового поля ПИ аддитивен и может быть рассчитан по отдельности.

Так же как это делалось в работе [2], будем рассматривать здесь только задачу о генерации звука полем накачки в жидкости, нелинейный параметр которой модулирован гидродинамическим потоком **U**. Искомое звуковое поле $p$ может быть найдено из уравнения [2]:

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}p_{tt} = -\frac{\varepsilon}{\rho c^4}\frac{\partial^2(p_н^2)}{\partial t^2} - \frac{2\varepsilon}{\rho c^4}\mathbf{U}\nabla\frac{\partial(p_н^2)}{\partial t}, \qquad (1)$$

в котором $\varepsilon$ – коэффициент нелинейности жидкости, $\rho$ – ее плотность, $c$ – скорость звука, $p_н$ – поле накачки. Это уравнение получено в предположении, что поток изменяется на масштабах, значительно превосходящих длины всех рассматриваемых акустических волн. Кроме того, гидродинамическое число Маха $M = |\mathbf{U}|/c$ считается малым.

Решение уравнения (1) представимо в виде

$$p = p_1 + p_2,$$

где $p_1$ – низкочастотное поле, генерируемое волнами накачки в отсутствие потока и удовлетворяющее уравнению

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2}p_{1tt} = -\frac{\varepsilon}{\rho c^4}\frac{\partial^2(p_н^2)}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

$p_2$ – поправка к полю $p_1$, обусловленная наличием потока, которая описывается уравнением

$$\Delta p_2 - \frac{1}{c^2}p_{2tt} = -\frac{2\varepsilon}{\rho c^4}\mathbf{U}\nabla\frac{\partial(p_н^2)}{\partial t}. \qquad (3)$$

Далее для оценки величины рассматриваемого эффекта в мелком море рассмотрим низкочастотный плоский волновод, образованный свободной поверхностью жидкости в плоскости $z = 0$ и отражающим дном в плоскости $z = H$. Поле $p_2$ будем искать в виде разложения по собственным модам волновода:

$$p = \sum_m a_m(x, y)\varphi_m(z),$$

где $\{\varphi_m\}$ – система ортогональных собственных функций, удовлетворяющих заданным гранич-

ным условиям. Для волновода с акустически мягкой границей $\varphi_m(z) = \sin\sigma_m z$, где $\sigma_m$ определяется граничным условием на дне. Обычно [3] рассматривают либо как абсолютно жесткое; и при этом $\sigma_m = \pi(2m-1)/2H$, либо в рамках модели Пекериса, учитывающей конечность импеданса дна. Во втором случае можно показать, что при $m \ll m_0$, где $m_0$ – число распространяющихся в волноводе мод, дно можно аппроксимировать акустически мягкой границей, т.е. $\sigma_m = \pi m/H$.

Будем считать, что излучатель накачки, геометрический центр которого расположен в точке (0, 0, $z$), создает две гармонические волны на близких частотах $\omega_1$ и $\omega_2$ ($\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$), при нелинейном взаимодействии которых образуется волна разностной частоты $\Omega$ ($\Omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega$).

Параметры излучателя выбраны таким образом, что выполнено основное условие применимости модели Вестервелта: каждая из компонент поля накачки представляет собой нерасходящийся звуковой пучок:

$$p_н = p_{01}A_1(y, z)\Phi_1(x)\sin(k_1x - \omega_1 t) + \\ + p_{02}A_2(y, z)\Phi_2(x)\sin(k_2x - \omega_2 t),$$

где $p_{01}$ и $p_{02}$ – амплитуды гармоник, $k_i = \omega_i/c$; $\Phi_i(x)$ – функции, описывающие затухание гармоник: $\Phi_i(x) = \exp(-\alpha_i x)$, в случае близких частот накачки можно считать, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; $A_i(y, z)$ – апертурные множители, которые берутся в виде

$$A_i(y, z) = \exp\left(-y^2/a_i - \frac{(z-z_e)^2}{b_i^2}\right),$$

величины $a_i$ и $b_i$ характеризуют горизонтальный и вертикальный размеры излучателя $i$-й гармоники.

Подставив выражение для поля накачки в уравнения (2) и (3) и сохранив при этом лишь компоненту на разностной частоте, получим следующие уравнения для комплексных амплитуд:

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = \frac{\varepsilon\Omega^2}{\rho c^4} p_{01}p_{02}A_1A_2\exp(-2\alpha x + ikx), \quad (4)$$

$$\Delta p_2 + k^2 p_2 = -\frac{2i\varepsilon\Omega}{\rho c^4} p_{01}p_{02}A_1A_2\exp(-2\alpha x + ikx) \times \\ \times \left((2\alpha - ik)\,U_x + 2y/a^2 U_y + 2z/b^2 U_z\right), \quad (5)$$

где $k = \Omega/c$, $a = \dfrac{a_1a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$, $b = \dfrac{b_1b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

Зная функцию Грина для однородного плоского волновода, можно выписать решения полученных уравнений Гельмгольца в виде [3]:

$$p_i = -\frac{1}{4\pi}\int F_i(\mathbf{r}')\sum_m \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_m R}}\,\frac{2}{H}\varphi_m(z)\varphi_m(z') \times \\ \times \exp\left(i\kappa_m R_1 + i\frac{\pi}{4}\right) dV', \quad (6)$$

где $R_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $\kappa_m = \sqrt{k^2 - \sigma_m^2}$, через $F_i(\mathbf{r})$ обозначены выражения, стоящие в правых частях уравнений Гельмгольца (4), (5). Интегрирование производится по объему, занятому пучком накачки.

В общем случае интегралы вычислить не удается. Поэтому, считая пучок достаточно узким, найдем низкочастотное поле в дальней зоне, где его структура полностью сформировалась:

$$p_i = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}H}\sum_m \varphi_m(z_0)\varphi_m(z)\frac{\exp(i\kappa_m R + i\pi/4)}{\sqrt{\kappa_m R}} \times \\ \times \int F_i(\mathbf{r}')\exp(-i\kappa_m x'\cos\theta)dV', \quad (7)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta$ – угол между вектором и осью $OX$. При этом предполагается, что пучок накачки удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{1}{2\alpha} \ll \min\{k\mu^2a^2, k\mu^2b^2, k\mu bH\},$$

где $\mu = \dfrac{\omega}{\Omega}$ – коэффициент преобразования частоты при параметрическом излучении.

Для поля $p_1$ интеграл в (7) легко вычисляется:

$$p_1 = -\frac{p_0}{H}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_m \varphi_m(z_0)\varphi_m(z)\frac{\exp(i\kappa_m R + i\pi/4)}{\sqrt{\kappa_m R}} \times \\ \times \frac{1}{2\alpha - i(K - \kappa_m\cos\theta)}, \quad (8)$$

$$p_0 = \frac{\varepsilon\Omega^2 p_{01}p_{02}ab}{\rho c^4},$$

что совпадает с результатом, полученным в [4]. Заметим, что каждая из возбуждаемых мод в (8) имеет максимум в направлении $\cos\theta \sim \dfrac{k}{\kappa_m}$, причем величина этого максимума уменьшается, а его ширина увеличивается с ростом номера моды.

Перейдем теперь к исследованию поля $p_2$, обусловленного наличием потока. Разложив скорость потока в интеграл Фурье:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \int \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{q})\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})d^3q$$

и проинтегрировав в выражении (7) по пространственным координатам, представим решение уравнения (5) в виде

$$p_2 = \frac{ip_0\sqrt{2\pi}}{\Omega H}\sum_m \varphi_m(z_0)\varphi_m(z)\frac{\exp(i\kappa_m R + i\pi/4)}{\sqrt{\kappa_m R}} I_m,$$

$$I_m = \int \exp\left(-\frac{q_y^2 a^2 + q_z^2 b^2}{4} + iq_z z_0\right)\times \tag{9}$$

$$\times \frac{(2\alpha - ik)\,\tilde{\mathbf{U}}_x + iq_x\tilde{\mathbf{U}}_y + iq_z\tilde{\mathbf{U}}_z}{2\alpha - i\,(k + q_x - \kappa_m\cos\theta)} dq_x dy dz.$$

Как уже отмечалось, рассматриваемый поток должен изменяться на масштабах, значительно превосходящих длины всех рассматриваемых акустических волн. А это значит, что вклад в пространственный спектр потока компонент со спектральными векторами $|\mathbf{q}| > q^{\max}$ пренебрежимо мал, причем $q^{\max} \ll k$. Будем считать, что

$$q^{\max} \ll \min\left\{k, \frac{1}{d_y}, \frac{1}{d_z}\right\},$$

где $d_y$ и $d_z$ – горизонтальный и вертикальный размер пучка накачки; в пределах поперечного сечения первичного пучка поток не успевает существенно измениться. Кроме того, пренебрежем величиной $2\alpha$ по сравнению с $k$, а также воспользуемся условием несжимаемости жидкости:

$$\tilde{U}_x q_x + \tilde{U}_y q_y + \tilde{U}_z q_z = 0.$$

С учетом всего сказанного интеграл (9) можно привести к виду

$$I_m =$$

$$= i\int\int\int_{|\mathbf{q}|<q^{\max}} \frac{\mathbf{U}_x(q_x, q_y, q_z)\exp(iq_z z_0)}{\frac{2\alpha}{k} - i\left(\frac{\gamma_m^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} + \frac{q_k}{k}\right)} dq_x dq_y dq_z. \tag{10}$$

Величина этого интеграла определяется соотношением между величинами $2\alpha/k$, $q^{\max}/k$ и $\gamma_m^2/2$, где $\gamma_m$ – бриллюэновский угол моды $m$.

Рассмотрим возможные предельные случаи. Пусть

$$q^{\max} \ll \max\{2\alpha; k\gamma_m^2/2\}, \tag{11}$$

тогда

$$I_m \approx -i\frac{U_x(0, 0, z_0)}{\frac{2\alpha}{k} - i\left(\frac{\gamma_m^2}{2} + \frac{\theta^2}{2}\right)}.$$

Подставив это выражение в (9), получим выражения

$$p_m^{(2)} = -\frac{2}{c}U_x(0, 0, z_0)p_m^{(1)}, \tag{12}$$

связывающие между собой модальные давления в разложениях (9) и (8) при всех $m$, для которых справедливо предположение (11). Если (11) выполняется для всех $m$:

$$q^{\max} \ll \max\{2\alpha; k\gamma_1^2/2\},$$

то

$$p^{(2)} = -\frac{2}{c}U_x(0, 0, z_0)p^{(1)}.$$

Таким образом, поправка к полю ПИ, обусловленная наличием течения, близкого к однородному (или однородного), имеет такие же угловую и модовую структуры и оказывается по порядку величины в $M$ раз меньше поля ПИ, сформированного в мелком море при отсутствии потока.

Рассмотрим теперь другой, более интересный предельный случай. Предположим, что

$$q^{\max} \gg 2\alpha, \quad q^{\max} > k\gamma_m^2/2.$$

В этом случае можно считать, что

$$\frac{1}{\frac{2\alpha}{k} - i\left(\frac{\gamma_m^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} + \frac{q_x}{2}\right)} \approx \pi\delta\left(\frac{q_x}{k} + \frac{\gamma_m^2}{2} + \frac{\theta_m^2}{2}\right).$$

Подставляя это выражение в (10), получим

$$I_m = -\frac{ik\pi}{2}\int \tilde{U}_x(-k\,(\gamma_m^2 + \theta^2)\,/2, q_y, q_z)e^{iq_z z_0}dq_y dq_z \tag{13}$$

или

$$I_m = -\frac{ik}{2}\int U_x(x, 0, z_0)\exp\left(\frac{ik}{2}\,(\gamma_m^2 + \theta^2)\,x\right)dx. \tag{14}$$

Из выражения (13) следует, что структура диаграммы направленности $m$ - й моды поля $p^{(2)}$ определяется характером зависимости функции $\tilde{U}_x$ от продольной компоненты спектрального вектора. Действительно, каждому максимуму функции $\tilde{U}_x(q_x)$ с координатой $q_{xi} < 0$ (это означает, что $\mathbf{qk} < 0$) соответствует пара симметрично расположенных боковых лепестков с угловыми координатами $\theta_{mi}$, определяемыми из соотношения

$$-\frac{k}{2}\,(\gamma_m^2 + \theta_{mi}^2) = q_{xi} \tag{15}$$

при условии

$$|q_{xi}| > 1/2\,k\gamma_m^2.$$

Из (15) имеем

$$\theta_{mi} = \pm\sqrt{\frac{2|q_{xi}|}{k} - \gamma_m^2}, \tag{16}$$

а ширина лепестков определяется шириной $\Delta q_{xi}$ максимумов функций $\tilde{U}_x(q_x)$:

$$\Delta\theta_{mi} = \sqrt{\frac{2\Delta q_{xi}}{k} + \theta_{mi}^2} - \theta_{mi}. \qquad (16а)$$

Используя условия (16), легко установить, что $i$-й максимум функции $\tilde{U}_x(q_x)$ порождает боковые лепестки на диаграммах направленности первых $N_i$ мод, где

$$N_i = \left[\frac{H}{\pi}\sqrt{2|q_{xi}|k}\right], \qquad (17)$$

если дно рассматривать как акустически мягкое, или

$$N_i = \left[\frac{H}{\pi}\sqrt{2|q_{xi}|k} + \frac{1}{2}\right] \qquad (18)$$

– для случая абсолютно жесткого дна, причем наибольший угол $\theta_{mi}$ соответствует первой моде. В случае $m > N_i$ максимум диаграммы направленности поля $p_m^{(2)}$ находится при $\theta = 0$, и его величину можно оценить, используя формулу (12).

Оценим теперь амплитуду боковых максимумов. По порядку величины интеграл (14) равен

$$|I_m| \approx \frac{k}{2}U_0 l.$$

Тогда из выражения (9) получим

$$|p^{(2)\max}| \approx \frac{\varepsilon k^2 p_{01}p_{02}abU_0 l}{\rho c^3 H}\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\varphi_m(z_0)\varphi_m(z), \qquad (19)$$

где $U_0$ – характерное значение скорости потока, $l = \min\{L_x, 1/2\alpha\}$; $L_x$ – продольный размер потока.

Теперь найдем условие, при котором боковые лепестки поля $p^{(2)}$ не затеняются полем $p^{(1)}$. Для этого, очевидно, должно выполняться неравенство

$$|p_m^{(2)\max}| \gtrsim |p_m^{(1)}(\theta_{mi})|.$$

Используя выражения (8), (16) и (17), получим следующие условия, при выполнении которых поток оказывает существенное влияние на структуру диаграммы направленности $m$-й моды формируемого звукового поля:

$$Ml|q_{xi}| \gtrsim 1, \quad |q_{xi}| > 1/2k\gamma_m^2. \qquad (20)$$

Отсюда, в частности, получается следующее необходимое условие:

$$ML_x|q_{xi}| \gtrsim 1, \; i \le N_i, \qquad (21)$$

в которое входят только характеристики потока. Таким образом, гидродинамический поток может существенно повлиять на структуру поля ПИ только в том случае, когда выполняются условия (20), т.е. если в потоке присутствуют достаточно мелкомасштабные по сравнению с его геометрическими размерами пространственные структуры.

В качестве численного примера рассмотрим поток, у которого

$U_0 = 3$ м/с, $L_x > 1/2\alpha \approx 25$ км, $q_{xi} = 10^{-2}$ м$^{-1}$, $\Delta q_{xi} = 10^{-3}$ м$^{-1}$.

Примем также, что частота накачки излучателя 3 кГц, глубина моря 300 м. Величины, характеризующие мелкое море и излучатель, считаем прежними. Несложно проверить, что в этом случае условия (20) выполняются. Из формулы (17) получим, что $N_i = 6$, но так как для всех четных мод $p_m = 0$, то боковые лепестки появляются лишь на диаграммах первой, третьей и пятой мод формируемого звукового поля. Их угловые координаты, величины и характерную ширину можно рассчитать, используя выражения (16), (16а) и (19).

Сравнивая выражения (8) и (19), можно получить, что

$$|p_m^{(2)\max}| \approx |p_m^{(1)\max}|Ml\sqrt{(2\alpha)^2 + (k\gamma_m^2/2)}.$$

Отсюда видно, что в случае достаточно мелкого моря, когда $2\alpha \ll k\gamma_m^2/2$, при достаточно больших скоростях и размерах потока амплитуды дополнительных максимумов на диаграмме направленности могут быть сравнимы с основными, что невозможно в безграничной среде, для которой $|p_m^{(2)\max}| \lesssim M|p^{(1)\max}|$.

Сопоставим теперь результаты, полученные при рассмотрении эффекта в мелком море в безграничной среде.

Как показано в работе [2], поправка, обусловленная наличием потока $p_2'$, имеет вид

$$p_2' = \frac{\pi p_0}{2c}\frac{e^{ikr}}{r}\int \tilde{U}_x(k - k_x, q_y, q_z)dq_y dq_z.$$

Оценив стоящий здесь интеграл так же, как это делалось выше, и сравнив полученный результат с выражением для поля в однородной неограниченной среде $p_1'$, имеем:

$$|p_2^{1\max}| \approx |p_1^{1\max}|Ml(2\alpha). \qquad (22)$$

В случае же мелкого моря из выражений (8) и (17) получаем соотношение

$$|p_2^{\max}| \approx |p_{1m}^{\max}|Ml\sqrt{(2\alpha)^2 + (k\gamma_m^2/2)^2},$$

из которого следует, что если море достаточно мелкое ($2\alpha \ll k\gamma_m^2/2$), то амплитуды дополнительных максимумов на диаграмме направленности могут быть сравнимы с основными, что, как видно из (22), оказывается недостижимым при формировании излучения в безграничной среде. Это объясняется тем, что в отличие от неограниченной среды в волноводе максимум диаграммы направленности излученного звукового поля разностной частоты определяется нерезонансным взаимодействием. Появление потока приводит к тому, что взаимодействие становится резонанс-

ным благодаря выполнению условий четырехволнового взаимодействия

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \quad \Omega = \omega_1 - \omega_2,$$

в котором роль четвертой волны играет фурье-гармоника потока $q$ и его эффективность возрастает.

Работа выполнена по гранту 93-02-15953 Фонда фундаментальных исследований Российской академии наук.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Есипов И.Б., Зименков С.В., Калачев А.И., Назаров В.Е.* Зондирование океанического вихря направленным параметрическим излучением // Акуст. журн. 1993. Т 39. № 1. С 173 - 176.
2. *Наугольных К.А., Рыбак С.А., Скрынников Ю.И.* О нелинейном взаимодействии акустических волн в неоднородном потоке жидкости // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 2. С. 321 - 325.
3. *Зайцев В.М., Островский Л.А., Сутин А.М.* Модовая структура поля параметрического излучателя в акустическом волноводе // Акуст. журн. 1987. Т. 33. №1. С. 37 - 42.
4. *Карабутова Н.Е., Новиков В.К.* Работа параметрического излучателя звука в плоском волноводе // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 65 - 70.

# The Parametric Transmitter Field in a Waveguide with a Smoothly Inhomogeneous Liquid Flow

**V. G. Dmitriev and K. A. Naugol'nykh**

The field of a parametric transmitter in a waveguide with a smoothly inhomogeneous flow theoretically analyzed. The flow gives rise to a number of effects, among them the modulation of a medium nonlinear parameter, which, in turn, affects the directivity pattern of the parametric radiation, thus leading to the appearance of additional maxima. The relative magnitude of these maxima prove to be more significant for the field formed in the waveguide than for the field of the parametric transmitter in an unbounded medium in the presence of a vortex.