АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 2, с. 257 - 261

УДК 534.222

ИЗЛУЧЕНИЕ ОДИНОЧНОГО НЕПОДВИЖНОГО ПУЗЫРЬКА ПРИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПУЛЬСАЦИЯХ

© 1994 г. В. И. Ильичев, В. Л. Корец, Н. П. Мельников

Тихоокеанский океанологический институт РАН
690032 Владивосток, ул. Радио, 7

Поступила в редакцию 22.09.93 г.

Теоретически исследуется переход от периодических пульсаций одиночного кавитационного пузырька, находящегося в сжимаемой вязкой жидкости под действием гармонического акустического поля, к стохастическим. Рассчитано акустическое излучение пузырька и его спектры. Показано, что переход к стохастическим пульсациям осуществляется путем последовательных бифуркаций удвоения периода. Найдены зоны стохастических пульсаций в координатах амплитуды пульсаций и частоты возбуждающего поля.

Работа посвящена численному моделированию перехода периодических пульсаций кавитационного пузырька, возбуждаемых гармоническим акустическим полем, в стохастические и интерпретации с этой точки зрения основных характеристик спектра кавитационного шума.

Появление в спектре дискретных составляющих звукоряда возбуждающей частоты легко объясняется нелинейностью вынужденных пульсаций пузырька. Субгармонические компоненты были впервые обнаружены Эше [1] и Боном [2], а попытка их объяснения была предпринята Гутом [3]. В работах Проспереттн [4], Лаутерборна [5] показано, что пульсации пузырька на частотах ультрагармонических резонансов могут быть источниками субгармонических компонент в спектре кавитационного шума. На связь статистических характеристик флуктуаций амплитуды и фазы излучения пульсирующего в звуковом поле пузырька с появлением в спектре шумовой составляющей указали Акуличев и Ольшевский [6]. Однако физическая природа этих флуктуаций в работе не обсуждается. Таким образом, структура и некоторые особенности спектра кавитационного шума объяснены лишь частично. Данная работа предлагает еще один механизм появления в спектре излучения одиночного пузырька шумовой и низкочастотной субгармонических компонент.

В качестве модели выбран одиночный сферический пузырек, пульсирующий в безграничной сжимаемой и вязкой жидкости. Пульсации такого пузырька описываются известным уравнением Джилмора [7]. Подробно эта модель описана в работе [8]. При расчетах считалось, что пузырек равновесного радиуса R_0 возбуждается в воде акустическим полем вида $P_\infty = P_0(1 - \varepsilon\sin 2\pi ft)$, где P_0 – статическое давление, t – время, f – частота и ε – безразмерная амплитуда. Уравнение Джилмора интегрировалось при начальных условиях: $R(0) = R_0$, $U(0) = dR/dt = 0$, где R – текущий радиус пузырька. Давление, излучаемое пузырьком, рассчитывалось согласно работе [9].

Расчеты показали, что при некоторых параметрах возбуждающего поля пульсации пузырька становятся стохастическими. Переход от периодических пульсаций к стохастическим происходит следующим образом. При малых значениях амплитуды возбуждающего поля пульсации пузырька близки к линейным; при увеличении ε пульсации пузырька становятся нелинейными, но периодическими с периодом T_R, кратным как периоду звукового поля ($T_R = mT$), так и периоду собственных пульсаций пузырька ($T_R = nT_0$). При некотором значении ε начинается так называемая зона бифуркаций. В этой зоне путем последовательного удвоения периода решения уравнения Джилмора происходит переход от периодических пульсаций к непериодическим. Порядок пульсаций пузырька n/m становится последовательно равен $n/m = 2n_0/2m_0, 4n_0/4m_0 \ldots$, где n_0/m_0 – порядок периодических пульсаций при входе в зону бифуркаций. Наконец, при некотором значении ε пульсации становятся непериодическими. В области непериодичности решение носит неустойчивый характер, то есть бесконечно малые возмущения начальных условий приводят к сильному возмущению решений на больших интервалах времени. При этом решение остается ограниченным по амплитуде.

Рассмотрим поведение динамической системы, каковой является пульсирующий пузырек, при переходе параметра ε через бифуркационные значения ε_i. На рис. 1 представлена зависимость времени установления периодических пульсаций t_s от амплитуды возбуждающего поля ε. Расчеты выполнены для пузырька с равновесным радиусом $R_0 = 2 \times 10^{-5}$ м, возбуждаемого частотой $f = 31$ кГц, лежащей в зоне гармонического

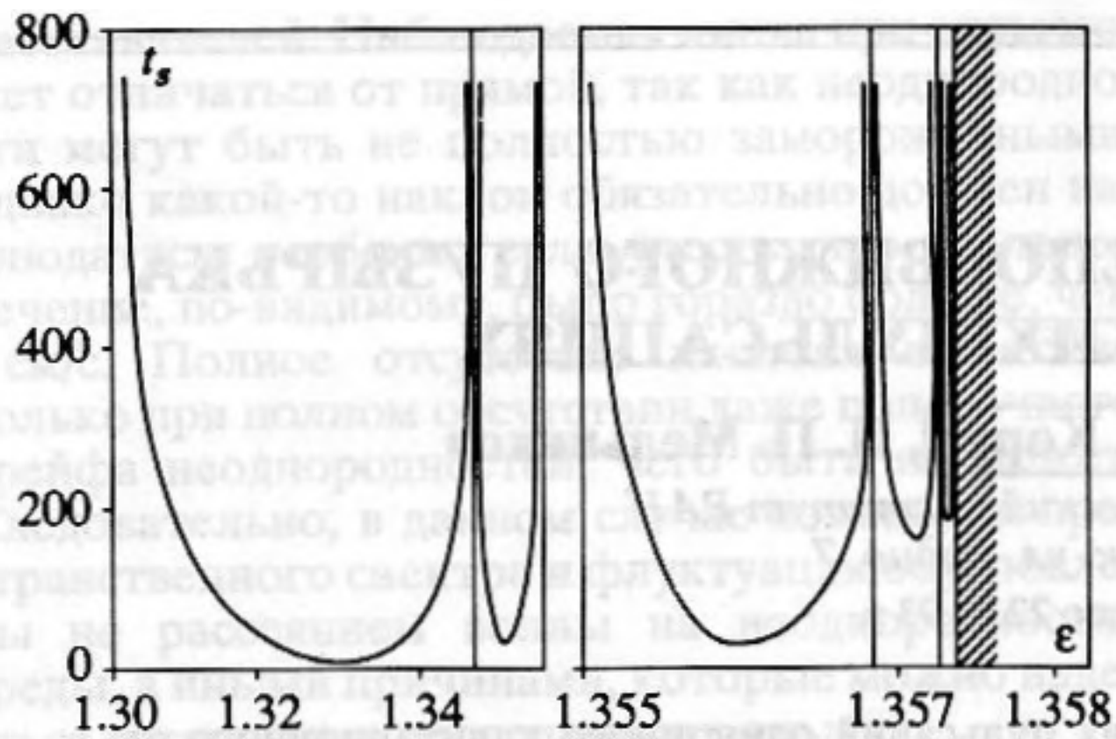

Рис. 1. Время установления t_s периодических пульсаций пузырька. $R_0 = 2 \times 10^{-5}$ м, $f = 31$ кГц.

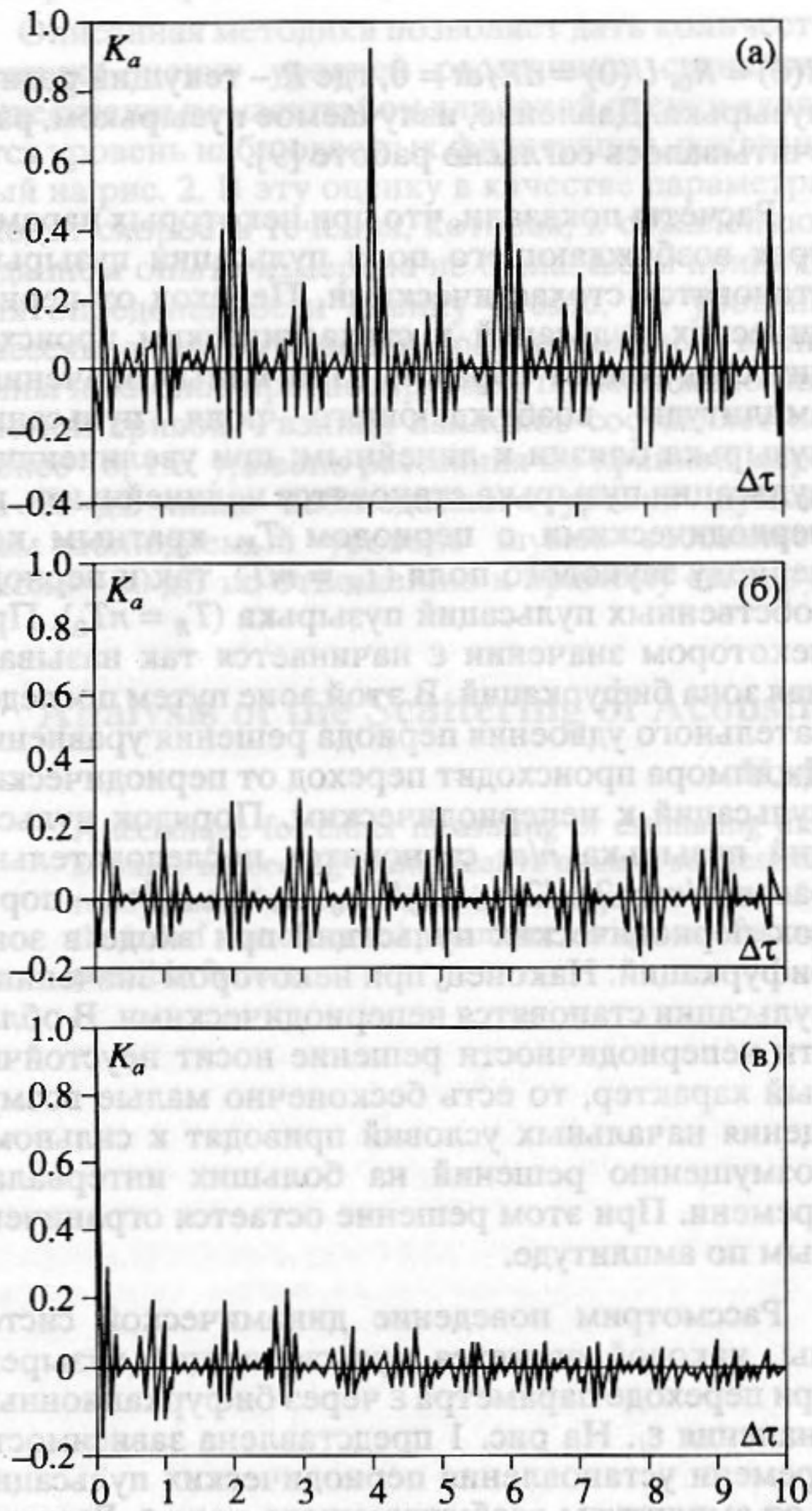

Рис. 2. Функции автокорреляции K_a акустического излучения пузырька. а – ε = 0.9645; б – ε = 0.9787; в – ε = 0.9929. $R_0 = 2 \times 10^{-5}$ м, $f = 31$ кГц.

резонанса порядка $n/m = 4/1$. Вертикальные линии разделяют области с различными порядками пульсаций пузырька. В первой слева области порядок пульсаций равен $n/m = 8/2$, далее соответственно – 16/4, 32/8, 64/16, 128/32. В области, выделенной штриховкой, пульсации пузырька стохастические. Видно, что при приближении ε к бифуркационным значениям ε_i время установления периодических решений резко возрастает; с увеличением порядка пульсаций это время также возрастает, становясь бесконечным в области стохастических пульсаций.

Значения ε_i, соответствующие очередным бифуркациям удвоения периода, образуют ряд, подчиняющийся закону Фейгенбаума, описанному в общем виде для динамических систем в работе [10]. Значение постоянной Фейгенбаума в нашем случае оказалось равно $\lambda^{-1} = 4.6572$, что с относительной точностью 0.26% совпадает с величиной λ^{-1}, полученной Фейгенбаумом для других динамических систем ($\lambda^{-1} = 4.6692$). Исследование непериодических решений показало увеличение хаотичности при продвижении вглубь стохастической области. Периодичность автокорреляционных функций K_a акустического излучения пузырька, представленных на рис. 2, быстро разрушается при увеличении ε, так что при значении ε = 0.9929 для полного исчезновения периодичности и уменьшения значения K_a до 0.1 вполне достаточно десяти периодов возбуждающего поля.

При дальнейшем увеличении амплитуды внешнего поля ε происходит обратная бифуркация, то есть решения вновь становятся периодическими, но более низкого порядка $n/m = 3/1$, после чего при увеличении ε вновь происходит переход к стохастическим пульсациям по схеме, описанной выше. Такую нелинейную систему принято относить к классу динамических систем со стохастическим аттрактором [10].

Зоны стохастических пульсаций пузырька равновесного радиуса $R_0 = 2 \times 10^{-5}$ м показаны на рис. 3, где приведены зависимости безразмерного максимального на периоде возбуждающего поля радиуса пузырька R_+ от частоты возбуждения f. Параметром служит амплитуда возбуждения ε. Крупные точки обозначают стохастические решения, а кружки и сплошные линии – периодические решения уравнения Джилмора. Зоны стохастичности заштрихованы, цифры над кривыми означают порядок резонанса. Видно, что стохастические решения появляются при достаточно малых значениях ε (ε = 0.847), и зоны таких решений лежат в областях ультрагармонических резонансов. С возрастанием ε зоны стохастических решений расширяются, в этих зонах наблюдаются также периодические решения, что характерно для нелинейных динамических систем такого класса. Таким образом, зафиксировав частоту возбуждающего поля f и увеличивая амплитуду

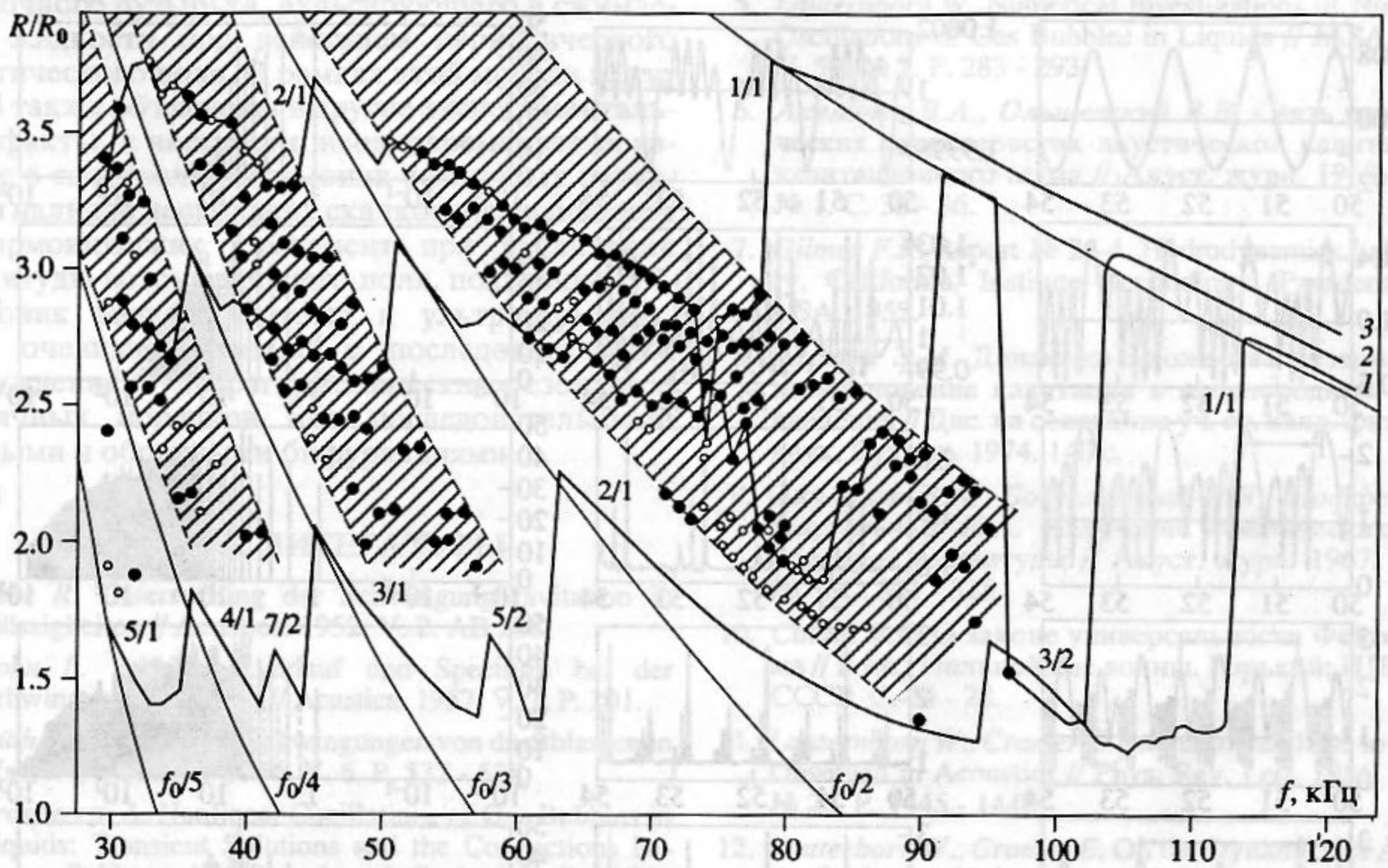

Рис. 3. Резонансные кривые пульсации пузырька. $R_0 = 2 \times 10^{-5}$ м, *1* – ε = 0.495; *2* – ε = 1.061; *3* – ε = 1.202.

акустического поля ε, мы будем последовательно пересекать зоны гармонических резонансов разного порядка; при переходе от гармонического резонанса одного порядка к резонансу другого порядка происходит переход через зону бифуркаций и область стохастических пульсаций.

В соответствии с изменением характера пульсаций пузырька изменяется форма излучаемой им волны давления и спектр этого излучения. На рис. 4 показаны: зависимости безразмерного радиуса пузырька R от безразмерного времени $\tau = tf$ (слева), зависимости излученного пузырьком давления от безразмерного времени (в центре) и спектры этого излучения (справа) для пузырька, возбуждаемого в области гармонического резонанса порядка 4/1. При ε = 0.28 (рис. 4а) пульсации пузырька близки к линейным. Однако форма излученной волны давления значительно отличается от синусоидальной. Спектр этого излучения линейчатый и содержит гармоники возбуждающей частоты, амплитуды которых быстро спадают с ростом частоты. При этом подчеркнуты составляющие с частотами, близкими к частоте собственных пульсаций (в частности, гармоника $4f$). С ростом ε порядок пульсаций пузырька изменяется от 1/1 до 5/1, одновременно изменяется его излучение и спектр: интенсивность гармонических составляющих, соответствующих частоте собственных пульсаций пузырька, увеличивается, формируются максимумы на частотах, кратных этой частоте, и спектр постепенно расширяется в область высоких частот (рис. 4б, ε = 0.64). Интенсивность гармоники $f_i/f = 6$ на 25 дБ и $f_i/f = 13$ на 15 дБ выше, чем интенсивность основной гармоники $f_i/f = 1$. Здесь f_i – текущая частота в спектре шума. Резонансное возбуждение пузырька (рис. 4в, ε = 0.91) происходит на резонансе порядка 4/1 и сопровождается значительным увеличением амплитуды его пульсаций, амплитуды импульсов его акустического излучения и уменьшением их длительности, что приводит к значительному расширению спектра излучения в область высоких частот и уменьшению скорости его спадания. После первой бифуркации (рис. 4г, ε = 0.94) период излучаемого давления удваивается, и в спектре появляются субгармоники $f/2$. При следующих бифуркациях в спектре появляются субгармонические составляющие $f/4$, $f/8$ (рис. 4д, 4е) и т.д. Следует отметить, что наибольшей интенсивностью во всех случаях обладают субгармоники, расположенные вблизи собственной частоты пульсаций пузырька. Так, при ε = 0.957 (рис. 4д) наиболее интенсивными являются субгармоники $11f/2$ и $13f/2$, их уровень на 25 дБ выше уровня субгармоники $f/2$ и лишь на 4 - 5 дБ ниже уровня гармоники $6f$. При ε = 0.9645 (рис. 4ж) пульсации пузырька становятся непериодическими. В спектре излучения появляется сплошная составляющая, уровень которой увеличивается по мере углубления в стохастическую область (рис. 4ж, 4з). При ε = 0.9929 (рис. 4з) периодическая структура сигнала практически разрушается, что приводит к

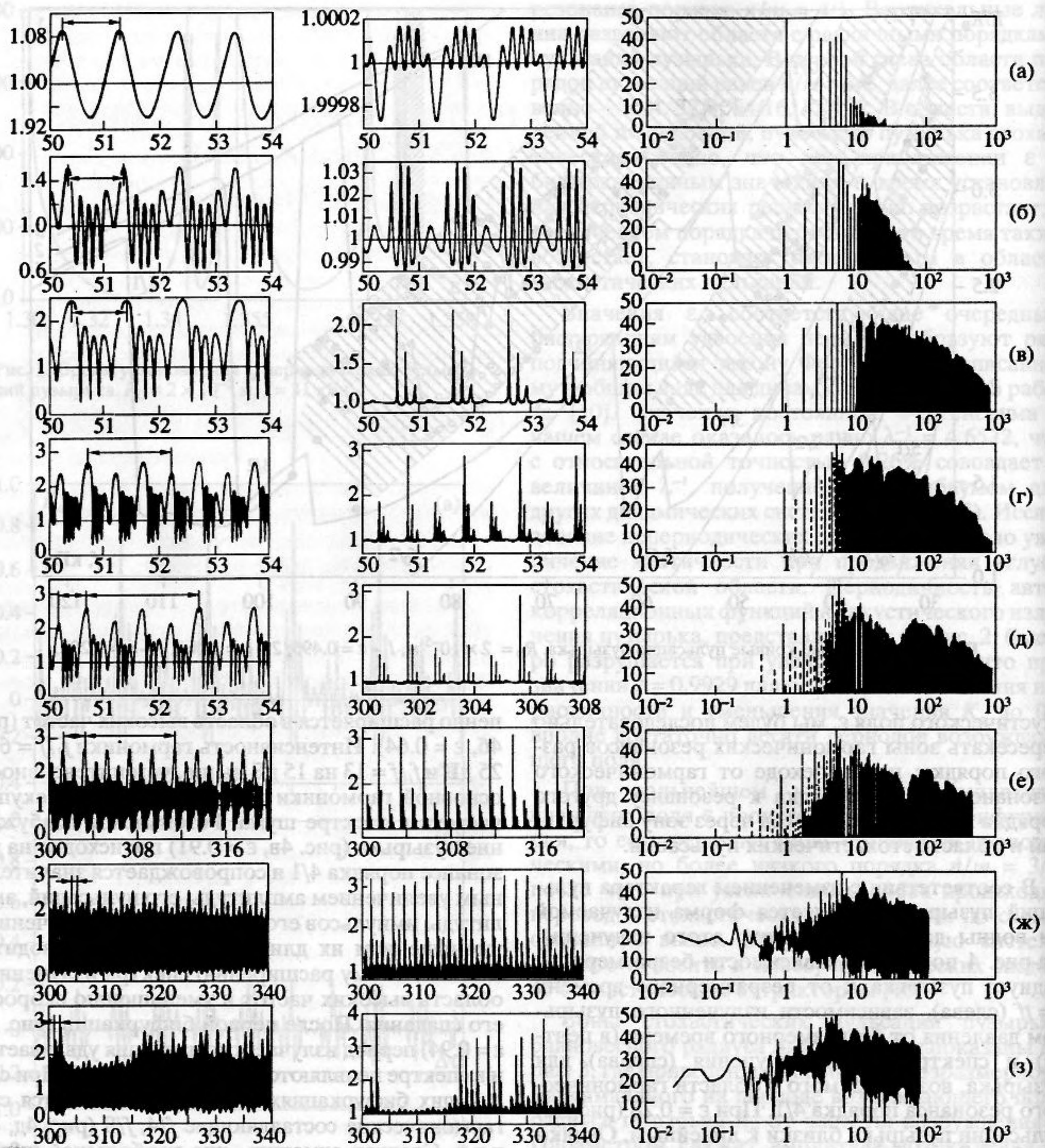

Рис. 4. Пульсации пузырька (слева), акустическое излучение (в центре, P_u 10^{-5} Па), спектры акустического излучения (справа, дБ); а – $\varepsilon = 0.28$, $n/m = 1/1$; б – $\varepsilon = 0.64$; $n/m = 5/1$; в – $\varepsilon = 0.91$, $n/m = 4/1$; г – $\varepsilon = 0.94$, $n/m = 8/2$; д – $\varepsilon = 0.957$, $n/m = 16/4$; е – $\varepsilon = 0.9617$, $n/m = 32/8$; ж – $\varepsilon = 0.9645$, хаос; з – $\varepsilon = 0.9929$, хаос. $R_0 = 2 \times 10^{-5}$ м, $f = 31$ кГц. Акустическое излучение рассчитывалось на расстоянии $r = 10R_0$ от центра пузырька.

исчезновению субгармоник и заметному уменьшению уровня гармоник над уровнем шума.

Изложенные выше результаты численных расчетов спектров излучения кавитационных пузырьков хорошо согласуются с результатами экспериментальных работ Лаутерборна и Крамера [11 - 12]. В процессе весьма тщательно выполненных измерений авторы обнаружили последовательное появление в спектре субгармоник $f/2, f/4, f/8$, появление вблизи субгармонических составляющих шумовой компоненты и обратные бифуркации. Эти особенности полученных экспериментально спектров могут быть объяснены с помощью принятой нами модели

одиночного пузырька, пульсирующего в сжимаемой жидкости под действием периодического акустического поля. В рамках этой модели могут быть также объяснены и другие экспериментальные факты, в частности, неодновременное появление в спектрах субгармоник различных порядков и наличие нескольких скачков интенсивности субгармонических компонент при увеличении амплитуды возбуждающего поля, появление субгармоник низкой частоты и ультрагармоник. Это, очевидно, связано с последовательным возбуждением ультрагармонических резонансов различных порядков или последовательными прямыми и обратными бифуркациями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eshe R.* Untersuching der Schwingungskavitation in Flüssigkeiten // Acustica. 1952. V. 2. AB 208.
2. *Bohn L.* Schalldruckverlauf und Spectrum bei der Schwingungskavitation // Acustica. 1957. V. 7. P. 201.
3. *Güth W.* Nichtlineare Schwingungen von durftblassen in Wasser // Acustica. 1956. V. 6. P. 532 - 538.
4. *Prosperetti A.* Nonlinear Oscillations of Gas Bubbles in Liquids: Transient Solutions and the Connections between Subharmonic Signal and Cavitation // JASA. 1975. V. 57. № 4. P. 810 - 821.
5. *Lauternborn W.* Numerical Investigations of Nonlinear Oscillations of Gas Bubbles in Liquids // JASA. 1976. V. 59. № 2. P. 283 - 293.
6. *Акуличев В.А., Ольшевский В.В.* Связь стохастических характеристик акустической кавитации и кавитационного шума // Акуст. журн. 1968. Т. 14. № 1. С. 30 - 36.
7. *Gilmor F.R.* Report № 26-4, Hydrodynamics Laboratory, California, Institute Technology, Pasadena, CA, USA. 1952.
8. *Агрест Э.М.* Динамика множества пузырьков и возникновение кавитации в неоднородных полях давления // Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Сухуми. 1974. 140 с.
9. *Акуличев В.А., Богуславский Я.Я., Иоффе А.А., Наугольных К.А.* Излучение сферических волн конечной амплитуды // Акуст. журн. 1967. Т. 13. № 3. С. 321 - 328.
10. *Синай Я.Г.* О законе универсальности Фейгенбаума // В кн.: Нелинейные волны. Горький: ИПФ АН СССР. С. 24 - 28.
11. *Lauternborn W., Cramer E.* Subharmonic Rote to Chaos Observed in Acoustics // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. № 20. P. 1445 - 1448.
12. *Lauterborn W., Cramer E.* On the Dynamics of Acoustic Cavitation Noise Spectra // Acustica. 1981. V. 49. P. 280 - 287.

Emission of Sound by a Stationary Bubble under Stochastic Oscilations Liquid

V. I. Il'ichev, V. L. Korets, and N. P. Melnikov

For a single cavitation bubble in a viscous compressible liquid under a harmonic acoustical field, the transition from periodic oscillations to stochastic oscillations is investigated. The acoustical emission of a bubble and its spectra are calculated. The transition to stochastic oscillations is shown to occur through the consequent bifurcations of period doubling. Stochastic oscillation zones are located in the coordinates of the oscillation amplitude and the excitation frequency.