АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 1, с. 67 - 70

УДК 534.222

ПЛОСКИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ПОВРЕЖДЕННОЙ СРЕДЕ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

© 1994 г. В. И. Ерофеев

Нижегородский филиал института машиноведения РАН
603024 Н.Новгород, ул. Белинского, д. 85

Поступила в редакцию 17.03.93 г.

Изучены особенности распространения продольных и сдвиговых волн в поврежденной среде с микроструктурой. Для описания поведения упругой среды с микронарушениями внутренняя энергия задается в виде потенциала Мясникова–Ляховского. Наличие микроструктуры учитывается с помощью гипотез Леру. Предложенная математическая модель является существенно нелинейной и позволяет описать стационарные волны. Определены зависимости между основными параметрами волны и поврежденностью материала. Показано, что эти зависимости могут быть положены в основу разработки акустического метода диагностики поврежденности материалов.

Для многих материалов характерно явление разномодульности [1 - 6], заключающееся в том, что константы упругости зависят от вида напряженного состояния и резко (скачкообразно) изменяются от растяжения к сжатию. Разномодульность определяется рядом факторов, прежде всего наличием в материале микротрещин.

В экспериментах было показано, что для стали модули упругости при растяжении меньше, чем модули при сжатии на 5%, в бронзе – на 10%, в чугуне – на 20% [1, 6], в зернистом графите – на 20% [6]. В бетоне степень разномодульности зависит от размеров образца, рода заполнителя, влажности и других факторов. В [6] показано, что для больших образцов мелкозернистого бетона на кварцевом песке $E_p = 0.65 \times 10^3$ кГ/мм^2, $E_c = 1.82 \times \times 10^3$ кГ/мм^2 (где $E_{p,c}$ – модули Юнга).

Существуют различные модели, позволяющие описывать свойства поврежденных материалов. Хорошо зарекомендовали себя модели Амбарцумяна–Хачатряна [1, 2], Работнова–Ломакина [3], Мясникова–Ляховского [4 - 7] и некоторые другие.

В.П. Мясниковым и В.А. Ляховским [4 - 7] предложено для описания поведения упругой среды с микронарушениями внутреннюю энергию $\rho_0 U$ задавать в виде

$$\rho_0 U = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 \sqrt{I_2}, \qquad (1)$$

где $I_1 = \varepsilon_{ii}$, $I_2 = \varepsilon_{ji}$, ε_{ji} – инварианты тензора деформаций ($\varepsilon_{ij} = 1/2(dU_i/dx_j + dU_j/dx_i)$), ν – модуль, характеризующий степень разрушения материала. Зависимость этого модуля от длины микротрещин проанализирована в [5].

Свойства среды, описываемой потенциалом (1), существенно отличаются от свойств идеально упругой среды. Анализ экспериментальных данных [8 - 10], проведенный в [6], показывает, что использование этого потенциала эффективно для описания процессов в земных породах.

В работах [7, 11 - 13] были использованы некоторые особенности распространения волн в средах, описываемых потенциалом (1). При этом влияние микроструктуры материала не изучалось. На важность такого изучения, по-видимому, впервые было обращено внимание в [14].

Для оценки влияния микроструктуры на волновые процессы в поврежденной среде воспользуемся наряду с гипотезами Мясникова–Ляховского гипотезами Леру о наличии моментных напряжений [15, 16].

Внутреннюю энергию представим в виде разложения по инвариантам тензора деформаций и градиента микродисторсии $\Gamma_{klm} = -u_{l,km}$ (u_l – компоненты вектора перемещений), характеризующего микроструктуру материала [15]:

$$\rho_0 U_1 = \rho_0 U + 2\mu M^2 (\Gamma_{klm} + \tilde{\nu} \Gamma_{klm} \Gamma_{lkm}), \qquad (2)$$

где M и $\tilde{\nu}$ – константы микроструктуры.

Уравнения динамики поврежденной среды с моментными напряжениями могут быть получены, исходя из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского [17, 18], из условия экстремума функционала действия

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{V_0} \rho_0 \left(\frac{1}{2} \dot{u}_i^2 - U_1 \right) dV_0. \qquad (3)$$

Здесь ρ_0, V_0 – плотность и объем материала в исходном состоянии.

Коллинеарное распространение плоских продольных и сдвиговых волн описывается уравнениями:

$$u_{,tt} - c_l^2 u_{,xx} + \Gamma \frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{u_{,x}^2 + v_{,x}^2} + \frac{u_{,x}^2}{\sqrt{u_{,x}^2 + v_{,x}^2}}\right] + \\ + 4c_\tau^2 M^2 (1+\tilde{\nu})\, u_{,xxxx} = 0, \\ v_{,tt} - c_\tau^2 v_{,xx} + \Gamma \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{,x} v_{,x}}{\sqrt{u_{,x}^2 + v_{,x}^2}}\right] + \\ + 4c_\tau^2 M^2 \operatorname{sign} M\, v_{,xxxx} = 0 \quad (\Gamma = \nu/\rho_0), \tag{4}$$

которые являются существенно нелинейными. Присутствие в (4) слагаемых $\sim \partial^4/\partial x^4$ указывает на наличие в материале высокочастотной пространственной дисперсии продольных и сдвиговых волн.

Если условия таковы, что продольная деформация значительно превышает сдвиговую ($u_{,x} \gg v_{,x}$), то уравнения (4) можно значительно упростить, избавившись в них от радикалов. Тогда первое уравнение станет линейным, в нем перед $u_{,xx}$ вместо c_l^2 будет стоять коэффициент $(c_l^2 + 2\Gamma)$.

Второе уравнение преобразуется к виду:

$$v_{,xx} - (c_\tau^2 - \Gamma)\, v_{,xx} + 4c_\tau^2 M^2 \operatorname{sign} M\, v_{,xxxx} - \\ - \frac{\Gamma}{2}\frac{\partial}{\partial x}(v_{,x}^3/u_{,x}^2) = 0. \tag{5}$$

Предположим, что продольная деформация состоит из постоянной составляющей (U_0) и возмущения $\tilde{U}(|\tilde{U}| \ll |\tilde{U}_0|)$:

$$u_{,x} = U_0 + \tilde{U}(x, t). \tag{6}$$

Тогда, перейдя в (5) к переменным $\eta = x - \sqrt{(c_\tau^2 - \Gamma)}\, t$, $\tau = \varepsilon_0 t$, получим, что эволюция волны сдвиговой деформации $W = \partial v/\partial\eta$, бегущей в положительном направлении оси x, описывается уравнением:

$$W_{,\tau} - pW_{,\eta\eta\eta} + q\frac{\partial}{\partial\eta}\left[W^3\left(1 - \frac{2\tilde{U}}{U_0}\right)\right] = 0, \tag{7}$$

где

$$p = \frac{2c_\tau^2 M^2 (1+\tilde{\nu})}{\sqrt{c_\tau^2 - \Gamma}}, \quad q = \frac{\Gamma}{4U_0\sqrt{c_\tau^2 - \Gamma}}.$$

При отсутствии продольных возмущений $\tilde{U} = 0$ (7) сводится к модифицированному уравнению Кортевега–де Вриза. Будем искать его решение в виде стационарной волны $\xi = \eta - V\tau$, $V = \text{const}$. О возможности существования нелинейных стационарных волн сдвига в том или ином классе материалов можно судить по знакам параметров нелинейности (q) и дисперсии (p). Профиль волны рассчитывается по уравнению Дуффинга, первый интеграл которого записывается в виде:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{d\xi}\right)^2 + \frac{a}{2}W^2 + \frac{b}{4}W^4 - c = 0, \tag{8}$$

где $a = V/p$, $b = -q/p$, c – постоянная интегрирования. Для поврежденной среды параметр нелинейности q всегда положителен. Особенности формирования стационарных волн зависят от характера дисперсии, поскольку в зависимости от знака параметра p уравнение Дуффинга имеет качественно различные решения.

Фазовый "портрет" уравнения Дуффинга для материалов с отрицательной дисперсией (например, металлы и сплавы) содержит два устойчивых положения равновесия, в окрестности которых фазовые траектории имеют форму, близкую к эллипсу. В этом случае уравнение имеет три типа решений, одним из которых является уединенная стационарная волна – солитон. На фазовой плоскости это решение соответствует сепаратрисе, проходящей через начало координат ($c = 0$) и отделяет одну область периодических решений ($c < 0$) от другой ($c > 0$).

Для материалов с положительной дисперсией (например, армированные композиты [19], зернистые композиты [20]), уравнение Дуффинга имеет два типа финитных решений – периодическое и уединенное. Периодическое решение выражается через эллиптический синус, а уединенное решение описывается гиперболическим тангенсом.

Заметим, что параметры стационарных волн существенно зависят от величины продольной деформации U_0 и коэффициента поврежденности материала Г.

На рис. 1 представлены зависимости амплитуды, скорости и ширины солитона сдвиговой деформации от величины продольной деформации при фиксированном Г.

На рис. 2 представлены зависимости амплитуды, скорости и ширины солитона от коэффициента поврежденности материала Г при фиксированном значении U_0.

При наличии продольных возмущений $\tilde{U} \neq 0$ уравнение (7) является нелинейным параметрическим. Оно позволяет исследовать эволюцию стационарных сдвиговых волн под действием продольных возмущений. Для этого удобно воспользоваться методом усреднения по стационарным волнам [21] и перейти к укороченным уравнениям для амплитуды и фазы сдвиговой волны.

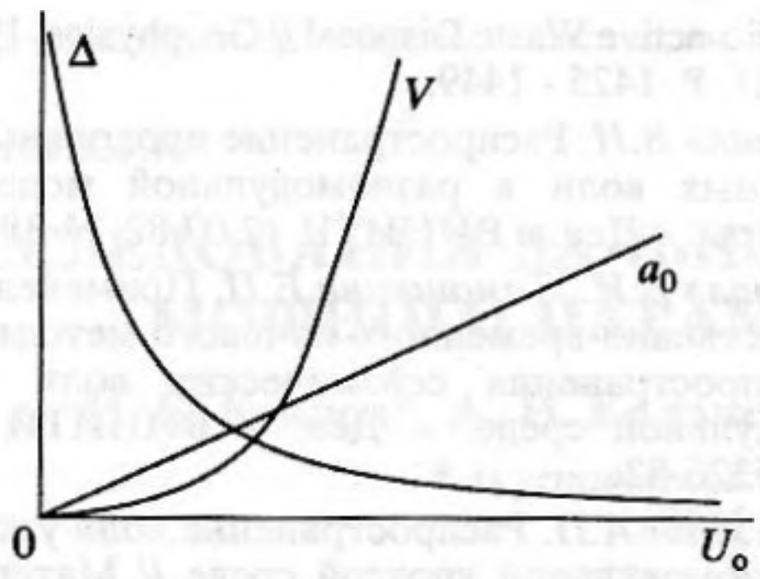

Рис. 1.

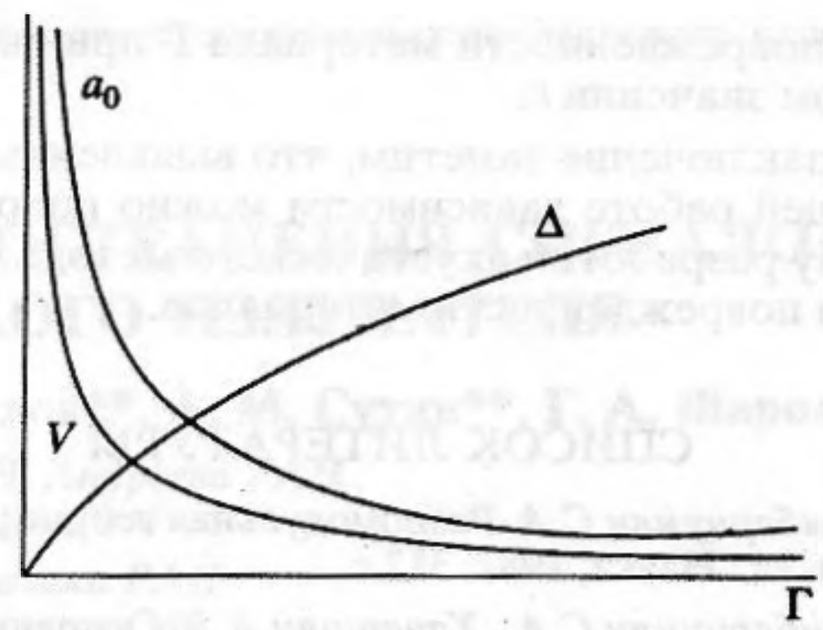

Рис. 2.

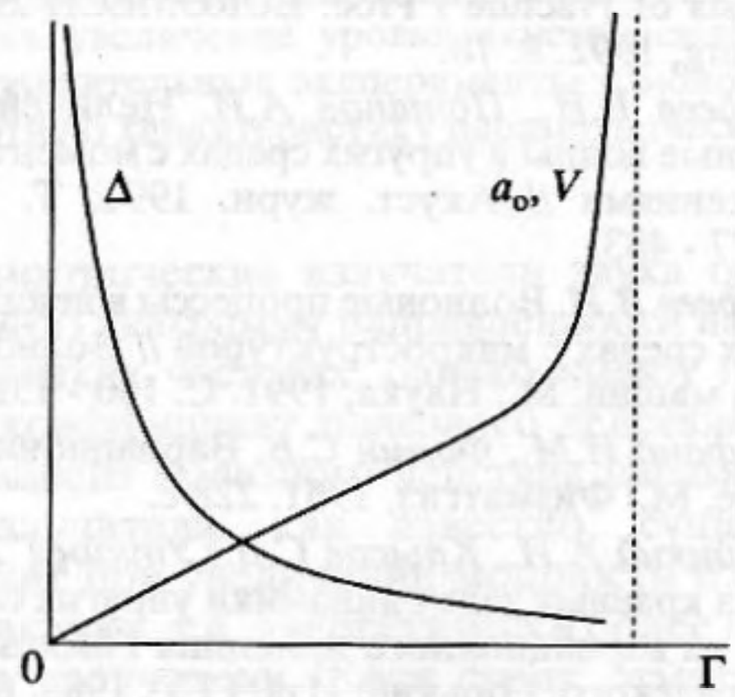

Рис. 3.

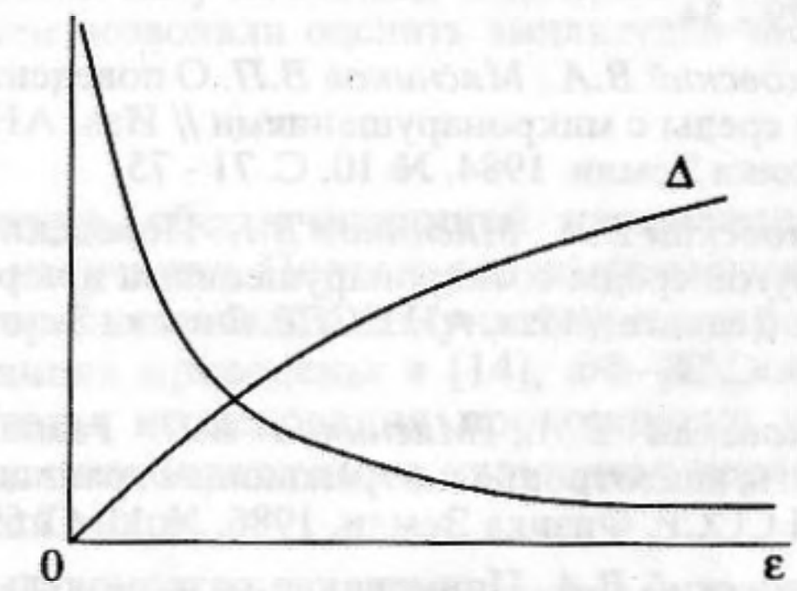

Рис. 4.

Предположим, что в образце материала реализуется начальное одноосное деформированное состояние $\varepsilon_{22} = \varepsilon \neq 0$, а остальные компоненты тензора деформаций равны нулю. Рассмотрим продольную волну, распространяющуюся вдоль оси x : $u_1 = u \neq 0$, $u_2 = u_3 = 0$. Уравнение динамики в этом случае имеет вид:

$$u_{,tt} - c_l^2 u_{,xx} + \Gamma\left[\frac{3u_{,x}u_{,xx} + \varepsilon u_{,xx}}{\sqrt{\varepsilon^2 + u_{,x}^2}} - \frac{u_{,x}^2 u_{,xx}(\varepsilon + u_{,x})}{(\varepsilon^2 + u_{,x}^2)^{3/2}}\right] + 4c_\tau^2 M^2 \operatorname{sign} M u_{,xxxx} = 0. \quad (9)$$

Если предположить, что начальная деформация больше продольной деформации, возникающей при распространении волны, т.е. $u_{,x}/\varepsilon < 1$, то в уравнении (9) можно избавиться от радикалов, раскладывая знаменатели в ряду Тейлора.

Ограничиваясь при этом учетом лишь квадратичной нелинейности, преобразуем уравнение (9) к виду

$$u_{,tt} - (c_l^2 - \Gamma)\, u_{,xx} + \frac{3\Gamma}{\varepsilon} u_{,x} u_{,xx} + 4c_\tau^2 M^2 \operatorname{sign} M u_{,xxxx} = 0. \quad (10)$$

Это уравнение с помощью замены переменных $\eta = x - \sqrt{(c_l^2 - \Gamma)}t$, $\tau = \varepsilon_0 t$, сводится к уравнению Кортевега–де Вриза, описывающему эволюцию продольной волны деформации $U = \partial u/\partial\eta$.

Будем искать его решение в виде стационарной волны $\xi = \eta - V\tau$, $V = \text{const}$. Анализ показывает, что для сред с отрицательной дисперсией ($\operatorname{sign} M = -1$) стационарные волны являются периодическими (как при $\varepsilon > 0$), так и при $\varepsilon < 0$). Для сред с положительной дисперсией ($\operatorname{sign} M = 1$) стационарная волна является уединенной – солитоном.

На рис. 3 представлены зависимости амплитуды, скорости и ширины солитона продольной деформации от начальной деформации при фиксированном значении Γ.

На рис. 4 представлены зависимости амплитуды, скорости и ширины солитона от коэффици-

ента поврежденности материала Г при фиксированном значении ε.

В заключение заметим, что выявленные в настоящей работе зависимости можно положить в основу разработки акустического метода диагностики поврежденности материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 317 с.
2. *Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А.* Основные уравнения теории для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 2. С. 18 - 24.
3. *Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного материала // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29 - 34.
4. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71 - 75.
5. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* Поведение вязкоупругой среды с микронарушениями при растяжении и сдвиге // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 4. С. 28 - 36.
6. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* Разномодульность, анизотропия и отражающие границы // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 11. С. 69 - 73.
7. *Ляховский В.А.* Применение разномодульной модели к анализу напряженно-деформированного состояния горных пород // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 2. С. 89 - 94.
8. Кольская сверхглубокая. Исследования глубинного строения континентальной коры с помощью бурения Кольской сверхглубокой скважины. М.: Недра, 1984. 490 с.
9. *Moos D., Zobak M.D.* In-situ studies of velocity in fractured cristalline rocks // J. Geophys. Reg. 1983. V. 88. № B3. P. 2345 - 2358.
10. *Green A.G., Mair J.A.* Subhorizontal Fractures in a Granitic Pluton: Their Defection and Implications for Radio-active Waste Disposal // Geophysics. 1983. V. 48. № 11. P. 1425 - 1449.
11. *Топалэ В.И.* Распространение продольных и поперечных волн в разномодульной модели литосферы. – Деп. в ВИНИТИ 12.07.82, № 3895-82.
12. *Топалэ В.И., Тимошкина Е.П.* Применение пространственно-временного лучевого метода в теории распространения сейсмических волн в разномодульной среде. – Деп. в ВИНИТИ 25.08.82, № 5326-82.
13. *Наумкин А.П.* Распространение волн ускорений в разномодульной упругой среде // Матер. регион. конф. "Динамические задачи механики сплошной среды". Краснодар: Кубан. гос. ун-т, 1990. Ч. 1. С. 118.
14. *Erofeyev V.I., Potapov A.I.* Nonlinear Mathematical Models of Damaged Media With Microstructure. The Wave Process Analysis // Macro- and Micromechanical Aspests of Fracture / Proc. EUROMECH-291. St. Petersburg, 1992. P. 78.
15. *Ерофеев В.И., Потапов А.И.* Нелинейные продольные волны в упругих средах с моментными напряжениями // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 3. С. 477 - 483.
16. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в нелинейно-упругих средах с микроструктурой // Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991. С. 140 - 152.
17. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
18. *Весницкий А.И., Крысов С.В., Уткин Г.А.* Постановка краевых задач динамики упругих систем, исходя их вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Горький: Изд. ГГУ, 1983. 65 с.
19. *Тошер, Гузельсу.* Экспериментальное исследование дисперсии волн в волокнистом композиционном материале // Тр. Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Е: Прикл. механика. М.: Мир, 1972. № 1. С. 97 - 102.
20. *Ерофеев В.И., Родюшкин В.М.* Наблюдение дисперсии упругих волн в зернистом композите и математическая модель для ее описания // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 6. С. 1116 - 1117.
21. *Рабинович М.И.* О методе усреднения по стационарным волнам // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 2. С. 214 - 223.

Plane Stationary Waves in a Damaged Medium with Microstructure

V. I. Erofeev

Propagation of longitudinal and shear wave in a damaged medium with microstructure is investigated. In order to describe the behavior of an elastic medium with microfractures, the internal energy is specified in the form of a Myasnikov–Lyakhovskii potential. The presence of microstructure is taken into account with the aid of the Leroux hypotheses. The resulting mathematical model is strongly nonlinear and can describe stationary waves. Dependences relating the primary wave parameters to the extent of material fracturing are determined. It is shown that these dependences may be used as a basis for developing an acoustic technique to test the fracturing of materials.