АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 1, с. 17 - 24

УДК 534.26

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С УЧЕТОМ РЕАКЦИИ СРЕДЫ ВНУТРИ НЕЕ

© 1994 г. Э. П. Бабайлов

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

190008 Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3

Поступила в редакцию 02.09.92 г.

Рассмотрен вопрос об осесимметричных колебаниях упругой оболочки конечной длины под воздействием внешних усилий с учетом реакции среды внутри оболочки. Указан способ точного учета взаимодействия вибрирующей оболочки и акустического поля при различных условиях на торцах трубы в случае жесткого закрепления ее краев.

Как правило, при рассмотрении проблемы вынужденных колебаний упругих конструкций в жидкой или газообразной средах ограничиваются изучением внешней задачи [1 - 4]. На практике нередки, однако, случаи, когда основной интерес представляет взаимодействие упругой конструкции со звуковым полем в замкнутой области. Рассмотрим такого рода внутреннюю задачу, схематически представленную на рис. 1. Имеется упругая труба конечной длины L. Ее края ($x = \pm L/2$, $r = R$) жестко заделаны, торцы трубы предполагаем идеально отражающими (либо оба акустически жесткими, либо оба акустически мягкими, либо один из торцов жестким, второй – мягким, что хорошо соответствует случаю открытого торца трубы [5]), вне трубы – вакуум, внутри – упругая среда. Примером такой конструкции является судовая гидросистема, сообщающаяся с забортным пространством. Колебания трубы возбуждаются внешней нагрузкой $F_0\delta(x - x_0)$, распределенной по круговой линии $r = R$. При этом x, r – цилиндрические координаты, R – радиус срединной поверхности трубы. Очевидно, что колебания в таком случае являются осесимметричными и зависимость акустовибрационных характеристик от азимутального угла отсутствует. Исходными для описания колебаний трубы являются уравнения движения оболочки [6], в данном случае имеющие вид

$$\begin{cases} L_{11}u_x + \Omega u_x + L_{13}u_r = 0, \\ L_{31}u_x + L_{33}u_r - \Omega u_r = gR^2\,[F_0\delta(x - x_0) - p(x, R)]\,, \end{cases} \tag{1}$$

где u_x, u_r – осевая и радиальная компоненты вектора колебательного смещения срединной поверхности оболочки, $L_{11} = R^2\partial^2/\partial x^2$, $L_{13} = \sigma R\partial/\partial x - (h^2R/12)\partial^3/\partial x^3$, $L_{31} = L_{13}$, $L_{33} = 1 + h^2/12R^2[R^4\partial^4/\partial x^4 + 1]$, $\Omega = g\rho_м h\omega^2R^2$ – безразмерная частота, $g = (1 - \sigma^2)/Eh$, σ – коэффициент Пуассона материала оболочки, $\rho_м$ – плотность этого материала, E – его модуль Юнга, h – толщина оболочки, ω – круговая частота, $p(x, r)$ – звуковое давление внутри оболочки, подчиняющееся уравнению Гельмгольца $\nabla^2 p + k^2 p = 0$, $k = \omega/c$, c – скорость звука в среде, заполняющей оболочку. Временной фактор берем в виде $\exp(+i\omega t)$ и в дальнейшем опускаем. Гранично-контактные условия имеют вид:

$$u_r = u_x = 0, \quad du_r/dx = 0, \quad r = R, \quad x = \pm L/2,$$

$$L_0 p = 0, \quad x = \pm L/2, \quad 0 \le r \le R;$$

$$L_0 = \begin{cases} 1 - & \text{для акустически мягкого торца,} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} - & \text{для акустически жесткого торца,} \end{cases} \tag{2}$$

$$\partial p/\partial r = \omega^2\rho u_r, \quad r = R, \quad -L/2 \le x \le L/2,$$

где ρ – плотность акустической среды.

Система уравнений (1) известными методами [7] может быть сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно

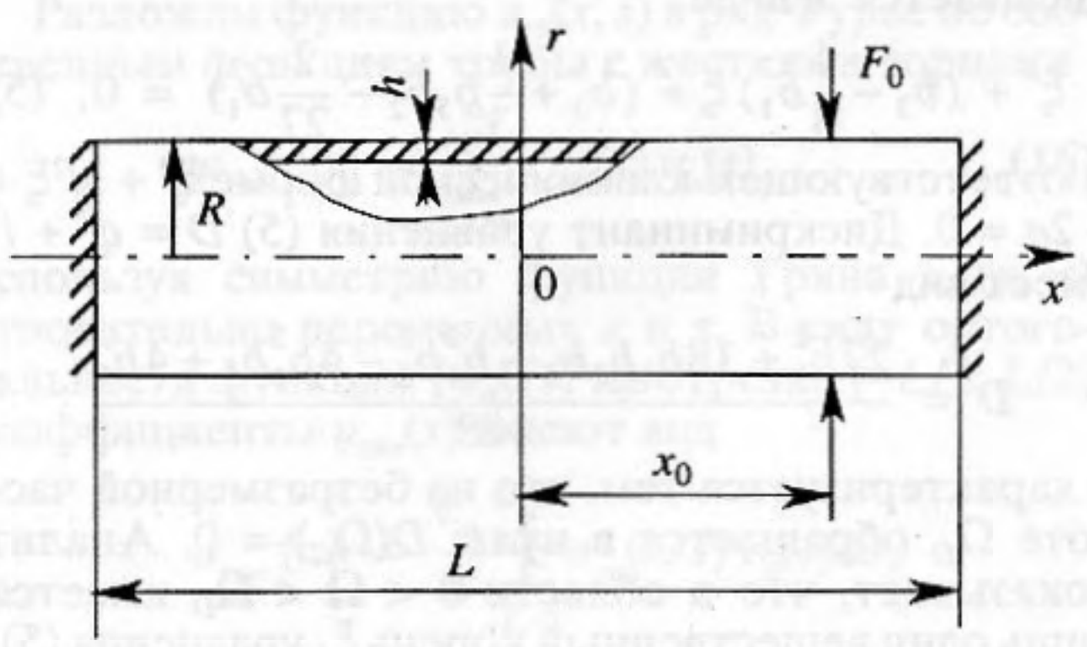

Рис. 1. Схема конструкции.

любой из функций $u_x(x)$ или $u_r(x)$. Выполнив необходимые преобразования, находим уравнение для функции $u_r(x)$

$$Lu_r = b_4F(x) - b_5d^2F(x)/dx^2, \quad (3)$$

где $F(x) = gR^2\,[F_0\delta(x - x_0) - p(x, R)]$.

Оператор L имеет вид

$$L = d^6/dx^6 - b_1d^4/dx^4 + b_2d^2/dx^2 + b_3,$$

а коэффициенты b_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ определяются выражениями

$$b_1 = 12\frac{\Omega + 2\sigma}{\alpha}, \quad b_2 = \frac{144\,(\Omega + \beta)}{\alpha h^2},$$

$$b_3 = \frac{144\Omega\,(\Omega + \beta - \sigma^2)}{\alpha h^2R^2}, \quad b_4 = -\frac{144\Omega}{\alpha h^2R^2},$$

$$b_5 = \frac{144}{\alpha h^2},$$

где

$$\alpha = h^2 - 12R^2, \beta = \sigma^2 - 1 - h^2/12R^2.$$

Функция $u_x(x)$ выражается через функцию $u_r(x)$ с помощью соотношения

$$u_x(x) = \mu_1d^3u_r/dx^3 - \mu_2du_r/dx - \mu_3\int u_rdx + \mu_4\int F(x)dx, \quad (4)$$

где

$$\mu_1 = \gamma\frac{h^2 - 12R^2}{12R}, \quad \mu_2 = \gamma\frac{\sigma}{R},$$

$$\mu_3 = \gamma\frac{12\,(1 + h^2/12R^2 - \Omega)}{h^2R},$$

$$\mu_4 = \gamma\frac{12}{h^2R}, \quad \gamma = \frac{(Rh)^2}{h^2\Omega + 12R^2\sigma}.$$

Характеристическое бикубическое уравнение однородного уравнения

$$Lu_r = 0,$$

$$z^6 - b_1z^4 + b_2z^2 + b_3 = 0$$

после введения обозначений $z^2 = \eta$, $\eta = \xi + b_1/3$ записывается в виде

$$\xi^3 + (b_2 - \frac{1}{3}b_1^2)\,\xi + (b_3 + \frac{1}{3}b_1b_2 - \frac{2}{27}b_1^3) = 0, \quad (5)$$

соответствующем канонической форме $\xi^3 + 3l^2\xi + 2q = 0$. Дискриминант уравнения (5) $D = q^2 + l^3$ имеет вид

$$D = \frac{27b_3^2 + 18b_1b_2b_3 - b_1^2b_2^2 - 4b_1^3b_3 + 4b_2^3}{108}$$

и характеризуется тем, что на безразмерной частоте Ω_D обращается в нуль: $D(\Omega_D) = 0$. Анализ показывает, что в области $0 < \Omega < \Omega_D$ имеется лишь один вещественный корень ξ_1 уравнения (5), причем в интервале $0 < \Omega < \Omega_\xi$ этот корень положительный, при $\Omega = \Omega_\xi$ он равен нулю, а при $\Omega_\xi < \Omega < \Omega_D$ его значение отрицательно. Ограничимся рассмотрением области изменения частоты Ω в пределах $\Omega_\eta < \Omega < \Omega_D$, где Ω_η – частота, на которой $\eta_1 = \xi_1 + b_1/3 = 0$. При этом имеем значения корней z_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$:

$z_1 = i\nu$, $z_2 = -i\nu$, $z_3 = a + ib = z$, $z_4 = -z$, $z_5 = z^*$, $z_6 = -z^*$,

$*$ – символ комплексной сопряженности. Конкретные значения ν, a, b могут быть вычислены, например, с помощью формул Кардана при определении значений ξ_1, ξ_2, ξ_3 и последующих элементарных операций. Таким образом, решение однородного уравнения $Lu_r = 0$ имеет вид

$$u_r(x) = \sum_{j=1}^{6} C_je^{z_jx}, \quad (6)$$

где C_j – коэффициенты, подлежащие опре[illegible]нию. Во всех случаях они находятся из первой совокупности условий при $r = R$, $x = \pm L/2$ системы гранично-контактных условий (2).

Характерной особенностью внутренних задач является различие форм решений для звукового давления $p(x, r)$ при различных условиях на границах. В рассматриваемом случае эти формы определяются также и местом приложения нагрузки $F_0\delta(x - x_0)$. При $x_0 = 0$ и жестких торцах трубы имеем:

$$p(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(0)I_0(\nu_nr)\cos\gamma_nx, \quad (7)$$

где $\gamma_n = 2n\pi/L$, $\nu_n = [k^2 - \gamma_n^2]^{1/2}$, $I_0(\nu_nr)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Если $x_0 \neq 0$, то при том же характере торцов $x = \pm L/2$ можем записать

$$p(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x_0)I_0(\nu_nr)\cos\left[\frac{n\pi}{L}\,(x + L/2)\right], \quad (8)$$

где $\nu_n = [k^2 - (n\pi/L)^2]^{1/2}$. Символы $p_n(0)$ и $p_n(x_0)$ указывают на зависимость значений коэффициентов p_n от места действия сосредоточенной силы.

При $x_0 \neq 0$, жестком левом торце ($x = -L/2$) и мягком правом ($x = L/2$) решение для $p(x, r)$ следует искать в форме

$$p(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x_0)I_0(\nu_nr)\cos\left[\frac{2n+1}{2L}\pi\,(x + L/2)\right], \quad (9)$$

где

$$\nu_n = \left[k^2 - \left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)^2\right]^{1/2}.$$

Наконец, при $x_0 \neq 0$ и обоих мягких торцах трубы выражение для $p(x, r)$ можем записать в форме

$$p(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x_0)I_0(\nu_nr)\sin\left[\frac{n\pi}{L}\,(x + L/2)\right], \quad (10)$$

где

$$\nu_n = [k^2 - (n\pi/L)^2]^{1/2}.$$

Во всех случаях коэффициенты $p_n(x_0)$ находятся из последнего граничного условия в системе условий (2). Рассмотрим вначале общий случай

приложения сосредоточенной нагрузки $x_0 \neq 0$, считая оба торца трубы жесткими. Обозначив собственные аксиальные функции $\cos[n\pi/L(x + L/2)]$ через $v_n(x)$, перепишем уравнение (3) в виде

$$Lu_r = A\delta(x - x_0) - B\delta''(x - x_0) - gR^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x_0) v_n(x), \quad (11)$$

где

$$A = gR^2F_0b_4, \quad B = gR^2F_0b_5,$$

$$B_n(x_0) = p_n(x_0)I_0(\nu_n R)\left[b_4 + b_5\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right].$$

Решение уравнения (11) ищем методом Лагранжа. С учетом формулы (6) и значений корней z_j имеем представление для функции $u_r(x)$:

$$u_r(x) = C_1(x)e^{i\nu x} + C_2(x)e^{-i\nu x} + C_3(x)e^{zx} + C_4(x)e^{-zx} + C_5(x)e^{z^*x} + C_6(x)e^{-z^*x}. \quad (12)$$

Получив представления для производных функций $C_j'x$, $j = 1, \ldots 6$, сами функции $C_j(x)$ найдем, используя, в частности, правила вычисления неопределенных интегралов от обобщенных функций и их производных. В результате получается следующее выражение для общего решения неоднородного уравнения (11):

$$u_r(x, x_0) = 1(x - x_0)\left\{ \frac{A + B\nu^2}{\nu(\nu^2 + z^2)(\nu^2 + z^{*2})}\sin[\nu(x - x_0)] + \frac{A - Bz^2}{z(\nu^2 + z^2)(z^2 - z^{*2})}\operatorname{sh}[z(x - x_0)] - \frac{A - Bz^{*2}}{z^*(\nu^2 + z^{*2})(z^2 - z^{*2})}\operatorname{sh}[z^*(x - x_0)] \right\} + \sum_{j=1}^{6} C_j e^{z_j x} + gR^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x_0)\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x + L/2)\right] \times \left\{ \frac{1}{(\nu^2 + z^2)(\nu^2 + z^{*2})[(n\pi/L)^2 - \nu^2]} + 2\operatorname{Re}\frac{1}{(\nu^2 + z^2)(z^2 - z^{*2})[(n\pi/L)^2 + z^2]} \right\}, \quad (13)$$

где $1\,1(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$ – единичная функция.

Если коэффициенты $C_j(x_0)$ и $B_n(x_0)$ найдены, то функция $u_r(x, x_0)$ (13) является функцией Грина колебаний оболочки с учетом реакции среды внутри нее.

Представляет интерес возможность выражения этой функции через функцию Грина колебаний оболочки в вакууме. При рассмотрении внешних задач такой подход к учету реакции среды неоднократно использовался [1, 3, 8]. По-видимому, наиболее адекватным проблеме является использование метода граничных интегральных уравнений, в рамках которого нагрузка излучения учитывается как возмущение ядра интегрального уравнения [8].

В рассматриваемом случае поступим следующим образом. Заметим, что функция (13) без последнего ряда представляет собой функцию Грина колебаний оболочки в вакууме. Обозначим ее через $u_{гв}(x, x_0)$. Для ее однозначного определения необходимо вычислить коэффициенты $C_{jв}(x_0)$, используя граничные условия на краях трубы. Заметим, что обе функции $u_{гв}(x, x_0)$ и $u_r(x, x_0)$ являются непрерывными и дифференцируемыми на отрезке $-L/2 < x < L/2$, т.е. достаточно гладкими всюду, включая точку приложения силы x_0. Это следует непосредственно из соотношения между порядком дифференциального оператора L и порядком производной обобщенной δ-функции в правой части уравнения вынужденных колебаний трубы.

Если найдена функция $u_{гв}(x, x_0)$, то функция $u_r(x, x_0)$ определяется соотношением

$$u_r(x, x_0) = u_{гв}(x, x_0) - \frac{1}{F_0}\int_{-L/2}^{L/2} u_{гв}(x, s)p(s, x_0, R)ds, \quad (14)$$

где $p(s, x_0, R)$ – искомое звуковое давление при $r = R$. Здесь учтено, что оно посредством коэффициентов $P_n(x_0)$ зависит от точки приложения силы x_0. Подействовав оператором L_x на функцию $u_r(x, x_0)$ в (14), легко убеждаемся, что она удовлетворяет уравнению (11), если давление $p(x, x_0, r)$ определяется формулой (8). При этом для свободного члена в (14) имеем

$$L_x u_{гв} = A\delta(x - x_0) - B\delta''(x - x_0). \quad (15)$$

Замена в (15) x_0 на s дает значение этого оператора под знаком интеграла в (14).

Разложим функцию $u_{гв}(x, s)$ в ряд Фурье по собственным функциям трубы с жесткими торцами

$$u_{гв}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{гвn}(x)v_n(s), \quad (16)$$

используя симметрию функции Грина $u_{гв}(x, s)$ относительно переменных x и s. В силу ортогональности функций $\{v_n(s)\}$ на отрезке $[-L/2, L/2]$ коэффициенты $u_{гвn}(x)$ имеют вид

$$u_{гвn}(x) = \frac{\varepsilon_n}{L}\int_{-L/2}^{L/2} u_{гв}(x, s)v_n(s)ds,$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \neq 0. \end{cases}$$

Подставляя представление (16) в интегральную формулу (14), используя выражение (8) для $p(s, x_0, R)$ и граничное условие $u_r = (1/\omega^2\rho)\,\partial p/dr$, $r = R$, $-L/2 \le x \le L/2$, приходим к соотношению

$$1/\omega^2\rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x_0)\nu_n I_0'(\nu_n R)\,v_n(x) = \\ = u_{rв}(x, x_0) - L/F_0 \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x_0) u_{rвn}(x) I_0(\nu_n R)\frac{1}{\varepsilon_n}, \quad (17)$$

на основании которого возможно определение искомых коэффициентов $p_n(x_0)$. Умножив с этой целью обе части (17) на функцию $v_m(x)$ и проинтегрировав их по x от $-L/2$ до $L/2$, получаем бесконечную систему алгебраических уравнений вида

$$p_m(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} p_n(x_0) = d_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad (18)$$

где

$$c_{mn} = \frac{1}{F_0}\omega^2\rho \frac{I_0(\nu_n R)\varepsilon_m}{\nu_m I_0'(\nu_m R)\varepsilon_n} \int_{-L/2}^{L/2} u_{rвn}(x)\,v_m(x)dx,$$

$$d_m = \frac{\omega^2\rho}{\nu_m I_0'(\nu_m R)} u_{rвm}(x_0).$$

В первом приближении систему (18) можно решить, отбрасывая в ней недиагональные элементы с $m \ne n$. Тогда структура коэффициентов $p_n(x_0)$ дается выражением

$$p_n(x_0) = \\ = \frac{F_0\omega^2\rho u_{rвn}(x_0)}{F_0\nu_n I_0'(\nu_n R) + \omega^2\rho I_0(\nu_n R)\int_{-L/2}^{L/2} u_{rвn}(x)\,v_n(x)dx}. \quad (19)$$

Очевидно, что учет влияния акустической среды на значение коэффициентов $p_n(x_0)$ в рассматриваемом приближении осуществляется вторым членом знаменателя (19). В приближении, когда реакция среды на движение оболочки не учитывается вовсе, имеем

$$p_n(x_0) = \frac{\omega^2\rho u_{rвn}(x_0)}{\nu_n I_0'(\nu_n R)}. \quad (20)$$

При $n\pi/L > k$ функции $I_0(\nu_n R)$ и $I_0'(\nu_n R)$ суть функции Бесселя мнимого аргумента. С ростом n они неограниченно растут, что обеспечивает убывание коэффициентов $p_n(x_0)$ и, как следствие, сходимость ряда (8) при $0 \le r \le R$. Детальный анализ показывает, что сходимость имеет место и при $r = R$ всюду на отрезке $-L/2 \le x \le L/2$.

Возможен иной путь точного учета взаимного влияния колебаний оболочки и упругой среды внутри нее. Для этого следует разложить в ряд по функциям $\{v_n(x)\}$ функцию Грина $u_r(x, x_0)$, определяемую всем выражением (13)

$$u_r(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{rn}(x_0)\,v_n(x), \quad (21)$$

где коэффициенты $u_{rn}(x_0)$ имеют вид

$$u_{rn}(x_0) = \frac{\varepsilon}{L}\left\{ \alpha_1 \int_x^{L/2} \sin[\nu(x - x_0)]\,v_n(x)dx + \right. \\ + \alpha_2 \int_{x_0}^{L/2} \mathrm{sh}[z(x - x_0)]\,v_n(x)dx - \\ - \alpha_3 \int_{x_0}^{L/2} \mathrm{sh}[z^*(x - x_0)]\,v_n(x)dx + \\ \left. + \sum_{j=1}^{6} C_j \int_{-L/2}^{L/2} e^{z_j x} v_n(x)dx + \psi_n p_n(x_0) L/\varepsilon \right\}. \quad (22)$$

Здесь α_1, α_2, α_3 – дроби перед функциями в первой скобке правой части (13), а

$$\psi_n = gR^2 I_0(\nu_n R)\,(b_4 + b_5\,(n\pi/L)^2) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{(\nu^2 + z^2)\,(\nu^2 + z^{*2})\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \nu^2\right]} + \right. \\ \left. + 2\mathrm{Re}\,\frac{1}{(\nu^2 + z^2)\,(z^2 - z^{*2})\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + z^2\right]} \right\}.$$

Используя точное соотношение

$$p_n(x_0) = \frac{\omega^2\rho u_{2n}(x_0)}{\nu_n I_0'(\nu_n R)},$$

находим представление коэффициентов $p_n(x_0)$ через совокупность коэффициентов C_j:

$$p_n(x_0) = \frac{\omega^2\rho\left[u_{rn1}(x_0) + \sum_{j=1}^{6} C_j u_{rnj}\right]}{\nu_n I_0'(\nu_n R) - \omega^2\rho\psi_n}, \quad (23)$$

где $u_{rn1}(x_0)$ – сумма первых трех членов в правой части выражения (22); $u_{rnj} = \varepsilon/L \int_{-L/2}^{L/2} e^{z_j x} v_n(x)dx$.

Вместо выражения (13) теперь можем записать

$$u_r(x, x_0) = 1(x-x_0)\{\alpha_1 \sin[\nu(x-x_0)] + \alpha_2 \operatorname{sh}[z(x-x_0)] - \alpha_3 \operatorname{sh}[z^*(x-x_0)]\} + \sum_{j=1}^{6} C_j \left\{ e^{zx} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^2 \rho \psi_n u_{rnj}}{\nu_n I_0'(\nu_n R) - \omega^2 \rho \psi_n} \times \cos\left[\frac{n\pi}{L}(x+L/2)\right] \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^2 \rho \psi_n u_{rn1}(x_0)}{\nu_n I_0'(\nu_n R) - \omega^2 \rho \psi_n} \cos\left[\frac{n\pi}{L}(x+L/2)\right]. \quad (24)$$

Остается лишь воспользоваться условиями на краях трубы $x = \pm L/2$ при учете соотношения (4) с тем,чтобы определить коэффициенты $C_j = C_j(x_0)$, $j = 1, \ldots, 6$. При $\rho = 0$, очевидно, $C_j(x_0) = C_{j\text{в}}(x_0)$, а $u_r(x, x_0) = u_{r\text{в}}(x, x_0)$. Влияние упругой среды, кроме последних двух членов в (24), учитывается также путем изменения коэффициентов $C_j(x_0)$ по сравнению с $C_{j\text{в}}(x_0)$. Формально это достигается за счет изменения правых частей в конечной системе алгебраических уравнений относительно $C_j(x_0)$ и возмущения матричных элементов этой системы. Определив коэффициенты $C_j(x_0)$, коэффициенты $p_n(x_0)$ находим согласно формуле (23).

Отметим, что знание функции Грина колебаний оболочки с учетом реакции среды $u_r(x, x_0)$ не дает возможности определения в замкнутой форме смещения $u_r(x)$ в случае произвольной заданной осесимметричной нагрузки $f(x)$. Причина этого состоит в том, что звуковое давление $p(x, r)$ зависит от характера нагрузки $f(x)$. Если $f(x)$ задана, то для смещения $u_r(x)$ можем записать

$$u_r(x) = \frac{1}{F_0} \int_{-L/2}^{L/2} u_{r\text{в}}(x, x_0)\,[f(x_0) - p(x_0, R)]\,dx_0, \quad (25)$$

где $p(x, R)$ – искомое давление при $r = R$, определяемое выражением (8), в котором вместо коэффициентов $p_n(x_0)$ следует ввести коэффициенты $p_n = p_n[f(x)]$. Эти последние могут быть определены по изложенному выше алгоритму, приводящему к системе (18) при соответствующем изменении ее правой части. При этом необходимо предварительно определить все шесть коэффициентов $C_{j\text{в}}(x_0)$.

Рассмотрим теперь специальный случай внешней осесимметричной нагрузки $f(x)$, обладающей свойством $f(x) = f(-x)$. При этом в рамках рассматриваемой задачи звуковое давление $p(r, x)$ записывается в форме ряда (7), где коэффициенты p_n суть константы для каждого конкретного характера нагрузки, а для коэффициентов C_j вне зависимости от этого характера справедливы соотношения:

$$C_1 = C_2 = \bar{C}_1, \quad C_3 = C_4 = \bar{C}_2, \quad C_5 = C_6 = \bar{C}_3. \quad (26)$$

Пусть, для простоты, нагрузка $f(x) = \text{const} = 1$ в пределах $-L/2 \le x \le L/2$. Тогда $F(x) = gR^2[1 - p(x, R)]$ и уравнение (3) записывается в виде

$$Lu_r = gR^2 b_4 - gR^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n' \cos\gamma_n x, \quad (27)$$

где $B_n' = p_n I_0(\nu_n R)\,[b_4 + b_5\gamma_n^2]$, $\gamma_n = \dfrac{2n\pi}{L}$.

В силу свойства (26) уравнение (27) удобно решать не с помощью интегрального представления (25), а непосредственно, например, методом неопределенных коэффициентов. В результате находим

$$u_r(x) = -\frac{gR^2}{\Omega + \beta - \sigma^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n p_n \cos\gamma_n x + 2\bar{C}_1 \cos\nu x + \bar{C}_2 (e^{zx} + e^{-zx}) + \bar{C}_3 (e^{z^* x} + e^{-z^* x}), \quad \gamma_n \ne \nu, \quad (28)$$

где $\varphi_n = \dfrac{gR^2 I_0(\nu_n R)\,(b_4 + b_5\gamma_n^2)}{\gamma_n^6 + b_1\gamma_n^4 + b_2\gamma_n^2 - b_3}$.

Разложим эту функцию $u_r(x)$ в ряд

$$u_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{rn} \cos\gamma_n x, \quad (29)$$

где $u_{rn} = \dfrac{\varepsilon_n}{L} \int_{-L/2}^{L/2} u_r(x) \cos\gamma_n x\,dx$.

Важно отметить, что разложение (29) по собственным функциям трубы с жесткими торцами, равно как и эквивалентные ему разложения (16) и (21), сходится к $u_r(x)$ равномерно всюду, включая точки $x = \pm L/2$, в силу непрерывности $u_r(x)$ на $[-L/2, L/2]$ и выполнения условия $du_r(\pm L/2)/dx = 0$, аналогичного граничному условию краевой задачи, порождающей используемые собственные функции [9].

Сопоставляя выражения (7) и (29) и используя граничное условие при $r = R$, приходим к соотношению, эквивалентному соотношению (23), связывающему коэффициенты p_n с коэффициентами $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$. Подставляя указанное соотношение в решение (28), находим:

$$u_r(x) = -\frac{gR^2}{\Omega + \beta - \sigma^2}\delta + \bar{C}_1 \left[2\cos\nu x + \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{u_{rn}' \cos\gamma_n x}{\chi_n - 1} \right] + \bar{C}_2 \left[e^{zx} + e^{-zx} + \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{u_{rn}'' \cos\gamma_n x}{\chi_n - 1} \right] + \bar{C}_3 \left[e^{z^* x} + e^{-z^* x} + \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{u_{rn}''^* \cos\gamma_n x}{\chi_n - 1} \right], \quad (30)$$

где $\chi_n = \dfrac{\nu_n I_0'(\nu_n R)}{\varphi_n \omega^2 \rho}$, $\delta = \dfrac{\chi_0}{\chi_0 - 1}$,

$$u'_{rn} = (-1)^n \frac{\nu L^2}{\left(\frac{\nu L}{2}\right)^2 - (n\pi)^2} \sin\frac{\nu L}{2},$$

$$u''_{rn} = (-1)^n \frac{2z}{z^2 + \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2} \left(e^{z\frac{L}{2}} - e^{-z\frac{L}{2}}\right).$$

Так как в рассматриваемом случае, очевидно, $u_r(x)$ – вещественная функция, то из соотношения (30) непосредственно следует, что $\bar{C}_3 = \bar{C}_2^*$. При отсутствии среды внутри оболочки, т.е. при $\rho = 0$, вместо (30) имеем

$$u_{r\text{в}}(x) = -\frac{gR^2}{\Omega + \beta - \sigma^2} + 2\bar{C}_{1\text{в}}\cos\nu x + 2\mathrm{Re}\{\bar{C}_{2\text{в}}(e^{zx} + e^{-zx})\}. \quad (31)$$

Коэффициенты $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ (или $\bar{C}_{1\text{в}}$, $\bar{C}_{2\text{в}}$) определяем из граничных условий закрепления краев оболочки, например, при $x = L/2$, $r = R$. Они вычисляются по формулам Крамера

$$\bar{C}_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad \bar{C}_{j\text{в}} = \frac{\Delta_{j\text{в}}}{\Delta_{\text{в}}}, \quad j = 1, 2,$$

где основные определители Δ и $\Delta_{\text{в}}$ соответствующих систем алгебраических уравнений имеют вид:

$$\Delta = \left[\cos\nu\frac{L}{2} + \delta_1\right][\psi_1\psi_2^* - \psi_1^*\psi_2] +$$

$$+ \Phi\left(\nu\frac{L}{2}\right)[\psi\psi_1^* - \psi^*\psi_1] + \nu\sin\nu\frac{L}{2}[\psi\psi_2^* - \psi^*\psi_2];$$

$$\Delta_{\text{в}} = \cos\nu\frac{L}{2}[\psi_1\psi_2^* - \psi_1^*\psi_2] +$$

$$+ \Phi(\nu\frac{L}{2})[\psi_{\text{в}}\psi_1^* - \psi_{\text{в}}^*\psi_1] + \nu\sin\nu\frac{L}{2}[\psi_{\text{в}}\psi_2^* - \psi_{\text{в}}^*\psi_2],$$

где $\psi = \psi_{\text{в}} + \delta_2$,

$$\delta_1 = \frac{1}{2L}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\frac{(-1)^n u'_{rn}}{\chi_n - 1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2L}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\frac{(-1)^n u''_{rn}}{\chi_n - 1},$$

$$\Phi\left(\nu\frac{L}{2}\right) = 2\sin\nu\frac{L}{2}\left[\mu_1\nu^3 + \mu_2\nu - \frac{\mu_3}{\nu}\right],$$

$$\psi_{\text{в}} = \frac{1}{2}\left(e^{z\frac{L}{2}} + e^{-z\frac{L}{2}}\right), \quad \psi_1 = \frac{1}{2}z\left(e^{z\frac{L}{2}} - e^{-z\frac{L}{2}}\right),$$

$$\psi_2 = \left(e^{z\frac{L}{2}} - e^{-z\frac{L}{2}}\right)\left(\mu_1 z^3 - \mu_2 z - \frac{\mu_3}{z}\right).$$

При вычислениях учтено выражение (4). Уравнения $\Delta = 0$ и $\Delta_{\text{в}} = 0$ есть различные дисперсионные уравнения осесимметричных колебаний оболочки при учете реакции среды и в ее отсутствие соответственно, что указывает на различие в значениях собственных частот колебаний оболочки в этих двух случаях.

На рис. 2 представлена частотная зависимость отношения $|u_{r\text{в}}(0)/u_r(0)|$ для цилиндрической

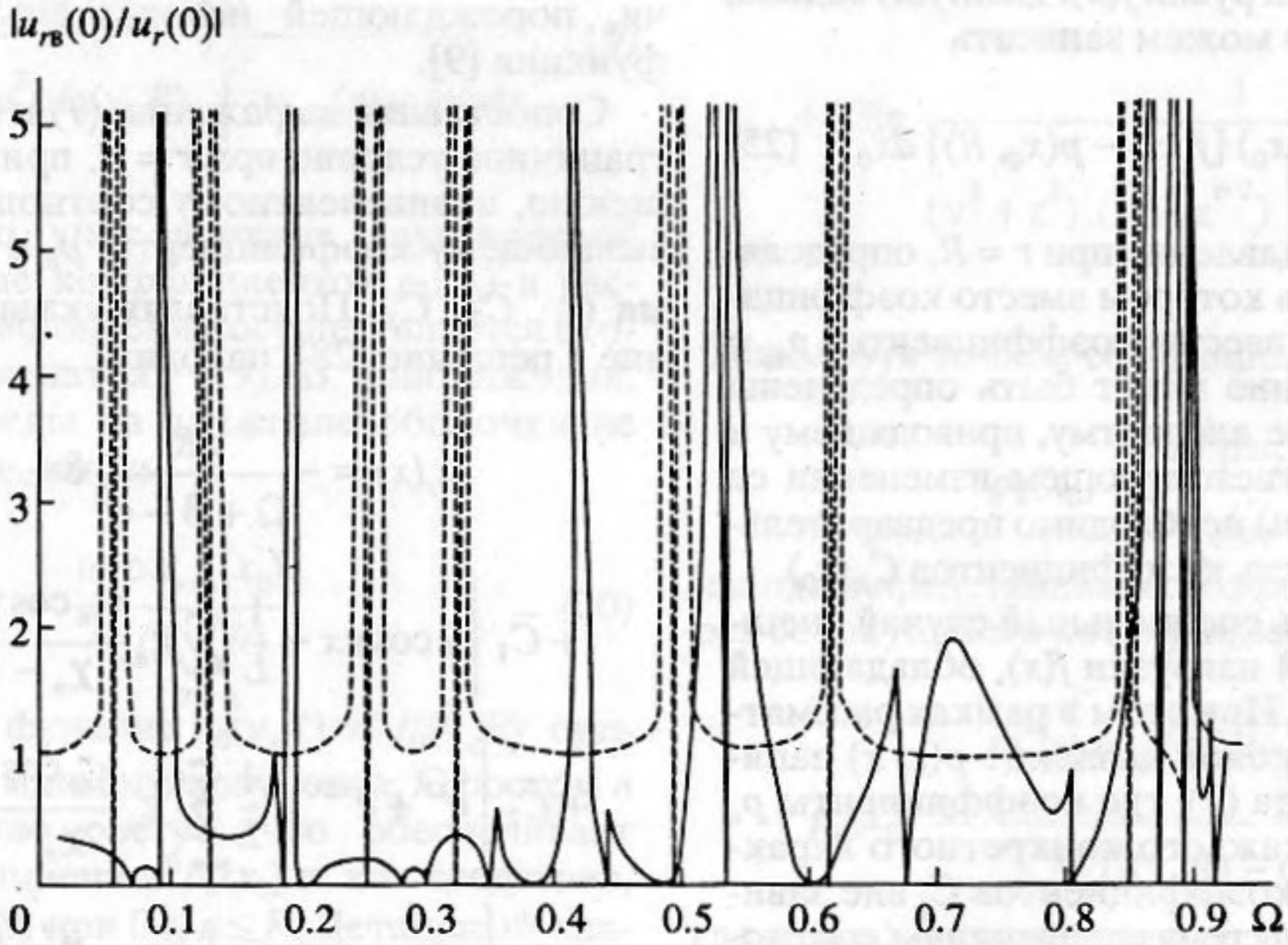

Рис. 2. Частотная зависимость величины $|u_{r\text{в}}(0)/u_r(0)|$.

оболочки со следующими параметрами: $\rho_м$ = = 7800 кг/м^3, $\sigma = 0.3$, $E = 2 \times 10^{11}$ н/м^2, $h/R = 0.01$, $L/R = 3$ при $f(x) = 1$. Ясно выраженными являются резонансные явления, распадающиеся на два различных вида: резонансы собственно оболочки конечной длины с заданными условиями на концах, зависящие от характера среды, и резонансы внутреннего объема оболочки, заполненного упругой средой. В последнем случае условием резонанса является выполнение равенства

$$\nu_n I_1(\nu_n R) + \omega^2 \rho \varphi_n = 0, n = 0, 1, 2, \ldots. \quad (32)$$

В случае неучета взаимодействия акустической среды и оболочки равенство (32) распадается на два независимые условия $\nu_n = 0$ и $I_1(\nu_n R) = 0$, что приводит к известной формуле для определения собственных частот колебаний цилиндрического объема f_{ni} с жесткими стенками:

$$f_{ni} = \frac{c}{2\pi}\left[\frac{(\pi\alpha_i)^2}{R^2} + \gamma_n^2\right]^{1/2}, \quad i, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\pi\alpha_i$ – корни уравнения $I_1(\nu_n R) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Бесконечным значениям отношения $|u_{rв}(0)/u_r(0)|$ соответствуют резонансы оболочки в вакууме ($\Delta_в = 0$) и ее антирезонансы, обусловленные реакцией среды, нулевым значениям – резонансы оболочки с учетом реакции среды ($\Delta = 0$) и резонансы внутреннего объема оболочки. Ясно видно, что для рассмотренного примера первая собственная частота колебаний оболочки в вакууме выше всех остальных характерных частот. В случае "легкой" акустической среды собственные частоты колебаний оболочки в этой среде и в вакууме практически совпадают. На рис. 2 частотная зависимость величины $|u_{rв}(0)/u_r(0)|$ для воды представлена сплошной линией, для "легкой" среды (воздуха) – пунктирной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Ционский А.Я., Юдин А.С.* Метод собственных форм решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки вращения, подкрепленной ребрами жесткости, в жидкости // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 6. С. 744 - 748.
2. *Chertock G.* Sound Radiation From Vibrating Surfaces // J. Acoust. Soc. Amer. 1964. V. 64. № 7. P. 1305 - 1313.
3. *Pope L.D., Leibowitz H.C.* Intermodal Couplung Coefficients for a Fluid-Loaded Rectangular Plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1977. V. 56. № 2. P. 408 - 415.
4. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.
5. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
6. *Миниович И.Я., Перник А.Д., Петровский В.С.* Гидродинамические источники звука. Л.: Судостроение, 1972.
7. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1959.
8. *Бернблит М.В.* Интегральный метод расчета акустического излучения сложных колебательных систем в жидкости // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 6. С. 1075 - 1081.
9. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.: ГИФМЛ, 1960.

Axially Symmetric Oscillations of a Finite Length Cylindrical Shell with Allowance for Internal Medium Response

E. P. Babailov

The problem of axially symmetric oscillations of an elastic cylindrical shell of finite length under the action of external forces is treated, taking into account the reaction of the medium inside the shell. A method for the exact incorporation of the interaction between the oscillating shell and the acoustic field under various conditions at the tube's ends in the case where its edges are rigidly fastened is presented.