4. *Temkin S.* Nonlinear gas oscillations in a resonant tube//Phys. Fluids. 1964. V. 11. No. 5. P. 960—964.
5. *Галиев Ш. У., Ильгамов М. А., Садыков А. В.* О периодических ударных волнах в газе//Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 2. С. 58—66.
6. *Chon K. U., Lee P. S., Show D. T.* Turbulence measurement in a resonance tube//J. Sound and Vibr. 1983. V. 86. No. 4. P. 475—483.
7. *Оми М., Игути М.* Нестационарное течение в трубопроводах//Нихон кикай гаккай ромбунсю. Сер. В. 1982. Т. 48. № 430. С. 981—987.
8. *Галиуллин Р. Г., Пермяков Е. И.* Влияние турбулентности на колебания газа большой амплитуды в полуоткрытой трубе//Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 1. С. 25—28.
9. *Репин В. Б., Новиков Ю. Н., Дементьев А. П.* Экспериментальное исследование нелинейных колебаний газа в открытой трубе//Нестационарные задачи механики. Вып. 22. Казань: Изд-во КФТИ КФАН СССР, 1989. С. 103—110.
10. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 424.
12. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 848 с.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило в редакцию
14.10.92

УДК 534.26

© 1993 г. Д. А. Касьянов

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИИ ГРИНА КОЛЬЦА

При решении акустических задач дифракции на протяженных апертурах с цилиндрической симметрией часто возникают существенные трудности с аналитическим описанием полей в различных областях дифракции (см., например, [1]). Решение подобных задач можно значительно упростить, зная хотя бы приближенные, но достаточно простые представления функций Грина задач в данных областях. Ниже получены наглядные приближенные выражения Ф. Г. К. в ближней и дальней зонах дифракции. Под ближней зоной понимается приближение $(z - z')^2 + (r - r')^2 \to 0$, под дальней $[4rr'/((z - z')^2 + (r - r')^2)] << 1$, где z, r, z', r' — цилиндрические координаты точек наблюдения и источника соответственно. Зоны эти вводятся безотносительно волнового параметра и включают в себя канонические зоны дифракции Френеля и Фраунгофера.

Представим Ф. Г. К. как результат интегрирования функции Грина точечного источника $[\exp(\mp ikR)]/4\pi R$, записанной в цилиндрической системе координат, по угловой координате φ в пределах от 0 до 2π:

$$\text{Ф.Г.К.} = (1/4\pi) \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\mp ik\sqrt{(z - z')^2 + r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\varphi}\right)}{\sqrt{(z - z')^2 + r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\varphi)}}\, d\varphi, \tag{1}$$

где k — модуль волнового вектора.

В литературе встречаются иные представления Ф. Г. К. [2—4], все они и выражение (1) связаны достаточно тривиально.

Некоторые сведения об интеграле (1) можно почерпнуть в [5].

В работе [4] найдены точные представления (1) в виде вырожденных гипергеометрических функций двух переменных Ξ_2, H_3, H_{10}, прямое использование которых при решении конкретных задач дифракции затруднено крайней неразвитостью теории гипергеометрических функций двух переменных.

Тем не менее, используя некоторые точные представления интеграла (1), можно получить приближенные выражения для Ф. Г. К., пригодные для решения многих физических задач [6].

Представим, к примеру, (1) интегралом гипергеометрического вида

$$\text{Ф.Г.К.} = (1/2\pi) \int_0^1 t^{-1/2}(1 - t)^{-1/2} \frac{\exp\left(\mp ik\sqrt{(a - b)\left(1 + \frac{2b}{a - b}\right)}\right)}{\sqrt{(a - b)\left(1 + \frac{2b}{a - b}t\right)}}\, dt. \tag{2}$$

Здесь введены обозначения: $a = (z - z')^2 + r^2 + r'^2$, $b = 2rr'$.

Переход между выражениями (1) и (2) несложен (см. [4, 5]).

Первое приближение, охватывающее широкий круг нужд вычислителя,— это приближение по параметру $(2b/(a - b)) << 1$ в реальных переменных $[4rr'/((z - z')^2 + (r - r')^2)] << 1$, причем k предполагается произвольным. Разложим $\sqrt{1 + (2b/(a - b))t}$ в показателе экспоненты и в знаменателе подынтегрального выражения в (2) в степенные ряды, возьмем по два первых члена этих разложений, после интегрирования получим следующую формулу:

$$\text{Ф.Г.К.} \sim \frac{\exp(\mp ik\sqrt{a-b})}{\sqrt{a-b}} \Big[{}_1F_1\Big(1/2;\, 1;\, \pm \frac{ikb}{\sqrt{a-b}}\Big) - \frac{b}{2(a-b)}\, {}_1F_1\Big(3/2;\, 2;\, \mp \frac{ikb}{\sqrt{a-b}}\Big) \Big], \tag{3}$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера — при данных индексах ее легко выразить через произведение экспоненциальной и бесселевых функций.

Главный член в (3) можно записать в виде

$$\frac{\exp(\mp ik\sqrt{a-b})}{2\sqrt{a-b}} \exp\Big(\mp \frac{ikb}{2\sqrt{a-b}}\Big) J_0\Big(\frac{kb}{2\sqrt{a-b}}\Big), \tag{4}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Можно получить достаточно простое по форме приближенное значение Ф. Г. К. в ближней зоне при условии $a \to b$ (в реальных переменных $((r-r')^2 + (z-z')^2 \to 0)$. Нетрудно видеть, что выражение (1) можно представить тождественным ему рядом [4, 5]:

$$\text{Ф.Г.К.} = (1/2) \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n}}{(2n)!} (a^2-b^2)^{n/2-1/2} P_{n-1/2}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\Big) \mp \mp i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n+1}}{(2n+1)!} (a^2-b^2)^{n/2} P_n\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\Big) \Big], \tag{5}$$

где $P_{n-1/2}$ — функция тора первого рода, порядка $n - 1/2$; P_n — полином Лежандра, порядка n.

Выражение (4) обладает интересной особенностью: стремление Ф. Г. К. к бесконечности (при $a \to b$) описывается лишь одним членом первой суммы в (4). Выделив этот член, просуммируем оставшиеся ряды с помощью известных асимптотик функции Лежандра, при этом получим:

$$\text{Ф.Г.К.} \xrightarrow[a \to b]{} \sqrt{\frac{2}{a+\sqrt{a^2-b^2}}}\, K\Big(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}}\Big) - \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{k\sqrt{a}} H_0(2t)\, dt \mp \frac{i}{2\sqrt{a}} \int_0^{k\sqrt{a}} J_0(2t)\, dt, \tag{6}$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода, H_0 — функция Струве нулевого порядка.

Итак, получены приближенные выражения для Ф. Г. К. при условиях $a \to b$ — (6); $(2b/(a - b)) << 1$ — (3), что дает возможность решать задачи в областях более широких, чем стандартные области дифракции Френеля или дифракции Фраунгофера. Дело в том, что при выводе формул (3) и (6) не накладывалось каких-либо ограничений на соотношение длины волны с параметрами a и b.

Кстати, формулы (3) и (6) имеют самостоятельное значение в модельной дифракционной задаче излучения бесконечно тонкого кольца. Рэлеем [7] была определена формула, описывающая излучение такого кольца в зоне Фраунгофера, ставшая настолько классической, что на автора перестали ссылаться. Из выражения, представленного в данной работе, так как оно более общее, можно без труда получить то, которое было выведено классиком. Надо в формуле (3) пренебречь множителем $\exp(\mp ikb/2\sqrt{a-b})$ и членом порядка $b/(2(a-b))$, которые здесь оказываются поправками к рэлеевской формуле.

Выражение (6) также можно приблизить к более знакомому виду, достаточно взять асимптотики функций J_0 и H_0 при $k\sqrt{a} >> 1$, и получаются привычные интегралы Френеля, появляющиеся там, где рассматривается область дифракции Френеля в задачах дифракции на какой-либо границе.

Далее воспользуемся представлением интеграла (1) в виде ряда по гипергеометрическим функциям Гаусса, используя хорошо развитую теорию представления этих функций, общий член получившегося ряда можно записать в виде присоединений функции Лежандра второго рода. При использовании вместо функции Лежандра ее стандартной асимптотики при большом значении аргумента, что эквивалентно в данном случае выполнению условия $4rr'/((r-r')^2 + (z-z')^2) << 1$, ряд тривиально суммируется, в результате получаем следующее выражение:

$$\text{Ф.Г.К.} \sim (1/2) \frac{\exp\Big[\mp ik\sqrt{(r-r')^2+(z-z')^2}\, \sqrt[4]{1+4rr'/((r-r')^2+(z-z')^2)}\Big]}{\sqrt{(r-r')^2+(z-z')^2}}. \tag{7}$$

В представлении (7) сохранены именно цилиндрические свойства Ф. Г. К. Действительно, в выражении (7) можно ввести новое обозначение $\tilde{k} = k\sqrt[4]{1 + 4rr'/((r-r')^2 + (z-z')^2)}$, что означает введение слабой зависимости длины волны $\tilde{\lambda}$ от координат таким образом, что $\tilde{\lambda}$ с удалением от точки наблюдения увеличивается, асимптотически стремясь к λ плоской волны. Рассматривать это можно, как трансляцию свойств цилиндрических функций, у которых, как известно, расстояние между соседними корнями увеличивается с увеличением номеров этих корней, асимптотически стремясь к π.

Представление же (3) близко к тороидальной геометрии, и, очевидно, что приближенные выражения для Ф. Г. К. (3), (4) и (7) должны использоваться с соотношением характерных размеров апертуры (по координате $z-h$, по координате $r-d$) типа $kh \le kd$, (7) в задачах с соотношением $kh >> kd$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Willims W., Parke N. G., Moran D. A., Sherman C. H.* Acoustical radiation from a finite cylinder// J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 41. № 4. P. 807—816.
2. *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн/Пер. с англ. М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1956. 180 с.
3. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2/Пер. с анг. М.: Мир, 1956. 544 с.
4. *Касьянов Д. А.* Функция Грина кольца и гипергеометрические функции двух переменных: Препринт № 297. Горький: НИРФИ, 1990. 28 с.
5. *Васильев Е. Н.* Об одной функции встречающейся в теории дифракции//ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. С. 841—852.
6. *Касьянов Д. А.* О функции Грина кольца//Волны и дифракция-90. М.: Физическое общество. 1990. Т. 1. С. 250—253.
7. *Стретт Дж. В.* (лорд Рэлей). Волновая теория света/Пер. с англ. М.—Л.: ГИТТЛ, 1940. 207 с.

Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт

Поступило в редакцию 01.07.91
После исправления 04.12.92

УДК 534

© 1993 г. Е. Я. Коган, Н. Е. Молевич

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ В НЕРАВНОВЕСНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОМ ГАЗЕ

Известно, что в средах с аномальными термодинамическими свойствами, такими, что вторая производная от давления по объему при постоянной энтропии

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S < 0, \tag{1}$$

возможно существование ударных волн (УВ) разрежения [1, 2]. При условии (1) эти волны эволюционно устойчивы и удовлетворяют требованию положительного скачка энтропии

$$\Delta S = \frac{1}{12T_0}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S \Delta P^3, \tag{2}$$

где T_0 — температура среды перед УВ.

Эволюция малых финитных газодинамических возмущений описывается уравнением Бюргерса

$$u_y + \psi u u_\xi = \nu u_{\xi\xi}, \tag{3}$$

где u — возмущение скорости, ψ — коэффициент нелинейности, ν — диссипативный коэффициент. Для газа

$$\nu = \frac{\mu}{2\rho_0} + \frac{2\eta}{3\rho_0} + \frac{\chi}{2\rho_0}\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right), \tag{4}$$

где χ, μ, η — коэффициенты теплопроводности, второй (объемной) и сдвиговой вязкости; ρ_0 — стационарная плотность среды; C_V, C_P — теплоемкости газа при постоянном объеме и давлении.

Коэффициент нелинейности для равновесного политропного газа

$$\psi = \frac{u_S^4}{2V^3}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S = \frac{(\gamma+1)}{2} > 0, \tag{5}$$