Помимо резонансных колебаний на частоте этой волны [9] возникает также аномальное поглощение ПЛБ слоем акустической волны [10].

Полученные результаты позволяют также сделать вывод, что с помощью современных сенсорных акустических датчиков на ПАВ можно с большой точностью измерять независимо такие параметры пленок Ленгмюра — Блоджетт, как поверхностная плотность слоя ρ_S и упругий модуль $\tilde{h}_{66}$. По измерению скорости поверхностной волны для слабосвязанного ПЛБ слоя имеем $\tilde{h}_{66} = V_S^2\rho_S$, $\tilde{h}_{66} = h_{66} + g_1$, а по относительному изменению скорости сдвиговой волны V в случае сильной связи $\rho_S = \rho V_0(2\Delta V/V_0)^{1/2}/\omega(1 - V_S^2/V_0^2)$.

Отметим, что случаи сильной и слабой связи могут реализовываться для одного и того же монослоя Ленгмюра — Блоджетт в зависимости от способа нанесения слоя на подложку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Плесский В. П.* Устройства на поверхностных акустических волнах, включающие пленки Ленгмюра — Блоджетт // Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 3. С. 421—430.
2. *Курач Т. Н., Науменко Н. Ф., Плесский В. П.* Датчиковые срезы ниобата лития и кварца // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 3. С. 561—563.
3. *Курочкин И. Н., Попов Б. Н., Чернов С. Ф.* Физико-химические и физические принципы функционирования биосенсоров // Биол. мембр. 1980. Т. 7. № 10. С. 1068—1080.
4. *Косевич Ю. А., Сыркин Е. С.* Макроскопическая динамика поверхности кристалла с адсорбированным монослоем // ФТТ. 1989. Т. 31. № 7 С. 127—134.
5. *Bordieu L., Silberzan P., Chatenay D.* Langmuir — Blodgett Films: From micron to angstrom // Phys. Rev. Letters. 1991. V. 67. № 15. P. 2029—2032.
6. *Nizzoli F., Hillerbrands B., Lee S. et al.* // Mater. Sci. Engineer. 1990. V. B5. P. 173—176.
7. *Гевод В. С., Ксенжек О. С., Решетняк И. Л.* Искусственные мембранные структуры и перспективы их практического применения // Биол. мембр. 1988. Т. 15. № 12. С. 1235—1269.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. С. 204.
9. *Сыркин Е. С., Гельфгат И. М.* Низкотемпературные колебательные характеристики поверхностных атомов при наличии слабосвязанного примесного слоя // ФНТ. 1986. Т. 12, № 5. С. 525—529.
10. *Косевич Ю. А.* Аномальное поглощение акустической волны двумерным адсорбированным слоем на поверхности твердого тела // ФТТ. 1991. Т. 33. С. 2598—2600.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук Украины

Поступило в редакцию
17.08.92
После исправления
28.12.92

УДК 532.517.4 : 534.213

© 1993 г. Р. Г. Галиуллин, Е. И. Пермяков

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ЗАКРЫТОЙ ТРУБЕ В СЛУЧАЕ ТУРБУЛИЗАЦИИ ТЕЧЕНИЯ

Задача о резонансных колебаниях газа в трубах — резонаторах представляет интерес ввиду широкого распространения таких колебаний в различных технических устройствах. Обычно рассматриваются колебания, возбуждаемые гармонически движущимся плоским поршнем на одном из концов трубы. Известно, что в случае закрытой с обоих концов трубы, при $\pi\sqrt{2\Sigma}\,|\omega - \omega_0|L|\,c_0 \le 4$, где $\Sigma = l_p/L$ — отношение длины образования разрыва $l_p = 2c_0^2/(\varkappa + 1)\omega u_1$ к длине трубы L, колебания становятся разрывными [1] (здесь ω — угловая частота колебаний, c_0 — скорость звука в невозмущенном газе, $\varkappa = c_p/c_v$, $u_1 = \omega l$, l — амплитуда смещения поршня, $\omega_0 = \pi c_0 n/L$, $n = 1, 2, \ldots$ — ближайшая к ω резонансная частота). В работах [1—5] и ряде других работ такие колебания исследовались теоретически и экспериментально. В [1, 3—5] показано, что основным диссипативным механизмом, ограничивающим амплитуду резонансных колебаний, является образование ударных волн. Однако в [2] обнаружено, что получающаяся экспериментальная зависимость амплитуды u_m^* установившихся колебаний, измеренной в пучности скорости, от длины трубы для длинных труб отличается от зависимости $u_m^* \sim L^{-0,5}$, которая следует из результатов [3—5].

Кроме того, теории [1, 3—5] (и другие) не учитывают возможность турбулизации течения, в то время как турбулентное течение в закрытой резонансной трубе наблюдалось экспериментально [6]. Из результатов обзора [7] следует, что колеблющиеся потоки в гладких трубах турбулизуются при условии

$$\bar{u}_m \gtrsim 565H/\mathrm{Re}_0, \tag{1}$$

где $\bar{u}_m = u_m/c_0$, u_m — амплитуда колебаний скорости в данном сечении трубы, $H = R(\omega/2\nu)^{1/2}$ —

частотный параметр, R — радиус трубы, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\mathrm{Re}_0 = c_0R/\nu$. Оценка показывает, что в экспериментах [2] условие (1) выполнено с большим запасом.

Таким образом, для расширения рамок применимости теории необходимо рассматривать колебания турбулентных потоков. Ранее такой анализ был проделан для случая трубы, открытой с одного конца [8]. Предложенная модель турбулентности позволила объяснить экспериментальную зависимость $\bar{u}_m^*(L)$, полученную в [9]. В данной работе подобный анализ проводится для случая закрытой резонансной трубы.

Запишем уравнения, выведенные в [10] для осредненных по сечению трубы величин:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\lambda\rho}{4R}u\,|u| + \frac{\partial}{\partial x}[(1+\beta)\rho u^2],$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa}. \tag{2}$$

Здесь λ — коэффициент гидравлического сопротивления, β — поправка, учитывающая профиль скорости: $\beta = 1/3$ для параболического и $\beta \approx 0$ для логарифмического профилей. Получить решение системы (2) сложно, поэтому воспользуемся уравнением баланса энергии [2, 4]. Такой подход позволяет получить правильные значения для амплитуды колебаний. Все рассмотрение в дальнейшем проводим для случая первого резонанса: $\omega_0 = \pi c_0/L$.

Уравнение энергетического баланса имеет вид [4]:

$$\langle\dot{E}_p\rangle = \langle\dot{E}_s\rangle + \langle\dot{E}_t\rangle, \tag{3}$$

где $\langle\dot{E}_p\rangle$ — средняя энергия, сообщаемая газу поршнем за период, $\langle\dot{E}_s\rangle$ — энергия, отбираемая ударной волной, $\langle\dot{E}_t\rangle$ — потери энергии за счет турбулентного трения.

Энергию единицы объема газа, сообщаемую ей поршнем за период, можно найти по формуле $\langle\dot{E}_p\rangle = \langle pu_p\rangle/L$, где u_p — скорость поршня. Положим, что смещение поршня $\xi_p = l\cos\omega t$. Для давления вблизи поршня используем аппроксимацию [2]:

$$p = p_0 - \rho_0 c_0^2 \bar{u}_m^* \sin(\omega t/2) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T/2,$$

$$p = p_0 + \rho_0 c_0^2 \bar{u}_m^* \sin(\omega t/2) \quad \text{при} \quad T/2 \le t \le T$$

(T — период колебаний). В результате получаем

$$\langle\dot{E}_p\rangle = \frac{4}{3}\rho_0 c_0^3\left(\frac{l}{L}\right)\frac{\bar{u}_m^*}{L}. \tag{4}$$

Средняя за период плотность энергии, затрачиваемая на образование ударных волн, вычислена в [4]:

$$\langle\dot{E}_s\rangle = \frac{1}{3}\rho_0 c_0^3(\varkappa+1)\frac{\bar{u}_m^3}{L}. \tag{5}$$

Для дальнейших вычислений необходимо линеаризовать второе слагаемое в правой части первого уравнения (2), описывающее турбулентные потери. Общепринятым является способ, при котором вместо отрезка параболы $(\lambda/4R)u^2$ берется отрезок прямой при условии равенства площадей под кривыми [10]. В результате имеем $(\lambda/6R)u_m u$. После проведенной линеаризации легко записать выражение для коэффициента затухания γ_t: $\gamma_t = \lambda\bar{u}_m/12R$ [8]. Далее воспользуемся формулой, полученной для коэффициента затухания в [11]: $\gamma_t = \langle\dot{E}_t\rangle/2c_0\langle E\rangle$ и тем фактом, что эта формула верна и в случае затухания за счет молекулярной вязкости и теплопроводности. Тогда после элементарных вычислений получаем: $\langle E_t\rangle = \langle E_L\rangle\gamma_t/\gamma_L$. Выпишем выражения для $\langle E_L\rangle$ и γ_L из [4] и результат для $\langle E_t\rangle$:

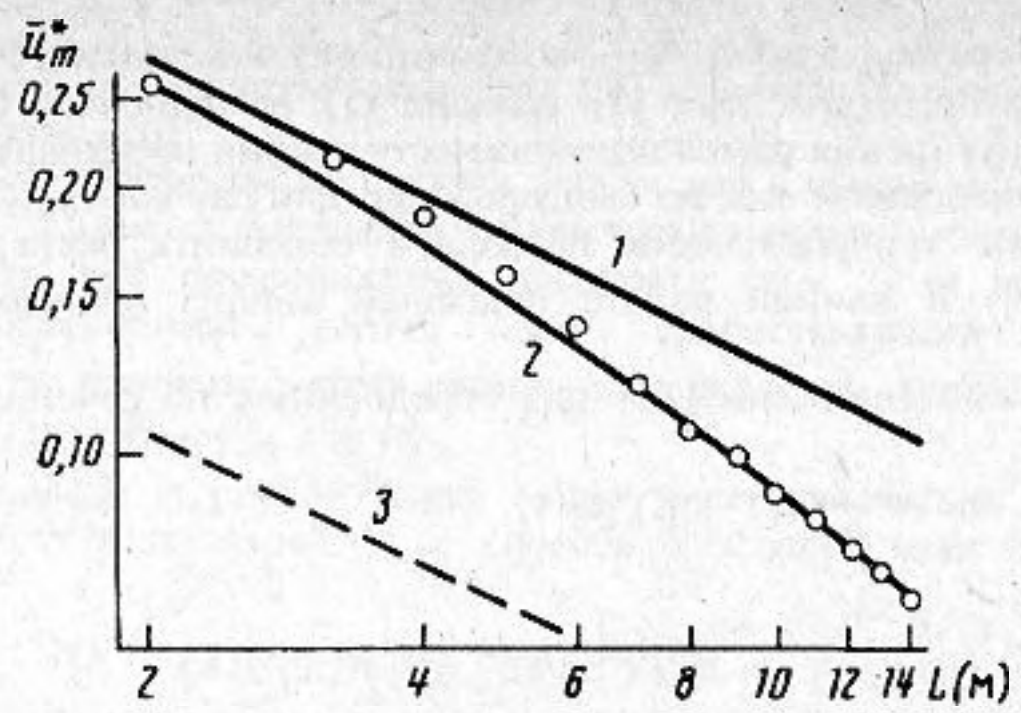
$$\langle\dot{E}_L\rangle = \gamma_L 2\rho_0 c_0^3\overline{u_m^2}, \quad \gamma_L = \frac{1}{Rc_0}\left(1 + \frac{\varkappa-1}{\sqrt{\mathrm{Pr}}}\right)\sqrt{\frac{\omega\nu}{2}}, \tag{6}$$

где Pr — число Прандтля;

$$\langle\dot{E}_t\rangle = \frac{1}{6}\rho_0 c_0^3\frac{\lambda}{R}\bar{u}_m^3. \tag{7}$$

В уравнение (3) справа должны входить величины, средние по длине трубы. Полагая распределение скорости по длине трубы пропорциональным $\sin(\pi x/L)$ и проводя усреднение в (5)—(7), получим

$$\langle\dot{E}_s\rangle = \frac{4}{9\pi}\rho_0 c_0^3(\varkappa+1)\bar{u}_m^{*3}, \quad \langle\dot{E}_t\rangle = \frac{2}{9\pi}\rho_0 c_0^3\frac{\lambda}{R}\bar{u}_m^{*3}, \tag{8}$$



Теоретические и экспериментальные зависимости $\bar{u}_m^*(L)$ *1* — учет образования ударных волн; *2* — учет ударных волн и турбулентного трения; *3* — граница турбулизации по (1)

$$\langle \dot{E}_L \rangle = \rho_0 c_0^3 \gamma_L \bar{u}_m^{*2} . \tag{9}$$

Для проведения количественных вычислений необходима зависимость $\lambda(\bar{u}_m^*, H)$. В работе [8] такая зависимость имела вид $\lambda = C(Z)\lambda_s$, где $Z = 4R\omega/\lambda_s u_m^*$, $\lambda_s(\mathrm{Re}_k)$ — стационарное значение коэффициента гидравлического сопротивления, вычисленное по колебательному числу Рейнольдса $\mathrm{Re}_k = 2u_m^* R/\nu$. К сожалению, из данных, имеющихся в литературе, явный вид $C(Z)$ можно приблизительно установить лишь для $Z \lesssim 12$ [8], в то время как в экспериментах [2] $Z \sim 80$—30. (Причем вдоль экспериментальной кривой при $L > 6$ м и Z меняется незначительно.) В [7] показано, что при $H > 20$ турбулентность можно считать квазистационарной. Так как в условиях [2] $H \sim 169$—64, то положим $\lambda = \lambda_s$. Для λ_s принимаем закон Блазиуса для гладкостенных труб: $\lambda_s = 0{,}316\,(2\,\mathrm{Re}_0)^{-1/4}\,\bar{u}_m^{*-1/4}$ [12]. Подставляя в (3) выражения (4), (8), получаем

$$\bar{u}_m^* = \sqrt{\frac{6\pi\,(l/L)}{\lambda L/R + 2\,(\varkappa + 1)}} . \tag{10}$$

На рисунке даны зависимости $\bar{u}_m^*(L)$, полученные экспериментально в [2] (точки) и (10) — *2*, *1* получена из (10) при $\lambda_s = 0$, *3* изображает границу турбулизации течения по (1). Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов следует, что турбулентные потери начинают играть роль при увеличении длины трубы. Для условий эксперимента [2] ($R = 0{,}04$ м, $2l = 0{,}078$ м) вплоть до $L = 5$ м $\bar{u}_m^* \sim L^{-0{,}5}$, т. е. достаточно учитывать лишь образование ударных волн, а при $L \geq 6$ м учет турбулентного трения становится необходим.

В работах [2, 4] при изучении резонансных колебаний в закрытой трубе наряду с образованием ударных волн принимались во внимание потери на трение в ламинарном погранслое. В этом случае, подставляя вместо $\langle \dot{E}_l \rangle$ в (3) $\langle \dot{E}_L \rangle$ из (9), получим

$$\bar{u}_m^* = \left\{ \left[\frac{9\pi L \gamma_L}{8\,(\varkappa + 1)} \right]^2 + \frac{3\pi}{\varkappa + 1} \left(\frac{l}{L} \right) \right\}^{1/2} - \frac{9\pi L \gamma_L}{8\,(\varkappa + 1)} . \tag{11}$$

Заметим, что выражения (10), (11) при $\gamma_l, \gamma_L = 0$ почти совпадают с амплитудами, вычисленными в [1, 3, 5], это результат более точных, чем в [4], вычислений величины (4).

Если в знаменателе подкоренного выражения (10) первое слагаемое намного больше второго (существенна лишь диссипация за счет турбулентного трения), то амплитуда $\bar{u}_m^* \sim L^{-8/7}$. Привлекая неравенство (1), можно получить, что в области

$$\frac{565\,H}{\mathrm{Re}_0} \lesssim \bar{u}_m^* \ll \frac{0{,}01}{32\,(\varkappa + 1)^4} \frac{1}{\mathrm{Re}_0} \left(\frac{L}{R} \right)^4$$

становится несущественным образование ударных волн и задачу о резонансных колебаниях газа в закрытой трубе можно решать методами стандартной теории возмущений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гусев В. Э.* Установление вынужденных колебаний в акустических резонаторах//Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 2. С. 204—212.
2. *Гуляев А. И., Кузнецов В. М.* Колебания газа с большой амплитудой в закрытой трубе//Инж. журн. 1963. Т. 3. Вып. 2. С. 236—245.
3. *Chester W.* Resonant oscillations in closed tubes//J. Fluid. Mech. 1964. V. 18. No. 1. P. 44—64.

4. *Temkin S.* Nonlinear gas oscillations in a resonant tube//Phys. Fluids. 1964. V. 11. No. 5. P. 960—964.
5. *Галиев Ш. У., Ильгамов М. А., Садыков А. В.* О периодических ударных волнах в газе//Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 2. С. 58—66.
6. *Chon K. U., Lee P. S., Show D. T.* Turbulence measurement in a resonance tube//J. Sound and Vibr. 1983. V. 86. No. 4. P. 475—483.
7. *Оми М., Игути М.* Нестационарное течение в трубопроводах//Нихон кикай гаккай ромбунсю. Сер. В. 1982. Т. 48. № 430. С. 981—987.
8. *Галиуллин Р. Г., Пермяков Е. И.* Влияние турбулентности на колебания газа большой амплитуды в полуоткрытой трубе//Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 1. С. 25—28.
9. *Репин В. Б., Новиков Ю. Н., Дементьев А. П.* Экспериментальное исследование нелинейных колебаний газа в открытой трубе//Нестационарные задачи механики. Вып. 22. Казань: Изд-во КФТИ КФАН СССР, 1989. С. 103—110.
10. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 424.
12. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 848 с.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило в редакцию
14.10.92

УДК 534.26

© 1993 г. Д. А. Касьянов

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИИ ГРИНА КОЛЬЦА

При решении акустических задач дифракции на протяженных апертурах с цилиндрической симметрией часто возникают существенные трудности с аналитическим описанием полей в различных областях дифракции (см., например, [1]). Решение подобных задач можно значительно упростить, зная хотя бы приближенные, но достаточно простые представления функций Грина задач в данных областях. Ниже получены наглядные приближенные выражения Ф. Г. К. в ближней и дальней зонах дифракции. Под ближней зоной понимается приближение $(z - z')^2 + (r - r')^2 \to 0$, под дальней $[4rr'/((z - z')^2 + (r - r')^2)] << 1$, где z, r, z', r' — цилиндрические координаты точек наблюдения и источника соответственно. Зоны эти вводятся безотносительно волнового параметра и включают в себя канонические зоны дифракции Френеля и Фраунгофера.

Представим Ф. Г. К. как результат интегрирования функции Грина точечного источника $[\exp(\mp ikR)]/4\pi R$, записанной в цилиндрической системе координат, по угловой координате φ в пределах от 0 до 2π:

$$\text{Ф.Г.К.} = (1/4\pi)\int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\mp ik\sqrt{(z-z')^2 + r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\varphi}\right)}{\sqrt{(z-z')^2 + r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\varphi}}\,d\varphi, \tag{1}$$

где k — модуль волнового вектора.

В литературе встречаются иные представления Ф. Г. К. [2—4], все они и выражение (1) связаны достаточно тривиально.

Некоторые сведения об интеграле (1) можно почерпнуть в [5].

В работе [4] найдены точные представления (1) в виде вырожденных гипергеометрических функций двух переменных Ξ_2, H_3, H_{10}, прямое использование которых при решении конкретных задач дифракции затруднено крайней неразвитостью теории гипергеометрических функций двух переменных.

Тем не менее, используя некоторые точные представления интеграла (1), можно получить приближенные выражения для Ф. Г. К., пригодные для решения многих физических задач [6].

Представим, к примеру, (1) интегралом гипергеометрического вида

$$\text{Ф.Г.К.} = (1/2\pi)\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\frac{\exp\left(\mp ik\sqrt{(a-b)\left(1+\frac{2b}{a-b}\right)}\right)}{\sqrt{(a-b)\left(1+\frac{2b}{a-b}t\right)}}\,dt. \tag{2}$$

Здесь введены обозначения: $a = (z - z')^2 + r^2 + r'^2$, $b = 2rr'$.

Переход между выражениями (1) и (2) несложен (см. [4, 5]).

Первое приближение, охватывающее широкий круг нужд вычислителя,— это приближение по параметру $(2b/(a-b)) << 1$ в реальных переменных $[4rr'/((z - z')^2 + (r - r')^2)] << 1$, причем k предполагается произвольным. Разложим $\sqrt{1 + (2b/(a-b))\,t}$ в показателе экспоненты и в знаменателе