АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 5

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. М. Л. Фильштинский

ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНОЙ

Рассматривается антиплоская нестационарная динамическая задача электроупругости для пьезокерамического полупространства (пространства), ослабленного туннельными криволинейными трещинами. В качестве возбуждения принимаются линейные источники (сдвиговое усилие, электрический заряд), приложенные на границе полупространства. С использованием интегрального преобразования Фурье исходная краевая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно трансформанты скачка перемещения на трещине. Приводятся результаты численного исследования, позволяющие оценить динамические эффекты в зависимости от типа импульсного воздействия, влияния границы полупространства, а также эффекта связанности электроупругих полей. Отмечается, например, что в пространстве с трещиной при действии сдвигового усилия динамический коэффициент интенсивности напряжений может превысить свое статическое значение на 75%.

Анализ электроупругих полей в пьезоэлектрических телах с трещинами при воздействии динамических нагрузок позволяет исследовать влияние инерционного эффекта на характеристики разрушения, а также глубже понять процессы, предшествующие хрупкому разрушению.

Ниже исследуется поведение коэффициента интенсивности напряжений K_{III} в пьезокерамическом полупространстве, ослабленном туннельными трещинами достаточно произвольной конфигурации. Считается, что в недеформированном состоянии трещина ассоциируется с математическим разрезом. В качестве нагрузки рассматриваются линейные источники импульсного вида, приложенные на границе полупространства. Приводятся численные результаты, позволяющие оценить динамические эффекты в зависимости от типа воздействия, влияния границы полупространства и эффекта связанности акустоэлектрических полей.

Задачи о гармоническом нагружении пьезокерамических сред с разрезами или отверстиями в условиях антиплоской деформации рассматривались в [1—5].

Пусть на линии $x_1 = x_{10}$, $x_2 = 0$, $-\infty < x_3 < \infty$ границы свободного пьезокерамического полупространства, ослабленного туннельными вдоль x_3 разрезами L_j ($j = 1, 2, \ldots, k$), действуют произвольно изменяющиеся со временем сдвиговое усилие $P(x_1, t) = p_0(t)\delta(x_1 - x_{10})$ или электрический заряд $Q(x_1, t) = q_0(t)\delta(x_1 - x_{10})$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Будем предполагать, что берега разрезов свободны от нагрузки, полупространство граничит с вакуумом, а ось ox_3 декартовой системы координат совпадает с направлением силовых линий электрического поля предварительной поляризации керамики. Относительно разрезов примем допущение о том, что кривизны контуров L_j принадлежат классу H [6] на $L = \cup L_j$ и, кроме того, $\cap L_j = \varnothing$.

В указанных условиях в полупространстве с дефектами будут возбуждаться акустоэлектрические поля, соответствующие антиплоской деформации. Исходные соотношения в квазистатическом приближении сводятся к двум уравнениям относительно перемещения u_3 и электрического потенциала φ [1]:

$$c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15}\nabla^2\varphi - \rho\ddot{u}_3 = 0, \tag{1}$$

$$e_{15}\nabla^2 u_3 - э_{11}^{\varepsilon}\nabla^2\varphi = 0.$$

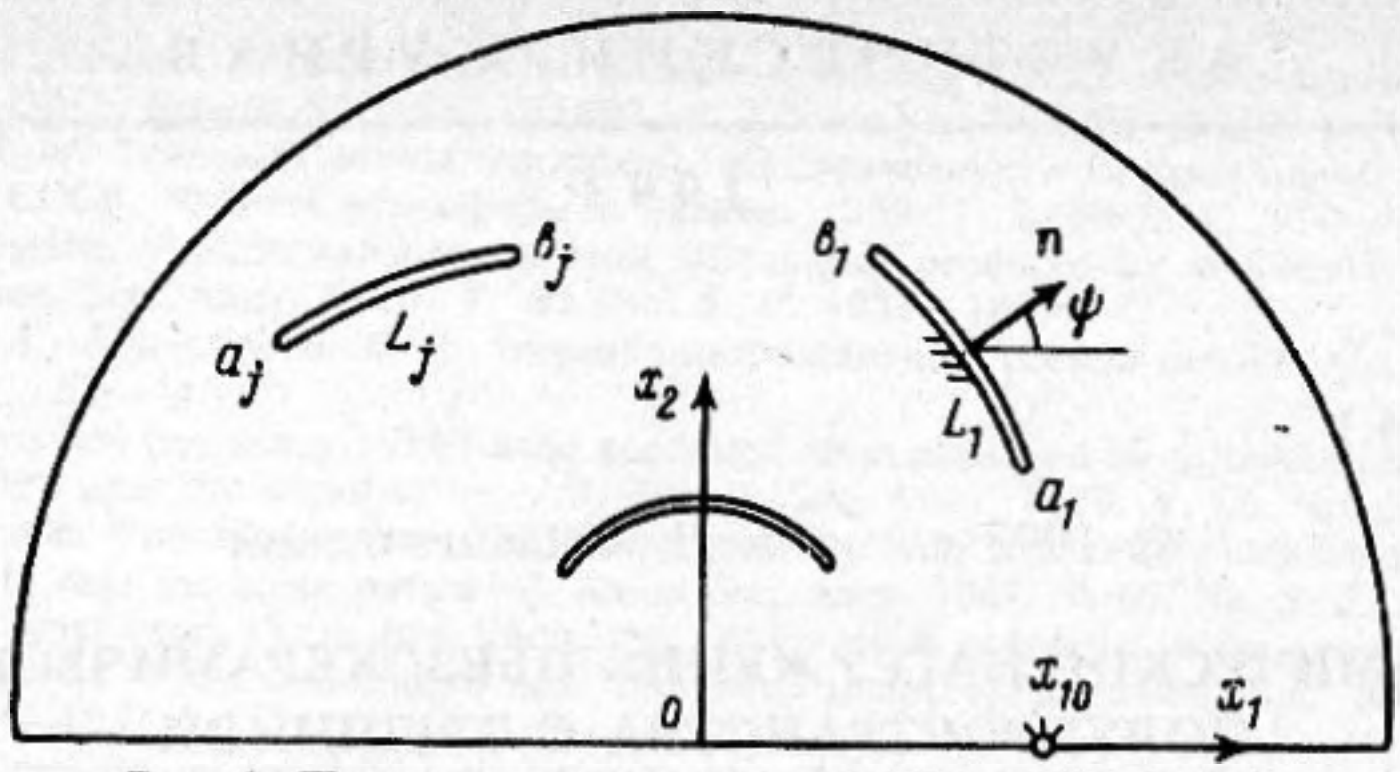

Рис. 1. Полупространство с туннельными трещинами

Здесь ρ, c_{44}^E, e_{15} и $\text{э}_{11}^\varepsilon$ — соответственно плотность материала, модуль сдвига, пьезоэлектрическая постоянная и диэлектрическая проницаемость среды.

Электрические краевые условия на берегах разрезов L_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ представим в виде [7]

$$E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^-, \tag{2}$$

где E_s и D_n — касательная компонента вектора электрической напряженности и нормальная компонента вектора электрической индукции соответственно; верхние знаки «+» и «-» относятся к левому и правому берегам L_j при движении от его начала a_j к концу b_j (рис. 1).

Считая, что полупространство граничит с вакуумом, электрические условия на его границе можно заменить приближенным равенством $D_2 = 0$ [1].

Применяя преобразование Фурье по времени (при нулевых начальных условиях)

$$\{U_3(x_1, x_2, \omega), \ \Phi(x_1, x_2, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \{u_3(x_1, x_2, t), \ \varphi(x_1, x_2, t)\} e^{i\omega t} dt, \tag{3}$$

$$\{u_3(x_1, x_2, t), \ \varphi(x_1, x_2, t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^\infty \{U_3(x_1, x_2, \omega), \ \Phi(x_1, x_2, \omega)\} e^{-i\omega t} d\omega,$$

рассмотрим сначала ситуацию, когда в однородном пьезокерамическом пространстве (без разрезов) действует линейный источник. В этом случае из уравнений (1) (с соответствующими правыми частями) с учетом формул (3) получим

$$c_{44}^E \nabla^2 U_3^0 + e_{15} \nabla^2 \Phi_0 + \rho\omega^2 U_3^0 = -P_0(\omega)\, \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}), \tag{4}$$

$$e_{15} \nabla^2 U_3^0 - \text{э}_{11}^\varepsilon \nabla^2 \Phi_0 = -Q_0(\omega)\, \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}).$$

Здесь $P_0(\omega)$ и $Q_0(\omega)$ — соответствующие спектральные функции сдвиговых усилий и электрического заряда, действующих вдоль линии $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $-\infty < x_3 < \infty$ пространства. Из физических соображений ясно, что параметр ω имеет смысл круговой частоты.

Решение системы (4) находится элементарно и определяется формулами

$$U_3^0(x_1, x_2, \omega) = -\frac{\text{э}_{11}^\varepsilon P_0(\omega) + e_{15} Q_0(\omega)}{4 i c_{44}^E \text{э}_{11}^\varepsilon (1 + k_{15}^2)} H_0^{(1)}(\gamma r), \tag{5}$$

$$\Phi_0(x_1, x_2, \omega) = \frac{Q_0(\omega)}{2\pi\text{э}_{11}^{\varepsilon}} \ln r + \frac{i}{4\text{э}_{11}^{\varepsilon}(1 + k_{15}^2)} \left(\frac{e_{15}}{c_{44}^E} P_0(\omega) + k_{15}^2 Q_0(\omega) \right) H_0^{(1)}(\gamma r),$$

$$\gamma = \omega / c_0,\ c_0 = [c_{44}^E (1 + k_{15}^2)/\rho]^{1/2},\ k_{15} = e_{15}/(\text{э}_{11}^{\varepsilon} c_{44}^E)^{1/2},\ r = [(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2]^{1/2},$$

где через k_{15} обозначен коэффициент электромеханической связи, $H_\nu^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода порядка ν, c_0 — скорость сдвиговой волны в пьезосреде.

Если источник сосредоточен на линии $x_1 = x_{10}$, $x_2 = 0$, $-\infty < x_3 < \infty$ границы свободного полупространства, то решение можно определить при помощи метода отражения. В предположении, что внешней средой является вакуум ($D_2 = 0$ при $x_2 = 0$), приходим к равенствам (5), в которых вместо r следует подставить $r^* = |z - x_{10}|$, а также удвоить величины $P_0(\omega)$ и $Q_0(\omega)$.

Следует отметить, что в случае стационарного волнового процесса в пьезокерамическом полупространстве с туннельными разрезами соответствующая краевая задача была сведена к сингулярному интегродифференциальному уравнению относительно скачка функции U_3 на L [4]. Применение интегральных преобразований (3) при переходе в плоскость изображения дает возможность непосредственно использовать этот алгоритм. При этом оператор интегрального уравнения [4] останется прежним, а его правая часть с учетом формулы [5] и выше изложенного изменится. В результате будем иметь

$$\int_L p'(\zeta)\, g_1(\zeta, \zeta_0)\, ds + \int_L p(\zeta)\, g_2(\zeta, \zeta_0)\, dS = N(\zeta_0), \tag{6}$$

$$g_1(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0} + A k_{15}^2 \frac{e^{-i\psi_0}}{\zeta - \bar{\zeta}_0} \right),$$

$$g_2(\zeta, \zeta_0) = 0{,}25\pi i \gamma^2 (1 + k_{15}^2)\, [H_2(\gamma r_0) \cos(\psi + \psi_0 - 2\alpha_0) +$$

$$+ A H_0^{(1)}(\gamma r_{10}) \cos(\psi + \psi_0) - H_0^{(1)}(\gamma r_0) \cos(\psi - \psi_0) -$$

$$- A H_2^{(1)}(\gamma r_{10}) \cos(\psi - \psi_0 + 2\alpha_{10})],$$

$$N(\zeta_0) = 0{,}5(1 - A) \cos(\psi_0 - \alpha_0^*) \left[\frac{\pi i \gamma}{c_{44}^E} P_0(\omega) H_1^{(1)}(\gamma r_0^*) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi k_{15}^2}{e_{15}} Q_0(\omega) \left(i\gamma H_1^{(1)}(\gamma r_0^*) - \frac{2}{\pi r_0^*} \right) \right],\ p(\zeta) = \frac{[U_3]}{2},\ p'(\zeta) = \frac{dp}{ds},$$

$$H_2(x) = \frac{4i}{\pi x^2} + H_2^{(1)}(x),\ r_0 = |\zeta - \zeta_0|,\ r_{10} = |\zeta_0 - \bar{\zeta}|,\ r_0^* = |\zeta_0 - x_{10}|,$$

$$\alpha_0 = \arg(\zeta_0 - \zeta),\ \alpha_{10} = \arg(\zeta_0 - \bar{\zeta}),\ \alpha_0^* = \arg(\zeta_0 - x_{10}),\ \zeta_0 = \zeta_{10} + i\xi_{20},$$

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2,\ \psi = \psi(\zeta),\ \psi_0 = \psi(\zeta_0),\ \zeta, \zeta_0 \in L = \bigcup_{j=1}^{k} L_j.$$

В (6) величина $[U_3(x_1, x_2, \omega)]$ представляет собой трансформанту скачка перемещения $u_3(x_1, x_2, t)$, $\psi(\zeta_0)$ — угол между положительной нормалью к левому берегу L и осью ox_1 в точке $\zeta = \zeta_0$ (рис. 1), ds — элемент дуги контура L. Случай $A = -1$ соответствует свободному от сил, граничащему с вакуумом полупространству, $A = 0$ — неограниченному пространству.

Интегральное уравнение (6) необходимо рассматривать в совокупности с дополнительными условиями

$$\int_{L_j} dp = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{7}$$

С целью вычисления коэффициента интенсивности напряжений $K_{III}(t)$ получим главную асимптотику изображения сдвигового напряжения на продолжении за вершину трещины. При этом будем исходить из интегрального представления для рассеянной дефектами волны [4]

$$U_3^*(x_1, x_2, \omega) = -\frac{1}{2}\int_L p'(\zeta)\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}d\zeta - \frac{\partial G}{\partial \bar{\zeta}}d\bar{\zeta}\right), \tag{8}$$

$$G = H_0^{(1)}(\gamma\,|\zeta - z|) - AH_0^{(1)}(\gamma\,|\bar{\zeta} - z|), \quad z = x_1 + ix_2.$$

Оставляя лишь сингулярные члены, запишем

$$\tau_n = c_{44}^E\frac{\partial U_3}{\partial n} + \ldots = c_{44}^E\left(e^{i\psi}\frac{\partial U_3}{\partial z} + e^{-i\psi}\frac{\partial U_3}{\partial \bar{z}}\right) + \ldots \tag{9}$$

С учетом (8), (9) находим

$$\tau_n^0 = \frac{c_{44}^E}{\pi}\int_L p'(\zeta)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i(\psi_c - \psi)}}{z - \zeta}ds\right\}, \quad \psi_c = \psi(c), \tag{10}$$

где c — вершина трещины.

Используя асимптотические формулы для входящих в (10) интегралов [6] и параметризацию контура $L(\zeta = \zeta(\delta), -1 < \delta < 1)$, получим

$$\tau_n^0 = \mp c_{44}^E\frac{\Omega_0(\mp 1, \omega)}{\sqrt{2rs'(\mp 1)}}, \quad p'(\zeta) = \frac{1}{2}\left[\frac{dU_3}{ds}\right] =$$

$$= \frac{\Omega_0(\delta, \omega)}{s'(\delta)\sqrt{1 - \delta^2}}, \quad s'(\mp 1) = \frac{ds}{d\delta}\Big|_{\delta = \mp 1}. \tag{11}$$

Здесь r — расстояние до вершины, верхний знак относится к вершине $c = a$, нижний — к $c = b$, символ $[.]$ обозначает скачок соответствующей величины на L.

Введем «стандартные» решения Ω_1 и Ω_2 системы уравнений (6), (7) по формуле

$$\Omega_0(\mp 1, \omega) = \frac{P_0(\omega)}{c_{44}^E}\Omega_1(\mp 1, \omega) + \frac{Q_0(\omega)}{e_{15}}\Omega_2(\mp 1, \omega). \tag{12}$$

Тогда с учетом (11), (12) получаем следующее выражение для изображения по Фурье коэффициента интенсивности напряжений:

$$K_{III}^{\mp}(\omega) = \lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\,\tau_n^0 = \mp(\pi/s'(\mp 1))^{1/2}\,[P_0(\omega)\,\Omega_1(\mp 1, \omega) +$$

$$+ \frac{c_{44}^E}{e_{15}}Q_0(\omega)\,\Omega_2(\mp 1, \omega)].$$

Отсюда, переходя к оригиналу, находим окончательно:

$$K_{III}^{\mp}(t) = \mp(2/s'(\mp 1))^{1/2}\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty}[P_0(\omega)\,\Omega_1(\mp 1, \omega) +$$

$$+ (c_{44}^E/e_{15})\,Q_0(\omega)\,\Omega_2(\mp 1, \omega)]\,e^{-i\omega t}d\omega. \tag{13}$$

В качестве первого примера рассмотрим пьезокерамическое пространство ($A = 0$), содержащее одиночную прямолинейную трещину с параметрическими уравнениями $\xi_1 = \delta$, $\xi_2 = h(-1 \le \delta \le 1)$. Возбуждение акустоэлектрических полей в среде осуществляется вследствие импульсной нагрузки трапецеидальной формы (рис. 2). Вводя безразмерные параметры

$$t^* = c_0 t h^{-1}, \quad d^* = c_0 d h^{-1}, \quad T^* = c_0 T h^{-1},$$

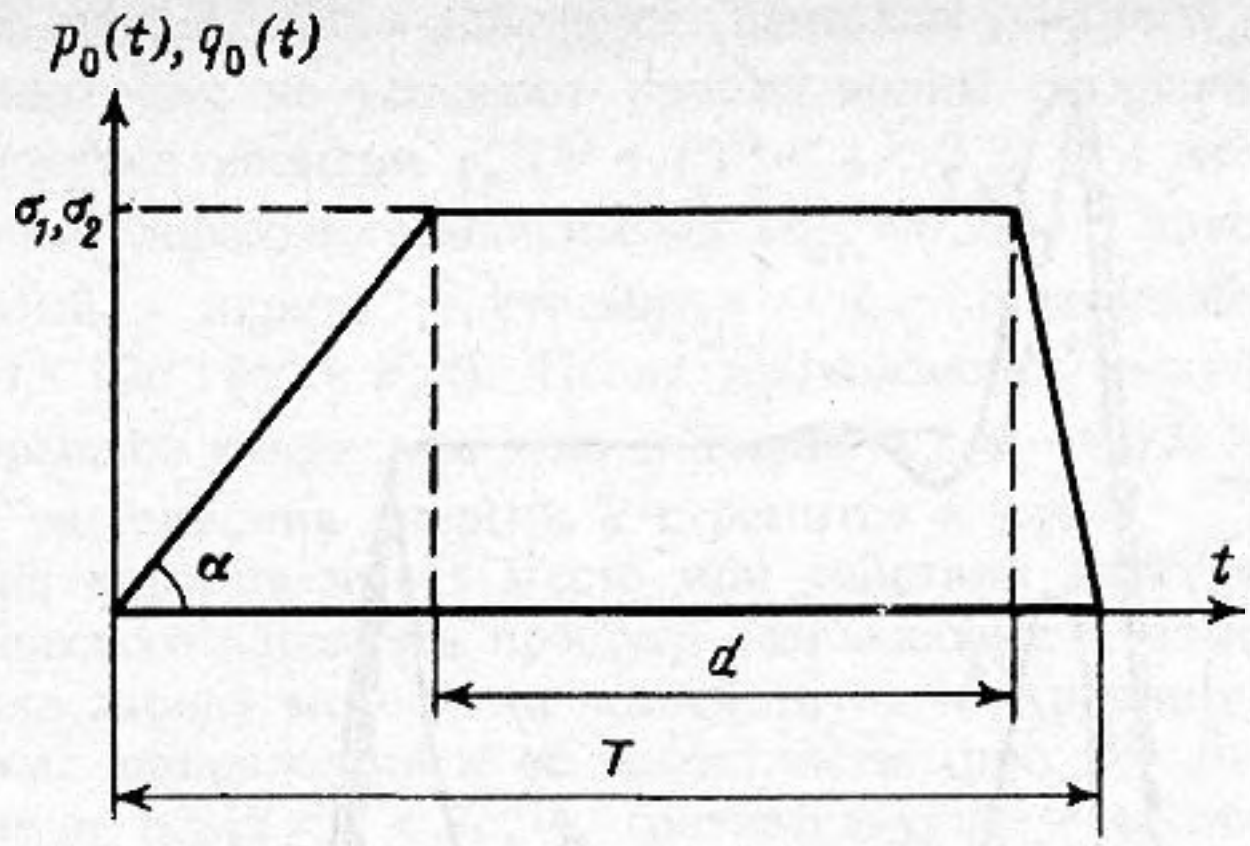

Рис. 2. Трапецеидальный импульс

запишем соответствующие спектральные функции данного импульса в виде

$$R_\nu(\omega) = \frac{\sigma_\nu^*}{\omega^2\sqrt{2\pi}}\left[(e^{i\mu_1} - 1)\operatorname{tg}\alpha - \mu_3(e^{i\omega T} - e^{i\mu_2})\right], \tag{14}$$

$$R_1(\omega) = P_0(\omega),\quad R_2(\omega) = Q_0(\omega),\quad \mu_1 = \omega\sigma_\nu \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\mu_2 = \mu_1 + \omega d,\quad \mu_3 = \sigma_\nu(T - d - \sigma_\nu \operatorname{ctg}\alpha)^{-1},\quad \sigma_\nu^* = c_0\sigma_\nu h^{-1}\ (\nu = 1, 2).$$

Подставляя выражение (14) в (13), получим исходную формулу для определения коэффициента интенсивности $K_{III}(t)$. Фигурирующие в ней стандартные решения $\Omega_i(\mp 1, \omega)$ $(i = 1, 2)$ вычислялись из системы уравнений (6), (7) по схеме метода механических квадратур [8]. Количество чебышевских узлов интерполяции на контуре трещины принималось равным $n = 15$, 20 и 25, причем дальнейшее увеличение параметра n практически не уточняло результатов. Полубесконечный интервал интегрирования в (13) заменялся конечным $[0, \omega^*]$, при этом величина ω^* определялась путем численного анализа из соображений достижения минимальной погрешности.

На рис. 3 иллюстрируется изменение относительного коэффициента интенсивности напряжений $\lambda = \sqrt{\pi l}\, K_{III}^+/\Lambda$ в функции от безразмерного времени t^*. Принималось, что материал — керамика PZT — 4 [9], центр трещины отстоит от линии действия источника $x_{10} = x_{20} = 0$, $-\infty < x_3 < \infty$ на расстоянии $h/l = 3$ ($2l$ — длина разреза). Параметры импульса задавались равными $T^* = 10$, $d^* = 8$, $\alpha = \pi/4$, $\sigma_1^* = 1$Н/м, $\sigma_2^* = 1$Кл/м. Кривые *1* и *2* построены соответственно для случаев $p_0(t) \neq 0$, $q_0(t) = 0 (\Lambda = \sigma_1^*)$ и $q_0(t) \neq 0$, $p_0(t) = 0 (\Lambda = \sigma_2^* c_{44}^E/e_{15})$. Штриховой линией отмечено поведение величины $\lambda(t^*)$ в случае изотропного материала $(k_{15} = 0)$.

В качестве второго примера рассмотрим ситуацию, когда на границе пьезокерамического полупространства с параболической трещиной $\xi_1 = \delta$, $\xi_2 = h + \beta\delta^2 (\delta \in [-1, 1])$ действует источник, излучающий импульс треугольной формы и расположенный в фокусе данной параболы. Графики величины λ как функции t^* приведены на рис. 4. Кривые *1*, *2* построены для случаев $p_0(t) \neq 0$, $q_0(t) = 0$ и $q_0(t) \neq 0$, $p_0(t) = 0$ соответственно. Остальные параметры таковы: $A = -1$, $T^* = 2$, $d^* = 0$, $\alpha = \pi/4$, $h = 1$ м, $\beta/h = -0{,}25$, $\sigma_1^* = 1$Н/м, $\sigma_2^* = 1$ Кл/м. Сплошные линии отвечают случаю керамики PZT — 4, штриховая — случаю $k_{15} = 0$.

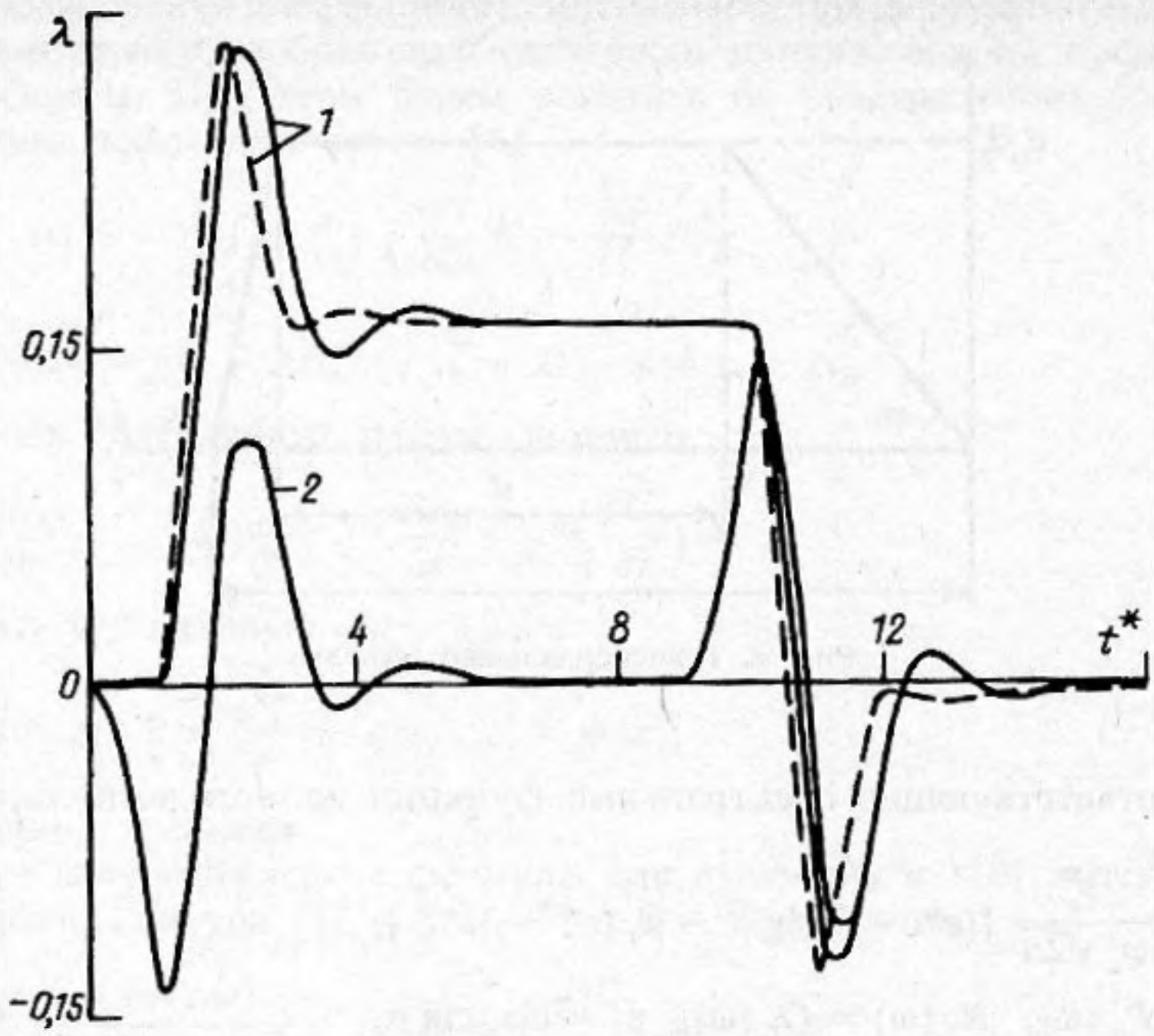

Рис. 3. Изменение величины $\lambda(t^*)$ при действии сдвигового усилия или электрического заряда в пространстве с прямолинейной трещиной

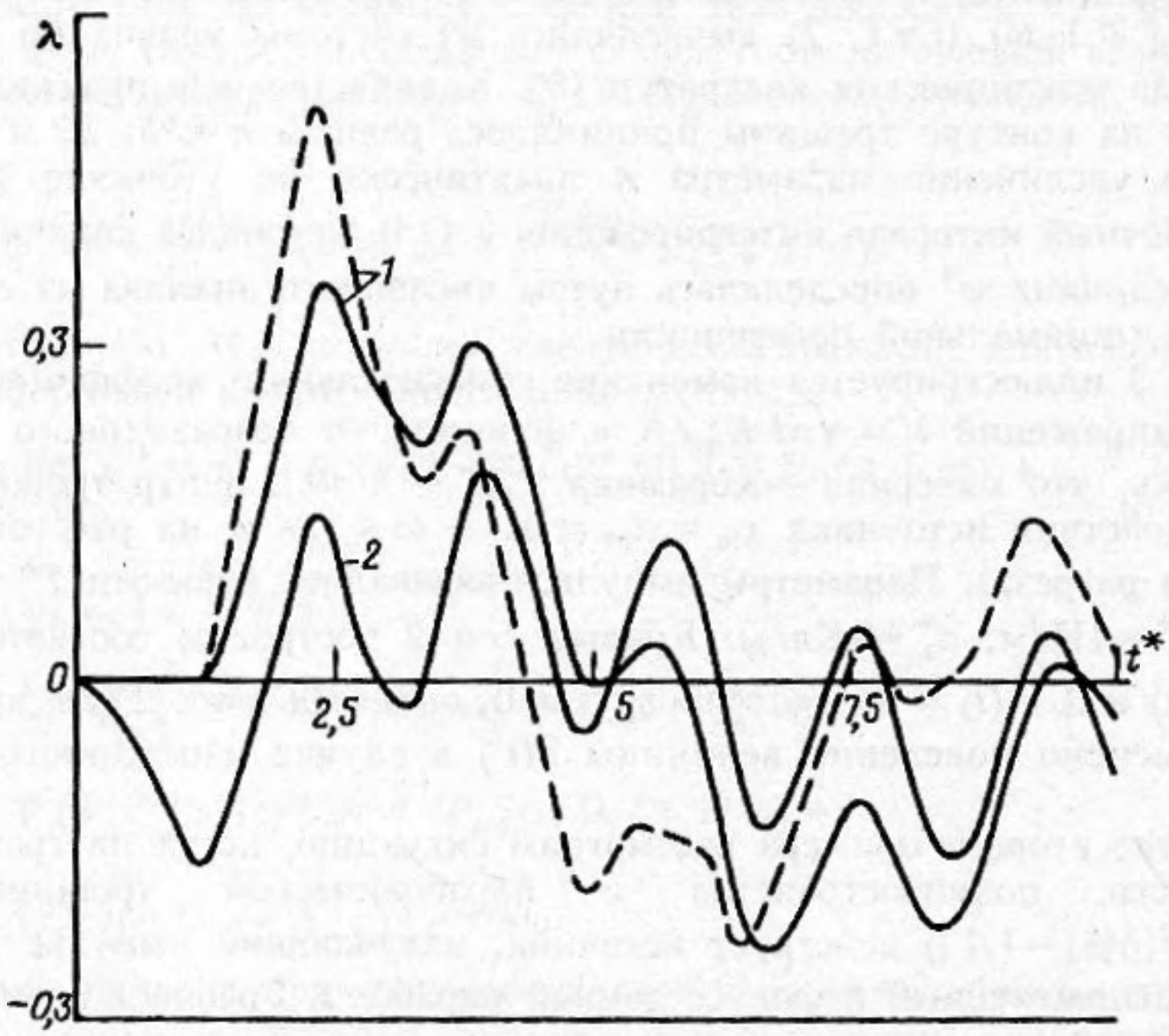

Рис. 4. Изменение величины $\lambda(t^*)$ в случае полупространства с параболической трещиной

Как следует из рис. 3, когда действует сдвиговое усилие и $t < c_0^{-1}(h^2 + l^2)^{1/2}$, в вершины трещины еще не успевают прийти волны напряжений, и поэтому $K_{III} = 0$. В промежутке времени $c_0^{-1}(h^2 + l^2)^{1/2} < t < 2{,}22c_0^{-1}h$ величина λ резко возрастает до своего глобального максимума ($\lambda_{max} \approx 0{,}28$), а затем, спустя некоторый переходный период, стремится к статическому значению $\lambda^0 \approx 0{,}16$ ($6c_0^{-1}h < t < 10c^{-1}(h^2 + l^2)^{1/2}$). После прохождения импульса ($t > 10c^{-1}h$) происходит непрерывное изменение λ до значения $\lambda_{min} \approx -0{,}12$, и в последующее время вследствие рассеивания энергии λ стремится к нулю.

Несколько иная картина имеет место при действии электрического заряда. В силу квазистатического характера процесса возникающее в момент времени $t = 0$ электрическое поле заряда мгновенно воздействует на трещину, вызывая появление механических напряжений в ее окрестности (рис. 3). Любопытно, что в промежутке времени $6c_0^{-1}h < t < 9c_0^{-1}h$, соответствующем «статическому» поведению акустоэлектрических полей, коэффициент интенсивности напряжений близок к нулю. Это обстоятельство вызвано тем, что в статике в условиях антиплоской деформации электрическое возбуждение пьезосреды не вызывает в ней механических напряжений.

Как видно из рис. 3, в пространстве с трещиной влияние инерционного эффекта на величину K_{III} оказывается существенным. Например, при действии сдвиговых усилий динамический коэффициент интенсивности напряжений может превысить свое статическое значение примерно на 75%. При этом влияние эффекта связанности акустоэлектрических полей на коэффициент K_{III} проявляется незначительно и выражается в том, что пиковые значения времени t смещаются немного вправо по сравнению с соответствующими значениями для изотропного материала. Для полупространства влияние пьезоэффекта на величину K_{III} проявляется более существенно и в окрестности максимального значения может достигать 33% (рис. 4).

В заключение отметим, что развиваемый выше подход к анализу нестационарных динамических электроупругих полей в среде с трещинами оказывается эффективным и может быть обобщен на ситуацию, когда в среде имеется несколько трещин различной конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Партон В. В., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. С. 471.
2. *Партон В. З., Фильштинский М. Л.* Стационарный волновой процесс в пьезоэлектрическом слое и полуслое, ослабленных туннельными разрезами (антиплоская деформация)//Прикл. матем. и механика 1992. Т. 56. № 3. С. 510—518.
3. *Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л.* Взаимодействие волн смещений с криволинейными трещинами продольного сдвига в пьезоэлектрической среде//Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49. № 5. С. 822—826.
4. *Фильштинский М. Л.* Взаимодействие волн механических смещений с туннельными трещинами продольного сдвига в пьезокерамическом полупространстве//Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. № 5. С. 28—33.
5. *Фильштинский М. Л.* Гармонические колебания пьезоэлектрического полупространства с туннельными полостями (деформация продольного сдвига)//Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 4. С. 777—781.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. С. 511.
7. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. Т. 5. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1989. С. 279.
8. *Erdogan F. E., Gupta G. D., Cook T. S.* The numerical solutions of singular integral equations//Mechanics of Fract. Leyden: Int. Publ. 1973. V. 1. P. 368—425.
9. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях//Физическая акустика. Т. 1. Ч. А./Под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. С. 204—326.

Сумский физико-технологический институт

Поступила в редакцию 17.02.93

M. L. Fil'shtinskii

DYNAMIC LOADING OF A PIEZOCERAMIC HALF-SPACE WITH A CRACK

An antiplanar nonstationary dynamic problem of electroelasticity for a piezoceramic half — space (space) weakened by tunnel curvilinear cracks, is considered. Linear sources (such as a shear load and an electric charge) operating at the half — space boundary are taken as a load. The initial boundary value problem is reduced to a singular integral equation with respect to the transformant of the shift leap at the crack with the help of the Fourier integral transformation. The numerical results are brought into light which allow to evaluate dynamical effects depending on the type of pulsed impact and the half-space boundary effect as well as on the electroelastic fields coherence effect. It is noted, for example, that the dynamic stress intensity factor can exceed its static value up to 75% in the half-space with a crack affected by a shear load.