

2. Белый В.Н., Севрук Б.Б. Особенности наведенной электрическим полем акустической анизотропии в кристаллах с большой диэлектрической проницаемостью // Кристаллография. 1983. Т. 28. № 5. С. 925–931.
3. Лямов В.Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 85.
4. Cho Y., Yamouchi K. Nonlinear elastic, piezoelectric, electrostrictive and dielectric constants of lithium niobate // J. Appl. Phys. 1987. V. 61 (3). № 1. P. 875–887.
5. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. С. 135.
6. Александров К.С., Бурков С.И., Сорокин Б.П. Влияние внешнего электрического поля на распространение поверхностных акустических волн в пьезоэлектриках // Препринт № 525. Ф. Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1988. С. 45.
7. Зайцева М.П., Кокорин Ю.И., Сандлер Ю.М. и др. Нелинейные электромеханические свойства ацентричных кристаллов. Новосибирск: Наука, 1986. 177 с.
8. Волоцкий А.Е., Зайцев Б.Д., Нейман В.И. и др. Влияние внешних статических электрических полей на характеристики объемных упругих волн в LiNbO_3 // Акуст. журн. 1990. № 5. С. 840–846.

Институт радиотехники и электроники
Саратовский филиал

Поступило в редакцию
24.01.91
После исправления
02.01.92

УДК 534.874.2

© 1992 г. И.П. Завершинский, Н.Е. Молевич

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОТОКЕ ГАЗА С ДИССИПАЦИЕЙ

Исследование поведения звуковых волн в движущихся средах представляет постоянный интерес в связи с проблемами эхолокации, вопросами детектирования в потоковых системах, а также в теории летательных аппаратов.

В [1] получено, что в бездиссипативной движущейся среде звуковая волна, распространяющаяся от источника вдоль потока, имеет меньшую амплитуду по сравнению с волной, движущейся против потока. В настоящей работе показано, что учет диссипативных явлений (связанных со сдвиговой и объемной вязкостями и теплопроводностью среды) приводит к дополнительной анизотропии амплитуды звука, знак которой противоположен полученной в [1].

В дальнейшем будем следовать [1], рассматривая распространение звука по и против ламинарного потока в прямоугольной трубе с жесткими стенками (рисунок) и считая источником звука колеблющуюся полосу шириной $2L$ в плоскости $y = 0$. Влияние источника учитывается граничным условием ($y = 0$)

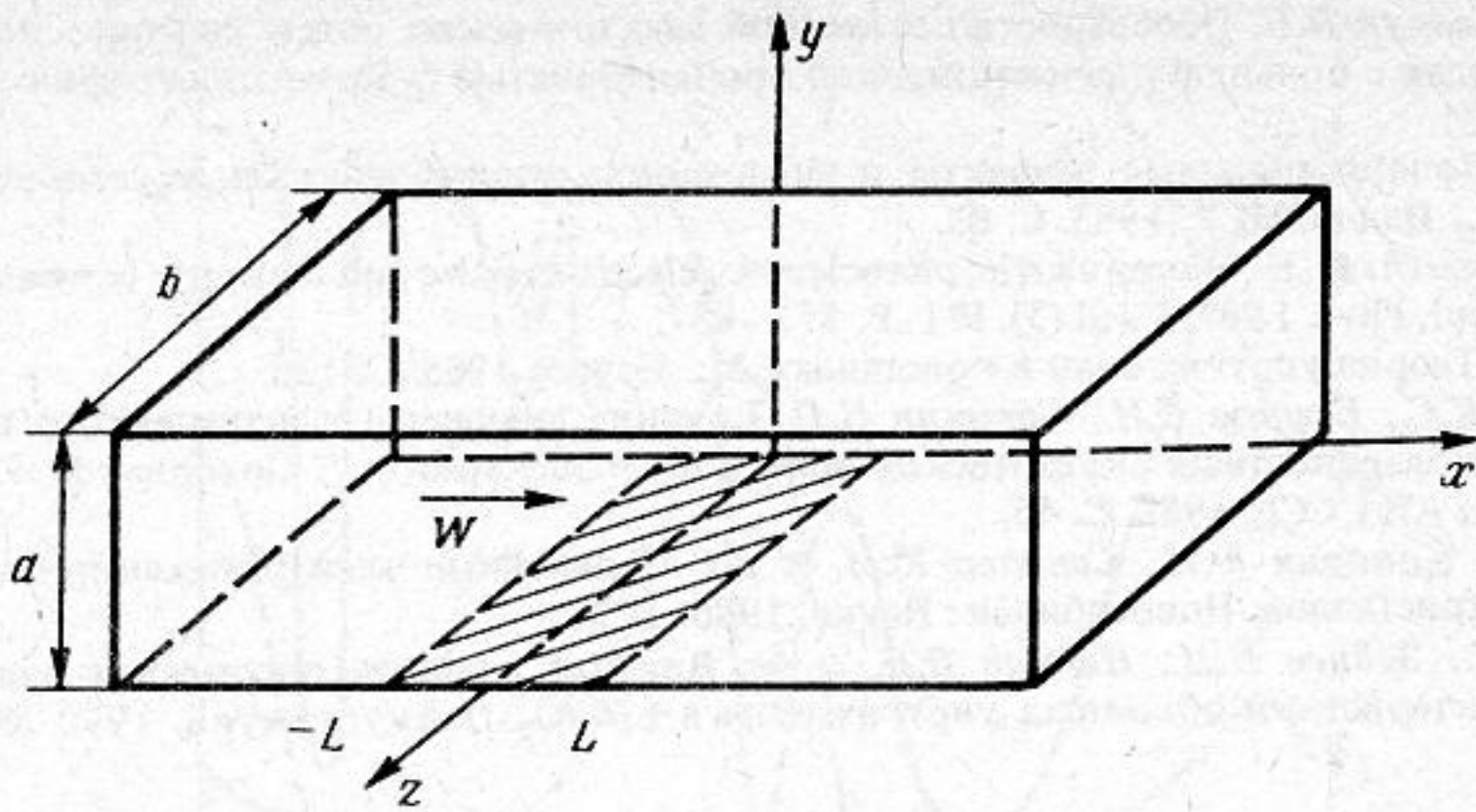
$$v_y(x, 0, z, t) = \frac{\partial \eta_s(x, 0, z, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

где v_y – вертикальная составляющая колебательной скорости среды, η_s – смещение газового столба вдоль оси y . В (1) учтено, что на поверхности трубы скорость потока нулевая. С этим связано отличие граничного условия (1) от используемого в [1], где скорость потока считалась не зависящей от координат.

В качестве исходной системы уравнений используем линеаризованную систему уравнений газодинамики. Поскольку существует поток газа, то имеется стационарный градиент давления вдоль потока. Однако если скорость потока $w \ll u_s$ – скорости звука, так что число Маха $M = w/u_s \sim \theta$, где θ – величина первого порядка малости, то в условиях малой диссипации $\eta(\partial P/\partial t)/u_s^2 \rho_0 P \sim \xi(\partial P/\partial t)/u_s^2 \rho_0 P \sim \kappa(\partial P/\partial t)/u_s^2 \rho_0 P \sim \theta^2$ и продольная неоднородность среды является слабой:

$$\frac{1}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial x} = \frac{\eta}{P_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \equiv \frac{\eta}{P_0} \Delta_{\perp} w \sim \theta^3,$$

$$\frac{1}{u_s} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w}{\rho_0 u_s} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \sim \theta^4.$$



Поэтому уравнения линейной акустики с точностью до величин $\sim \theta^3$ имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_0 w \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_0 (v \cdot \nabla) w = -\nabla P + \eta \Delta v + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \nabla \operatorname{div} v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \operatorname{div} v + v \nabla \rho_0 = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + w \frac{\partial P}{\partial x} = -u_s^2 \rho_0 \operatorname{div} v - u_s^2 v \nabla \rho_0 + \frac{\kappa}{m C_{V\infty}} \Delta T,$$

$$P = \rho T_0 / m + \rho_0 T / m,$$

где v , P , ρ , T — возмущения скорости, давления, плотности и температуры в звуковой волне; P_0 , ρ_0 , T_0 — стационарные значения соответствующих величин; ξ , η , κ — коэффициенты объемной вязкости, сдвиговой вязкости и теплопроводности; m — молекулярная масса; $C_{V\infty}$ — теплоемкость при постоянном объеме; $\nabla \rho_0 / \rho_0 \sim (\partial P_0 / \partial x) / P_0 \sim \theta^3$ и, как будет получено ниже, в пределах указанной точности на звуковую волну влияние не оказывает.

С помощью метода последовательных приближений, пренебрегая членами выше третьего порядка малости по θ , систему (2) можно свести к одному уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^5 P}{\partial t^5} + w \frac{\partial^5 P}{\partial x \partial t^4} + u_s^2 \operatorname{div} \left(w \frac{\partial^3 \nabla P}{\partial x \partial t^2} \right) - u_s^2 \operatorname{div} \left(w^2 \frac{\partial^3 \nabla P}{\partial x^2 \partial t} \right) + u_s^2 \operatorname{div} \left(w^3 \frac{\partial^3 \nabla P}{\partial x^3} \right) - u_s^2 \frac{\partial^3 \nabla P}{\partial t^3} + \\ & + u_s^2 \left(\frac{\partial^3 \nabla P}{\partial x \partial t^2} \nabla \right) w - u_s^2 \left(\frac{\partial^3 \nabla P}{\partial x^2 \partial t} \nabla \right) w^2 + u_s^2 \left(\frac{\partial^3 \nabla P}{\partial x^3} \nabla \right) w^3 - \frac{\mu}{u_s^2} \left[\frac{\partial^6 P}{\partial t^6} + w \frac{\partial^6 P}{\partial x \partial t^5} + \right. \\ & + u_s^2 \operatorname{div} \left(w \frac{\partial^4 \nabla P}{\partial x \partial t^3} \right) + u_s^2 \left(\frac{\partial^4 \nabla P}{\partial x \partial t^3} \nabla \right) w \left. \right] + u_s^2 \left(\frac{4\eta}{3\rho_0} + \frac{\eta}{\rho_0} \right) \left[\operatorname{div} \left(w \nabla \frac{\partial^4 P}{\partial x \partial t^3} \right) + \left(\frac{\partial^4 \nabla P}{\partial x \partial t^3} \nabla \right) w - \right. \\ & \left. - \frac{\Delta}{u_s^2} \left(w \frac{\partial^4 P}{\partial x \partial t^3} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\mu = \frac{4\eta}{3\rho_0} + \frac{\xi}{\rho_0} + \frac{\kappa}{C_{P\infty} C_{V\infty} \rho_0}.$$

Для решения уравнения (3) с граничным условием (1) используем процедуру усреднения, предложенную в [1]. Она справедлива при частотах излучаемого звука $\omega < u_s/a, u_s/b$, когда в трубе может распространяться только плоская волна. В этом случае возмущение давления по сечению знакопеременно и можно ввести в рассмотрение среднее по сечению звуковое давление

$$\bar{P} = \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a P dy dz, \quad (4)$$

Интегрируя по сечению уравнение (3) и опуская громоздкие выкладки, получим новое уравнение, описывающее эволюцию:

$$(1 - \bar{M}^2) \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} - \frac{1}{u_s^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{2\bar{M}}{u_s} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x \partial t} + \frac{\mu}{u_s^4} \left(\frac{\partial^3 \bar{P}}{\partial t^3} + 3\bar{M}u_s \frac{\partial^3 \bar{P}}{\partial x \partial t^2} \right) + \left(\frac{4\eta}{3\rho_0} + \frac{\xi}{\rho_0} \right) \Delta_{\perp} w \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = S(x, t). \quad (5)$$

В (5) по теореме о среднем введена величина ($n = 1, 2, 3$)

$$\bar{M}^n = \frac{\int_0^a \int_0^b M^n P dy dz}{\int_0^a \int_0^b P dy dz}$$

и предположено, что $\bar{M}^n \approx \bar{M}^n$. В пределах используемой точности скорость потока не зависит от продольной координаты, поэтому и M^n можно считать не зависящей от x . Величина $\Delta_{\perp} w < 0$ и также не зависит от x . При усреднении было учтено отсутствие потока газа на стенках трубки везде, кроме

области источника звука в плоскости $y = 0$ (в частности, поэтому $\Delta \bar{P} = \partial^2 \bar{P} / \partial x^2 - 1/ab \int_0^b (\partial P / \partial y)_{y=0} dz$). Вклад этой области определяется в (5) величиной

$$S \approx - \frac{\rho_0}{ab} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \int_0^b \eta_s dz,$$

где опущены несущественные здесь слагаемые, связанные с диссипативными коэффициентами.

После двойного преобразования Фурье

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(k, \omega) e^{ikx - i\omega t} dk d\omega,$$

$$S(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(k, \omega) e^{ikx - i\omega t} dk d\omega$$

получим из (5):

$$P(k, \omega) = - \frac{S(k, \omega)}{(1 - \bar{M}^2)(k - k_+)(k - k_-)},$$

где

$$k_{\pm} = \pm \left[\frac{\omega}{u_s(1 \pm \bar{M})} + \frac{i\mu\omega^2}{2u_s^3} (1 \mp 3\bar{M}) \pm \frac{i(\xi + \frac{4}{3}\eta)}{2\rho_0 u_s} \Delta_{\perp} w \right]. \quad (6)$$

С учетом ограниченности области источника полосой $-L < x < L$ можно $S(k, \omega)$ представить в виде [1]

$$S(k, \omega) = i\omega \frac{A_s}{ab} \rho_0 V_0 (1 - \bar{M}u_s \frac{k}{\omega})^2 \eta_s(k, \omega),$$

$$\eta_s(k, \omega) = \frac{1}{2\pi\eta_0 A_s} \int_0^b dz \int_{-L}^L \eta_s(x, 0, z, \omega) e^{-ikx} dx,$$

где $A_s = 2bL$ — площадь источника звука, $V_0 = -i\omega\eta_0$, η_0 — амплитуды колебательной скорости и смещения газовой столба. Например, при $\eta_s(x, 0, z, \omega) = \eta_0$ фурье-образ амплитуды смещения $\eta_s(k, \omega) = \sin kL/kL$.

Амплитуда звукового давления на частоте ω определяется из обратного преобразования Фурье

$$P(x, \omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(k, \omega) e^{ikx} dk}{(1 - \bar{M}^2)(k - k_+)(k - k_-)}. \quad (7)$$

Интеграл (7) берется методом контурного интегрирования. При этом, согласно (6), полюс k_+ находится в верхней полуплоскости, а k_- — в нижней. Для звука, распространяющегося вдоль потока ($x > L$ в геометрии рисунка), после замыкания контура через верхнюю полуплоскость получим

$$P_+ \approx \frac{\pi A_s \rho_0 u_s V_0}{ab(1 + \bar{M})^2} \eta_s(k_+, \omega) \exp \left\{ ix \left[\frac{\omega}{u_s} (1 + \bar{M}) + \frac{i\mu\omega^2}{2u_s^3} (1 - 3\bar{M}) + i(\xi + \frac{4\eta}{3}) \Delta_{\perp} w / 2\rho_0 u_s \right] \right\}. \quad (8)$$

В (8) пренебрежено диссипативными коэффициентами в предэкспоненциальном множителе, так как они не оказывают существенного влияния на звуковое поле.

Для звука, распространяющегося навстречу потоку $x < -L$, контур необходимо замыкать через нижнюю полуплоскость. Вклад в интеграл будет давать полюс k_- , и звуковое поле примет иной вид:

$$P_- \approx \frac{\pi A_s \rho_0 u_s V_0}{ab(1 - \bar{M})^2} \eta_s(k_-, \omega) \exp \left\{ -ix \left[\omega/u_s (1 - \bar{M}) + i\mu \omega^2 (1 + 3\bar{M})/2u_s^3 - i(\xi + 4\eta/3) \Delta_1 w / 2\rho_0 u_s \right] \right\}. \quad (9)$$

Решения (8), (9) удовлетворяют граничной постановке задачи (при источнике в точке $x = 0$ при $x > 0$ может существовать только волна, бегущая вправо со скоростью $u_s + w$, при $x < 0$ — волна, бегущая влево со скоростью $u_s - w$).

Если источник мал по сравнению с длиной волны, т.е. $kL \ll 1$, то $\eta_s(k, \omega) \approx 1$, и отношение звуковых давлений вдоль и против потока определится как

$$\frac{|P_+|}{|P_-|} = \frac{(1 - \bar{M})^2}{(1 + \bar{M})^2} \exp \left\{ \left[3\mu \bar{M} \omega^2 / u_s^3 - \left(\xi + \frac{4\eta}{3} \right) \frac{\Delta_1 w}{\rho_0 u_s} \right] |x| \right\}. \quad (10)$$

Из соотношения (10) следует, что при малых x амплитуда возмущения навстречу потоку больше, чем амплитуда возмущения по потоку. Это совпадает с выводом [1]. Однако при

$$|x| > x_D \equiv \frac{2 \ln [(1 + \bar{M}) / (1 - \bar{M})]}{[3\mu \bar{M} \omega^2 / u_s^3 + (\xi + 4\eta/3) |\Delta_1 w| / \rho_0 u_s]}$$

учет диссипации приводит к смене анизотропии на противоположную.

В заключение заметим, что смена знака анизотропии будет быстрее проявляться в многоатомных газах, так как в них коэффициент объемной вязкости может на порядки превышать сдвиговую вязкость, что приводит к уменьшению x_D .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ingard U., Singhal V.K.* Upstream and downstream sound radiation into a moving fluid // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1973. V. 54. № 5. P. 1343–1346.

Самарский государственный педагогический институт

Поступило в редакцию
25.04.91