АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 3

УДК 539.3, 534.1

© 1992 г. Ю.Д. Каплунов, В.М. Корсунский

ОПИСАНИЕ РЕЗОНАНСОВ ВОЛН ЛЭМБА ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается задача о рассеянии высокочастотной плоской акустической волны упругой цилиндрической оболочкой. Изучаются первые резонансы волн Лэмба высших порядков. В случае круговой цилиндрической оболочки для описания формы резонансных кривых выводятся явные асимптотические формулы. Устанавливается, что их форма существенно зависит от типа колебаний оболочки в окрестности частот запирания. Работоспособность предлагаемых формул демонстрируется путем сопоставления с точным решением задачи.

Несмотря на значительное число публикаций, посвященных задаче рассеяния для цилиндрической оболочки (см., например, обзоры [1, 2]), частотный диапазон, в котором в оболочке возбуждаются волны Лэмба высших порядков, остается недостаточно изученным. В работе [3] для случая нормального падения плоской акустической волны на круговую цилиндрическую оболочку были получены асимптотические формулы для частот первых резонансов, связанных с возбуждением каждой из этих волн. В предлагаемой статье в развитие [3] выводятся явные асимптотические формулы для описания формы соответствующих резонансных кривых и выявляется ее зависимость от типа колебаний оболочки в окрестности частот запирания.

Рассмотрим действие нормально падающей плоской стационарной волны давления на пустую цилиндрическую оболочку, погруженную в идеальную сжимаемую жидкость. Введем в плоскости, перпендикулярной к продольной оси оболочки, ортогональную систему координат (s, ζ), где s – длина дуги срединной линии поперечного сечения оболочки, ζ – расстояние, отсчитываемое по нормали от срединной линии. Полагается, что положительное направление нормали ориентировано в глубь жидкости. Примем следующие обозначения: $2d$ – толщина оболочки; $R(s)$ – радиус кривизны срединной линии ее поперечного сечения; R_0, a – характерные значения радиусов кривизны срединной линии и внешнего контура поперечного сечения; $\eta = d/R_0$; $u(s, \zeta)$, $w(s, \zeta)$ – перемещения оболочки по касательной и нормали к срединной линии поперечного сечения; $p_i(s, \zeta)$, $p_s(s, \zeta)$ – давления в падающей и рассеянной волнах; c_l, c_t – скорости продольной и поперечной волн в материале оболочки; $\gamma_0 = c_t/c_l$; c – скорость звука в жидкости; ρ, ρ_1 – плотности жидкости и материала оболочки; $\epsilon = \rho c/(\rho_1 c_t)$; ω – круговая частота; $k_t = \omega/c_t$; $k = \omega/c$; $z = k_t d$; $x = ka$.

Примем, что относительные полутолщина оболочки η и импеданс жидкости ϵ малы. Получим асимптотическое описание $(\eta \to 0,\ \epsilon \to 0)$ формы резонансных кривых для резонансов волн Лэмба высших порядков с номерами $n \ll \eta^{-1}$. При исследовании резонансов с такими номерами будем использовать одномерные уравнения [4], описывающие высокочастотные длинноволновые колебания погруженной в жидкость оболочки в окрестности частот запирания. Эти уравнения имеют вид

$$w_0'' + (t_1 + is_1)\, w_0 = F_1, \tag{1}$$

$$(1 - is_2)\, u_0'' + t_2 u_0 = F_2. \tag{2}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$t_1 = \frac{1}{p_1}\left(q_1 + \frac{k_t + r_1}{d} - \frac{z_1}{d^2}\right), \quad s_1 = \frac{\epsilon}{2d^2 p_1},$$

$$F_1 = \mp \frac{(-1)^m}{2dc_t^2 \rho_1 z_1 p_1}\left(p_i + \frac{i}{x}\frac{\partial p_i}{\partial \zeta_0}\right)\Bigg|_{\zeta = d} \tag{3}$$

$(\zeta_0 = \zeta/a,\ m = 1, 2, 3, \ldots)$,

$p_1 = (2z_1\gamma_0^2)^{-1} + 4z_1^{-2}\delta_1, \quad q_1 = -2[1 - 1/(16\gamma_0^2)]/[z_1 R^2(s)]$,

$r_1 = \epsilon c/[4c_t z_1 R(s)]$,

$$\delta_1 = \begin{cases} \operatorname{ctg} z_1 \\ -\operatorname{tg} z_1 \end{cases}, \quad z_1 = \begin{cases} 1/2\pi(2m-1)\gamma_0^{-1} \\ \pi m \gamma_0^{-1} \end{cases},$$

$$t_2 = \frac{1}{p_2}\left(q_2 + \frac{k_t}{d} - \frac{z_2}{d^2}\right), \quad s_2 = \frac{2\epsilon}{p_2}\left(\frac{\gamma_0\delta_2}{z_2}\right)^2,$$

$$F_2 = \pm \frac{(-1)^m \delta_2}{c_t^2 p_1 z_2^2 p_2}\frac{\partial}{\partial s}\left(p_i + \frac{i}{x}\frac{\partial p_i}{\partial \zeta_0}\right)\Bigg|_{\zeta = d},$$

$p_2 = (2z_2)^{-1} + 4z_2^{-2}\delta_2\gamma_0, \quad q_2 = -15/[8z_2 R^2(s)]$,

$$\delta_2 = \begin{cases} -\operatorname{tg}\gamma_0 z_2 \\ \operatorname{ctg}\gamma_0 z_2 \end{cases}, \quad z_2 = \begin{cases} \pi m \\ 1/2\pi(2m-1). \end{cases}$$

В (1)–(3) и далее верхние (нижние) знаки и выражения в фигурных скобках соответствуют квазисимметричным (квазиантисимметричным) относительно срединной линии $\zeta = 0$ колебаниям оболочки.

Уравнения (1), (2) применимы для описания резонансов с номерами $n \ll \eta^{-1}$ в окрестности частот запирания $|z - z_l| \ll 1$ $(l = 1, 2)$. Перемещения оболочки восстанавливаются по одномерным функциям w_0, u_0 из приближенных формул[1]

$$w(s, \zeta) = w_0(s)\begin{cases} \sin(d^{-1}\gamma_0 z_1 \zeta) \\ \cos(d^{-1}\gamma_0 z_1 \zeta) \end{cases},$$

$$u(s, \zeta) = u_0(s)\begin{cases} \cos(d^{-1} z_2 \zeta) \\ \sin(d^{-1} z_2 \zeta) \end{cases}. \tag{4}$$

Будем называть колебания оболочки, описываемые уравнениями (1), (2), высокочастотными длинноволновыми колебаниями первого и второго типа соответственно. В [4] показано, что колебания первого типа являются квазипоперечными $(w \gg u)$, а колебания второго типа – квазитангенциальными $(u \gg w)$. В отличие от уравнений, используемых в [3], для определения положения резонансов здесь учтены члены с множителями is_l $(l = 1, 2)$, соответствующие потерям на излучение, а также члены F_l, соответствующие действию акустической волны. Однородные уравнения [3] получаются из (1), (2) при $s_l = F_l = 0$.

Уже из вида выписанных уравнений можно заключить (сопоставляя члены с множителями is_l), что резонансные кривые, соответствующие высокочастотным длинноволновым колебаниям первого и второго типа, будут кардинально отличаться друг от друга.

При выводе уравнений (1), (2) использовалось обстоятельство, что в случае высокочастотных длинноволновых колебаний оболочки рассеянное давление допускает корот-

[1] В настоящей работе все приближенные формулы записываются через знак равенства.

коволновую асимптотику вида ($x \gg 1$)

$$p_s(s,\zeta) = \sqrt{\frac{d+R(s)}{\zeta+R(s)}}\, p_s(s,d)\exp[i\,\frac{\omega}{c}\,(\zeta-d)]. \tag{5}$$

С учетом (5) из уравнения Эйлера и условия непротекания [5] можно с точностью до второстепенных членов выразить рассеянное давление на поверхности контакта оболочки с жидкостью через нормальное перемещение первой:

$$p_s(s,d) = -i\rho c\omega\, w(s,d) + \frac{i}{x}\,\frac{\partial p_i}{\partial \zeta_0}\bigg|_{\zeta=d}. \tag{6}$$

Из формулы (4) вытекает, что для высокочастотных длинноволновых колебаний первого типа

$$w(s,d) = \mp(-1)^m w_0(s). \tag{7}$$

Для колебаний второго типа [4]

$$w(s,d) = \pm(-1)^m\, 2d\delta_2 z_2^{-1} u_0'(s). \tag{8}$$

При $w(s,d) \equiv 0$ (6) представляет давление, рассеянное акустически жестким цилиндром, которое в настоящей статье будет принято за фоновый уровень. Все последующие оценки будем производить относительно указанного фонового уровня, полагая при этом нулем второе слагаемое в (6).

Определив из (1), (2) w_0, u_0, можно по формулам (5)–(8) перейти к давлению $p_s(s,\zeta)$, рассеянному оболочкой. Наиболее просто это осуществить для круговой цилиндрической оболочки, когда $R(s) = R_0$, $s = R_0\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, $a = R_0 + d$, а давление в падающей волне можно представить в виде ряда

$$p_i(s,\zeta) = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n I_n[k(R_0+\zeta)]\cos n\theta, \tag{9}$$

где $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_n = 2$ при $n \geqslant 1$, p_0 – постоянная, имеющая размерность давления.

Получим асимптотическое представление ($\eta \to 0$, $\epsilon \to 0$, $n \ll \eta^{-1}$) для резонансного компонента парциальных мод $\xi_n(x)$, который по определению равен нормированному на $p_0(1/2a/\zeta)^{1/2}$ модулю n-го члена разложения $p_s(s,\zeta)$ в ряд Фурье по $\cos(n\theta)$ в дальнем поле ($\zeta \to \infty$) [5]. Из (5), (6) вытекает, что

$$\xi_n = \sqrt{2}\,p_0^{-1}\,|p_{sn}(s,d)| = \sqrt{2}\,p_0^{-1}\rho c\omega\,|w_n(s,d)|. \tag{10}$$

Здесь $p_{sn}(s,d)$, $w_n(s,d)$ – рассеянное давление и нормальное перемещение на поверхности контакта $\zeta = d$ при давлении в падающей волне, равном n-му члену ряда (9). Подставляя (9) в (1)–(3) и определяя затем по (7), (8) $w_n(s,d)$, получим асимптотические представления резонансного компонента парциальных мод волн Лэмба для колебаний двух типов ($\theta = \pi$):

$$\xi_n = A(x)R(z), \quad R(z) = \frac{\Gamma_{nl}}{|z - z_{nl} + i\Gamma_{nl}|}, \quad l = 1, 2. \tag{11}$$

Входящие в (11) резонансные частоты z_{nl}, амплитуды $A(x)$ и коэффициенты затухания Γ_{nl} определяются по формулам

$$z_{nl} = z_l + \eta^2(n^2 p_l^2 - \upsilon_l^2), \quad \upsilon_1 = -2[1 - 1/(16\gamma_0^2)]/z_1 + \epsilon c/(4\eta c_t z_1),$$
$$\upsilon_2 = -15/(8z_2), \tag{12}$$
$$\Gamma_{n1} = 1/2\epsilon, \quad \Gamma_{n2} = 1/2\epsilon n^2\eta^2\alpha^2, \quad \alpha = 2\gamma_0\delta_2/z_2, \tag{13}$$
$$A(x) = 4/\sqrt{\pi x}. \tag{14}$$

Из вида приведенных асимптотик непосредственно вытекает, что амплитуды первых резонансов волн Лэмба высших порядков одинаковы для двух типов высокочастот-

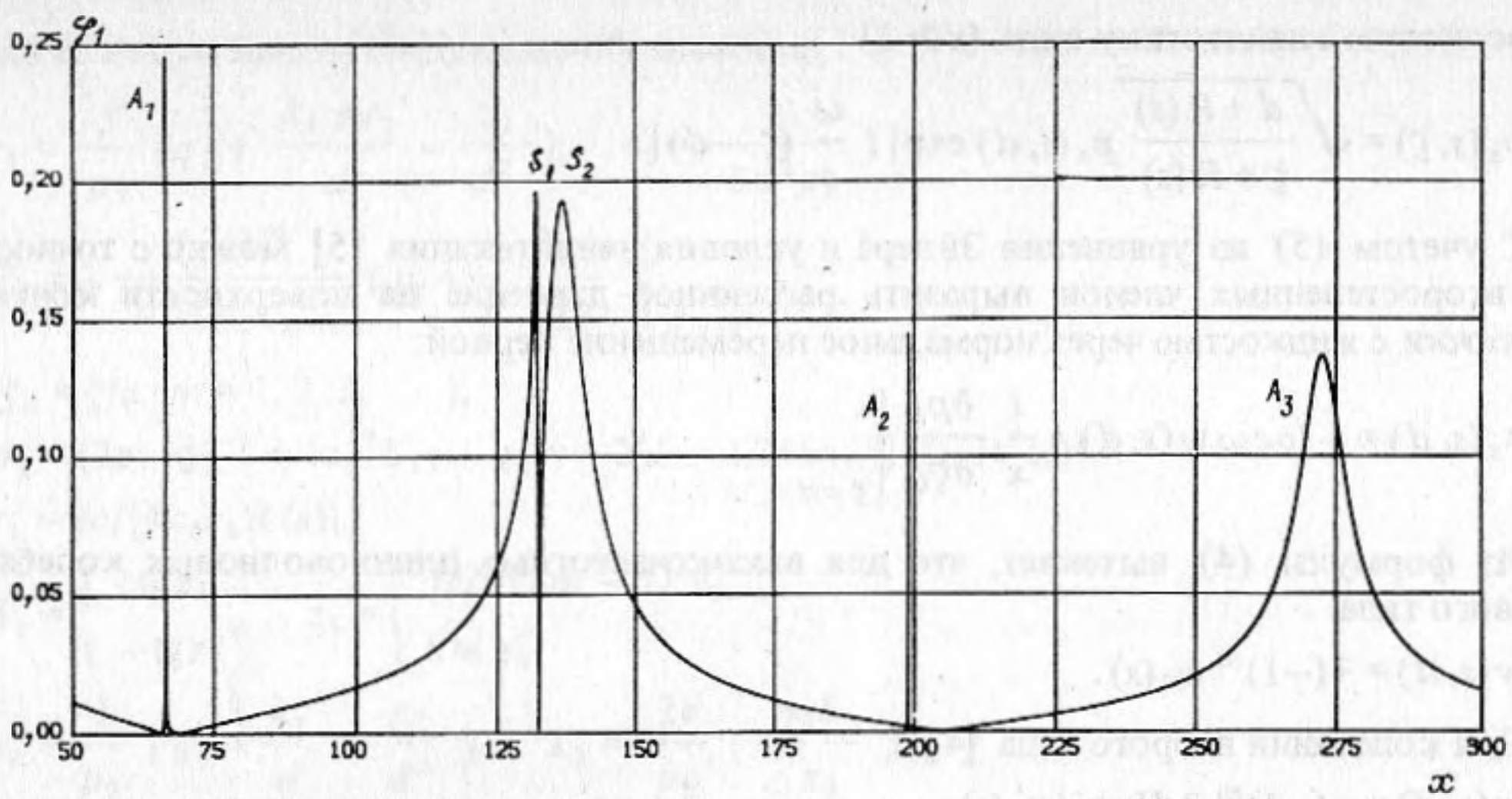

Рис. 1. Зависимость модуля первой парциальной моды от волнового радиуса

ных длинноволновых колебаний и зависят только от x_{nl} – положения частоты резонанса на оси x.

Формулы для коэффициентов затухания (13) указывают на принципиальное различие между семействами волн Лэмба, соответствующими двум типам высокочастотных длинноволновых колебаний. Для волн первого семейства ($l = 1$) ширина резонансов не зависит от их номера, тогда как для волн второго семейства ширина резонансов растет с увеличением номера пропорционально n^2. При этом ширина резонансов волн первого семейства в $n^2\eta^{-2}$ раз больше, чем ширина соответствующих резонансов второго семейства.

Как и следовало ожидать, формулы (12) совпадают с формулами для резонансных частот, полученными в [3] из решения однородных задач.

Для проверки работоспособности формул (11)–(14), исходя из них, были получены резонансные компоненты для погруженной в воду пустой алюминиевой оболочки с относительной толщиной $h = 2d/a = 1/10$ при следующих значениях параметров: алюминий – $\rho_1 = 2{,}79 \cdot 10^3$ кг/м^3, $c_l = 6380$ м/с, $c_t = 3100$ м/с; вода – $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, $c = 1470$ м/с. Независимый расчет был проведен с помощью резонансной теории рассеяния (РТР) [6] (аналитическое решение). Для определения параметров x_{nl} и Γ_{nl} по таблично заданным значениям ξ_n использовалась формула (11) и метод наименьших квадратов. Рассматриваемым ниже волнам Лэмба соответствуют следующие значения индексов l, m: 2 и 1 (S_1), 1 и 1 (S_2) для симметричных волн и 2 и 1 (A_1), 2 и 2 (A_2), 1 и 1 (A_3) для антисимметричных волн.

На рис. 1 изображена зависимость модуля первой парциальной моды φ_1 от волнового радиуса x. В выбранном масштабе графики аналитического и асимптотического решений совпадают. В рассматриваемом диапазоне x наблюдаются резонансы следующих волн Лэмба: A_1, A_2, A_3, S_1, S_2. Резонансы волн A_3, S_2, соответствующих колебаниям первого типа ($l = 1$), недобротны, а резонансы волн A_1, A_2, S_1, соответствующих колебаниям второго типа ($l = 2$), весьма добротны. Как уже отмечалось, это обстоятельство связано с различием в значениях коэффициентов затухания для $l = 1$ и $l = 2$ (см. (13)).

Согласно (11), резонансные кривые описываются тремя параметрами: частотой резонанса x_{nl}, амплитудой $A_{nl} = A(x_{nl})$ и коэффициентом затухания Γ_{nl}. Сопоставление точных и асимптотических значений частот резонансов приведено в [3]. Поэтому ниже основное внимание уделяется параметрам A_{nl} и Γ_{nl}. Число резонансов n_*, для которых значения амплитуд, найденных по асимптотическим формулам, отличаются от точных их значений не более чем на 5%, принимает следующие значения: $n_* = 5$ (для S_1), $n_* = 6$ (для S_2), $n_* = 16$ (для A_1), $n_* = 44$ (для A_2), $n_* = 60$ (для A_3). Соглас-

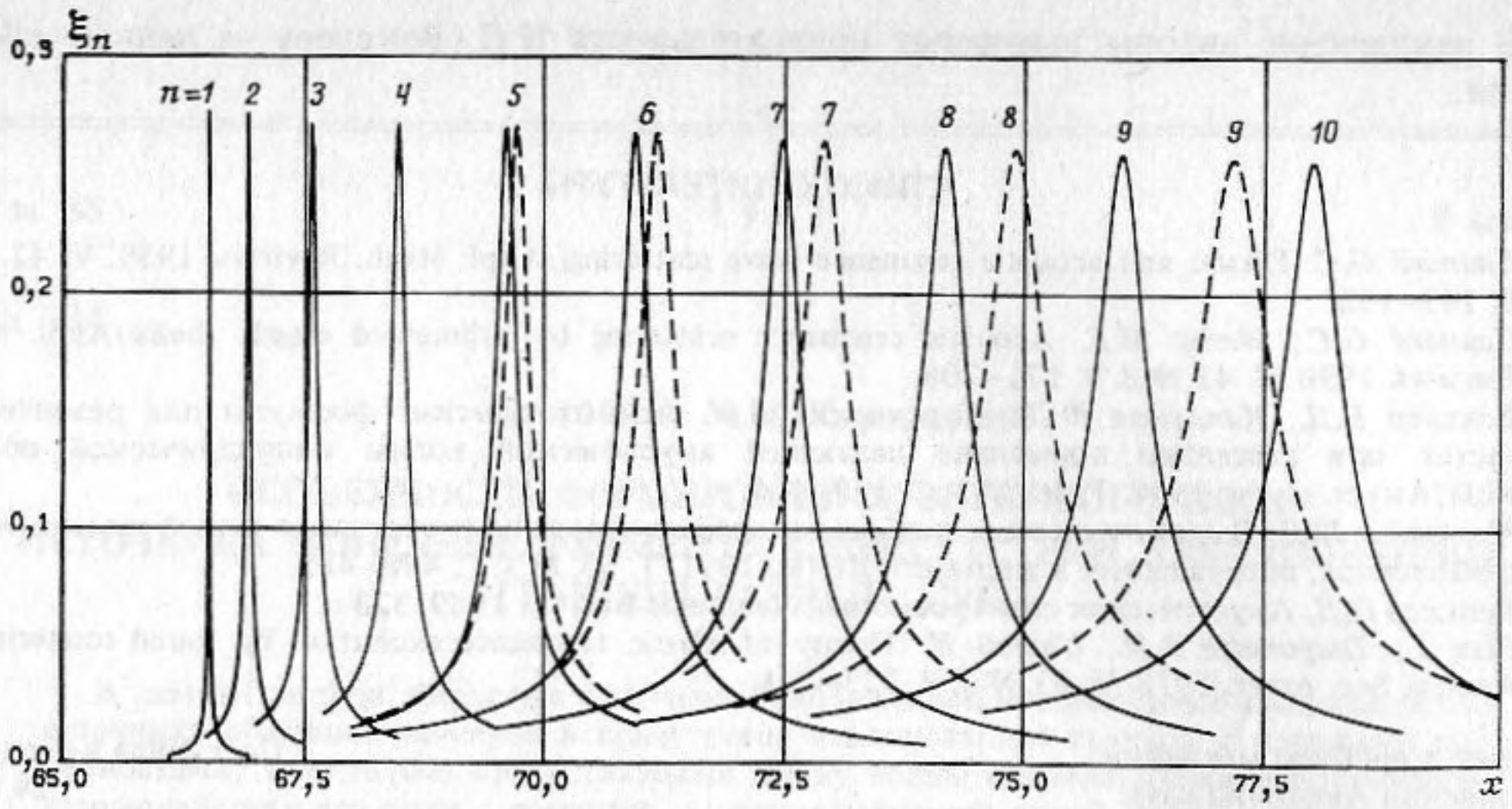

Рис. 2. Резонансные компоненты волны A_1

но формуле (14), амплитуда A_{nl} вычисляется при $x = x_{nl}$, поэтому погрешность при определении x_{nl} существенным образом влияет на величину A_{nl}.

При $n \leqslant 16$ погрешность определения амплитуды резонансов волны A_1 по формуле (14) составляет менее 5%. С увеличением номера n растет погрешность определения резонансных частот и соответственно падает точность формулы (14). Точность формулы (14) можно существенно повысить, если в ней использовать значения резонансных частот, полученные из аналитического решения. Отмеченное обстоятельство не является случайным. Сравнив формулу (11) с разложением парциальной моды в окрестности резонансной частоты (см. [5]), получим, что для круговой цилиндрической оболочки формула (14) справедлива для любых n.

На рис. 2 показаны резонансные компоненты первых десяти парциальных мод волны A_1. Сплошная линия соответствует аналитическому решению, пунктирная – асимптотическому. При $n = 1 - 4$ обе линии сливаются. Асимптотическая формула сдвигает резонансные частоты вправо. При $n \geqslant 9$ погрешность определения резонансных частот становится соизмеримой с расстоянием между ними. Как и следовало ожидать (см. (13) при $l = 2$), при малых n резонансы волны A_1 добротны (узки), а с ростом n их добротность падает. Асимптотическая формула завышает значения коэффициента затухания Γ_{n2}. При $n = 10$ погрешность превышает 50%.

Значение коэффициента затухания резонансных компонент парциальных мод волны A_3 при $n \leqslant 10$ практически не меняется. В этом диапазоне пригодна асимптотическая формула (13), дающая $\Gamma_{n1} = 0{,}085$. При увеличении n добротность волны A_3 растет, а эффективность формулы (13) уменьшается.

При выбранных параметрах материала оболочки ($\nu = 0{,}3456$) критические частоты запирания волн S_1 и S_2 располагаются недалеко одна от другой, в результате чего становятся справедливыми сильные неравенства $\delta_1 \gg 1$, $\delta_2 \gg 1$. Их выполнение делает проблематичной возможность использования уравнений (1), (2) [4]. Действительно, расчеты показывают, что в этом случае удовлетворительно определяется коэффициент затухания лишь для первого резонанса волн S_1 и S_2. При ν, существенно отличном от 1/3, точность приведенных формул для волн S_1 и S_2 не уступает точности формул для волн иных типов.

В случае некруговой цилиндрической оболочки задача несколько усложняется из-за того, что приходится раскладывать в тригонометрический ряд на внешнем контуре сечения оболочки давление в падающей волне и решать одномерные уравнения (1), (2) с переменными по s коэффициентами. Однако связанные с этим трудности не сопоставимы с трудностями, возникающими при решении задачи в точной постановке.

В заключение авторы выражают признательность Н.Д. Векслеру за ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gaunard G.C.* Elastic and acoustic resonance wave scattering//Appl. Mech. Reviews. 1989. V. 42. № 6. P. 143–192.
2. *Gaunard G.C., Werby M.F.* Acoustic resonance scattering by submerged elastic shells//Appl. Mech. Reviews. 1990. V. 43. № 8. P. 171–208.
3. *Векслер Н.Д., Каплунов Ю.Д., Корсунский В.М.* Асимптотические формулы для резонансных частот при рассеянии нормально падающей акустической волны цилиндрической оболочкой//Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 399–404.
4. *Каплунов Ю.Д.* Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменяемости в оболочках, погруженных в жидкость//ПММ. 1991. Т. 55. № 3. С. 478–485.
5. *Векслер Н.Д.* Акустическая спектроскопия. Таллинн: Валгус, 1989. 323 с.
6. *Flax L., Dragonette L.R., Uberall H.* Theory of elastic resonance excitation by sound scattering//J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. № 3. P. 723–731.

Институт проблем механики
Российской Академии наук

Поступила в редакцию
24.01.91

Yu.D. Kaplunov, V.M. Korsunskii

DESCRIPTION OF THE HIGH-ORDER LAMB WAVES RESONANCES IN SCATTERING PROBLEM FOR A CYLINDRICAL SHELL

The steady-state problem of a high-frequency plane acoustic wave scattering by an empty elastic cylindrical shell is considered. Resonances of the high-order Lamb waves are investigated. The one-dimensional equations (1) and (2) describing high-frequency long-wave vibrations of a shell submerged in a liquid in the vicinities of thickness resonance frequencies are used as governing ones. These equations have been proposed recently in [4].

The explicit asymptotic formulas for the damping factor (13) and magnitude (14) are proposed for the first resonances of the symmetric S_l and antisymmetric A_l ($l = 1, 2, 3, \ldots$) Lamb waves in the case of a circular cylindrical shell. The asymptotic formulas for the resonance frequencies (12) have been suggested already in [3]. All these formulas are obtained in the assumption that the relative thickness of a shell and the relative impedance of a liquid are small. The comparison of the factors asymptotic values with the exact ones shows a good simularity.

The asymptotic formulas mentioned above show that the damping factor (the resonances width) depends significantly on a shell vibrations type in the resonance thickness vicinities. The resonances width of quasi-transversal vibrations (for such vibrations a shell transversal displacement exceeds considerably the tangential one) is greater than the width of corresponding resonances of quasi-tangential vibrations (for these vibrations a shell tangential displacement exceeds considerably the transversal one). The resonances width for quasi- transversal vibrations does not depend on their number. For quasi-tangential vibrations the resonances width increases as n^2 with the increase of their number n.