АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 3

УДК 534.213

© 1992 г. В.А. Буров, О.Д. Румянцева

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В статье обсуждается алгоритм восстановления двумерных неоднородностей на основе знания амплитуды рассеяния скалярной монохроматической плоской волны. Рассматриваемый алгоритм базируется на применении функционально-аналитических методов к решению обратных задач акустического рассеяния и предоставляет весьма существенную экономию вычислительных затрат при организации процесса численной реконструкции рассеивателя. Алгоритм предполагает восстановление рассеивателей средней силы, для которых можно пренебречь рассеянием назад, что в свою очередь приводит к ограничениям на пространственный спектр рассеивателя, зависящим от силы рассеивающей неоднородности. Попытка же восстановления как сильных неоднородностей, так и неоднородностей средней силы, но широкополосных по спектру, приводит к явно выраженной неустойчивости задачи, что не является свойством лишь рассматриваемого алгоритма, а присуще самой обратной задаче исследуемого типа.

Функционально-аналитические методы решения обратных задач рассеяния, как в квантово-механической постановке, так и в классическом волновом варианте, приобретают в настоящее время все большее значение. Актуальность проблемы связана с тем, что функциональный подход к обратным векторным и скалярным задачам является, в целом, наиболее общей и информативной теорией. В связи с этим данная статья преследует несколько целей. Во-первых, привлечь внимание физиков-акустиков к алгоритмам восстановления рассеивающей неоднородности, полученным в последние годы при исследовании многомерных задач рассеяния. Так, в работах [1, 2] изложены основные идеи, позволяющие разработать алгоритмы численной реконструкции двумерных рассеивателей при монохроматическом режиме зондирования. Во-вторых, осмыслить суть этих алгоритмов с физической точки зрения и оценить тем самым область их применимости для обратных задач волнового рассеяния. И, в-третьих, провести исследование возможности практической реализации алгоритмов для прикладных обратных задач акустического рассеяния – так называемой акустической томографии.

Практически вся имеющаяся на сегодняшний день литература, посвященная рассмотрению обратной задачи рассеяния на основе функционально-аналитических методов, имеет четко выраженную математическую направленность и профессиональную специфику, поэтому она не всегда попадает в поле зрения читателей с несколько иным профилем интересов. Учитывая это обстоятельство, не будет, вероятно, излишним изложить основные понятия, идеи, обозначения и общие уравнения, являющиеся базой для алгоритма восстановления неоднородности, который будет анализироваться далее.

Исходным для обратной задачи рассеяния скалярных волн является уравнение

$$\Delta\psi + k_0^2\psi = v(\mathbf{x})\psi, \tag{1}$$

где $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ – акустическое поле, $\mathbf{k}$ – волновой вектор зондирующего монохроматического поля плоских волн $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$ частоты ω_0 в свободном пространстве, $\mathbf{k}^2 = k_0^2 > 0$, $v(\mathbf{x})$ – действительная функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности или имеющая финитный носитель, характеризующая в акустике неоднородности скорости распространения волн,

$$v(\mathbf{x}) = \omega_0^2(1/c_0^2 - 1/c^2(\mathbf{x}));$$

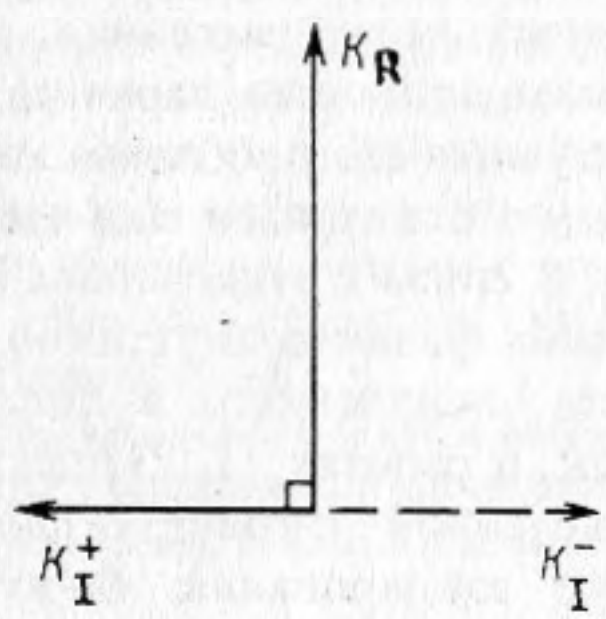
c_0 и $c(\mathbf{x})$ – скорости волны в фоновой среде, и в среде, содержащей рассеиватель. Уравнение (1) справедливо во всем пространстве вне источников падающего поля. Во многих томографических схемах функция $v(\mathbf{x})$ реконструируется на основе измеренной в эксперименте амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ поля, создаваемого данной неоднородностью; $\mathbf{l}$ – волновой вектор в свободном пространстве, соответствующий рассеянной волне. Затухание волн в среде учитываться не будет, поэтому $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ считаются действительными волновыми векторами: $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = \mathbf{k}_0^2$, n – размерность пространства. Однако при проведении математических выкладок часто бывает удобно формально распространить волновые векторы на область комплексных значений, считая, что $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}_R + i\mathbf{l}_I$, где $\mathbf{k}_R, \mathbf{k}_I, \mathbf{l}_R, \mathbf{l}_I \in \mathbb{R}^n$. При этом переход от действительных значений $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ к комплексным требуется осуществить таким образом, чтобы не происходило ухода с k_0^2-поверхности в пространстве волновых векторов, т.е. должны соблюдаться условия:

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = k_0^2, \quad |\mathbf{k}_R| = |\mathbf{l}_R|, \quad |\mathbf{k}_I| = |\mathbf{l}_I|; \quad \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^n. \tag{2}$$

С физической точки зрения наличие комплексной части у волновых векторов можно интерпретировать как фиктивные возбуждения и прием неоднородных волн, поскольку при $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^n$ падающее поле имеет вид

$$\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{k}_R\mathbf{x} - \mathbf{k}_I\mathbf{x}),$$

причем $\mathbf{k}_I \perp \mathbf{k}_R$, поскольку для удовлетворения требований (2) вектор k_I должен быть перпендикулярен вектору $\mathbf{k}_R$, а $\mathbf{l}_I$ перпендикулярен $\mathbf{l}_R$. В двумерном случае существуют только две возможные ориентации вектора $\mathbf{k}_I$ ($\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+$, $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-$) относительно фиксированного вектора $\mathbf{k}_R$ (см. рисунок), при этом $\mathbf{k}_I^2 = \mathbf{k}_R^2 - k_0^2$. Более того,



Взаимная ориентация двумерных волновых векторов

для двумерных рассеивателей, о которых и будет идти речь в данной статье, принципиален тот факт, что вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ в пространстве координат и векторы $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^n$ имеют именно две компоненты, что позволяет перейти от переменных

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{k} = \{k_1 = k_{1R} + ik_{1I},\ k_2 = k_{2R} + ik_{2I}\},$$
$$\mathbf{l} = \{l_1 = l_{1R} + il_{1I},\ l_2 = l_{2R} + il_{2I}\}$$

к новым комплексным переменным

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2,$$
$$\lambda = \frac{k_1 + ik_2}{k_0}, \quad \lambda' = \frac{l_1 + il_2}{k_0}. \tag{3}$$

Тем самым устанавливается взаимооднозначное соответствие между вектором $\mathbf{x}$ и точкой z на комплексной плоскости, а также между вектором $\mathbf{k}$ (аналогично $\mathbf{l}$) и точкой λ (аналогично λ') на комплексной плоскости. В частности, величина $|\lambda|$ монотонно зависит от величины $|\mathbf{k}_I|$:

$$|\lambda| = \frac{1}{k_0}\left(\sqrt{k_0^2 + \mathbf{k}_I^2} \mp |\mathbf{k}_I|\right). \tag{4}$$

Верхний знак в (4) относится к случаю $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+$; при этом с ростом $|\mathbf{k}_I^+|$ от 0 до ∞ величина $|\lambda|$ монотонно уменьшается от 1 до 0. Нижний знак в (4) относится к случаю $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-$; с ростом $|\mathbf{k}_I^-|$ от 0 до ∞ величина $|\lambda|$ монотонно увеличивается от 1 до ∞. Поэтому на комплексной плоскости λ при изменении модуля и направления $\mathbf{k}_R$ (следовательно, и $\mathbf{k}_I$) становятся достижимыми все те точки λ, которые лежат внутри окружности единичного радиуса ($|\lambda| \leqslant 1$), если $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+$, все точки λ, лежащие вне этой окружности ($|\lambda| \geqslant 1$), если $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-$.

Следующий этап связан с переходом от решений $\psi = u^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ уравнения (1), рассматриваемого для действительных $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, к решениям $\psi = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ этого уравнения при $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Функции $u^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ удовлетворяют уравнению Липпмана-Швингера

$$u^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \int\limits_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2} G_{\pm}^0(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{k}) v(\mathbf{y}) u^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{k}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

($G_{\pm}^0$ – классические функции Грина, соответствующие волнам с опережающим и запаздывающим потенциалом) и связаны между собой посредством амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ $(\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^2)$ следующим соотношением [3, 4]:

$$u^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = u^{-}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - 2\pi i \int\limits_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \delta(\mathbf{k}^2 - \mathbf{l}^2) u^{-}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) d\mathbf{l}. \tag{6}$$

По аналогии функция $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ удовлетворяет уравнению типа (5), которое удобнее записать для функции $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, \mathbf{k})$:

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = 1 + \int\limits_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{k}) \mu(\mathbf{y}, \mathbf{k}) v(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2. \tag{7}$$

Здесь

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\xi \in \mathbb{R}^2} \frac{e^{i\xi\mathbf{x}}}{\xi^2 + 2\mathbf{k}\xi} d\xi, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I, \tag{8}$$

– функция Грина, введенная Л.Д. Фаддеевым; в частности,

$$G_{\pm}^0(\mathbf{x}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R) = e^{i\mathbf{k}_R\mathbf{x}} \lim_{\epsilon \to +0} G\left(\mathbf{x}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R \pm i\epsilon \frac{\mathbf{k}_R}{|\mathbf{k}_R|}\right),$$

однако далее выражение (8) будет применяться для рассматриваемого случая $\mathbf{k}_I \perp \mathbf{k}_R$. Надо также отметить, что функция $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ является решением уравнения

$$\Delta\mu + 2i(\mathbf{k}, \nabla\mu) = v(\mathbf{x})\mu, \tag{9}$$

а не уравнения (1), причем $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \to 1$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$. С ее помощью вводится функция $h(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, обобщающая амплитуду рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ на случай $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^2$:

$$h(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = h(\mathbf{k}, \mathbf{l}_R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \exp[i(\mathbf{k}_R - \mathbf{l}_R)\mathbf{x}] \mu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{10}$$

$$f(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R, \mathbf{l} = \mathbf{l}_R) = \lim_{\epsilon \to +0} h\left(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\epsilon \frac{\mathbf{k}_R}{|\mathbf{k}_R|}, \mathbf{l}_R\right).$$

Важным частным случаем функции $h(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ является функция $h_1(\mathbf{k}) = h(\mathbf{k}, \mathbf{l} = -\overline{\mathbf{k}})$ (черта над вектором $\mathbf{k}$ означает комплексное сопряжение), которая, в виду аналогии между $h(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ $(\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^2)$ и $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ $(\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^2)$, ответственна за поле неоднородных волн, рассеянное назад, подобно тому, как амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ $(\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2)$ определяет в дальней зоне рассеянное назад поле в случае облучения неоднородности плоской монохроматической волной. Обсуждаемый далее алгоритм восстановления двумерных рассеивателей базируется на требовании

$$h_1(\mathbf{k}) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{k}, \tag{11}$$

которое, в силу физического смысла функции $h_1(\mathbf{k})$, означает, что рассматривается класс рассеивателей $v(\mathbf{x})$, не создающих рассеянного назад поля неоднородных волн

ни для одного ракурса облучения. Выполнение этого требования носит приближенный характер и накладывает ограничения на скорость спадания пространственного спектра функции $v(\mathbf{x})$, зависящие от силы рассеивателя. Действительно, подставляя в (10) функцию $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, записанную на основе (7) через ряд Борна-Неймана по степеням функции рассеивателя, можно получить, что тождество (11) будет выполнено для m-го порядка ряда Борна-Неймана (номер $m = 1$ соответствует приближению Борна), если фурье-образ $\tilde{v}(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R}^2)$ функции $v(\mathbf{x})$ финитен, причем

$$\tilde{v}(\xi) \equiv 0, \qquad |\xi| \geqslant \frac{2k_0}{m}. \tag{12}$$

Условие (12) обеспечивает также отсутствие рассеяния назад и в классическом случае $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$. Однако говорить об обращении в нуль функций $f(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ и $h(\mathbf{k}, -\bar{\mathbf{k}})$ правомерно лишь при учете конечного числа m членов разложения для $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, когда соотношение (12) может быть удовлетворено. При абсолютно же строгом рассмотрении $m \to \infty$, и поэтому условие (12) не может быть точно выполнено для спектра ни одного рассеивателя.

Переходя непосредственно к обсуждению двумерной обратной акустической задачи рассеяния, надо отметить, что в работах [1, 2, 5] изложены основные идеи, позволяющие построить алгоритм численной реконструкции рассеивающей двумерной неоднородности на основе монохроматических данных о рассеянном поле. В этой же статье предпринимается попытка физического осмысления результатов, приводимых в указанной литературе, и ставится вопрос о границах применимости предлагаемого алгоритма в обратных задачах акустической томографии.

Как уже упоминалось, двумерность рассеивателя позволяет перейти от переменных $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^2$ к новым переменным $z, \bar{z}$; $\lambda, \bar{\lambda}$; $\lambda', \bar{\lambda}' \in \mathbb{C}^1$ в соответствии с правилом (3). Такой переход достаточно целесообразен, поскольку становится возможным применять некоторые результаты из теории функций комплексных переменных. В новых переменных падающая волна принимает вид $\exp(i\mathbf{kx}) = \exp[ik_0(\lambda\bar{z} + z/\lambda)/2]$, функция рассеивателя $v(\mathbf{x}) = v(z, \bar{z})$, волновые функции $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \psi(z, \bar{z}, \lambda, \bar{\lambda})$ и $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \exp[-ik_0(\lambda\bar{z} + z/\lambda)/2]\psi(z, \bar{z}, \lambda, \bar{\lambda})$, амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = f(\lambda, \lambda')$ $(\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^2$, следовательно, $|\lambda| = |\lambda'| = 1)$ и функция, ответственная за рассеяние неоднородных волн назад, $h_1(\mathbf{k}) = h_1(\lambda, \bar{\lambda})$ $(\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$, следовательно, $\lambda \in \mathbb{C}^1)$. Функции $\psi(z, \bar{z}, \lambda, \bar{\lambda})$ непрерывны по параметру λ при $|\lambda| \neq 1$, т.е. не на единичной окружности $S = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$, на самой же S эти функции испытывают скачок. Существуют предельные значения $\psi^{\pm}(z, \bar{z}, \lambda) = \psi(z, \bar{z}, \lambda(1 \mp 0))$, $|\lambda| = 1$ (аналогично $\mu^{\pm}(z, \bar{z}, \lambda) = \mu(z, \bar{z}, \lambda(1 \mp 0))$, $|\lambda| = 1$), которые связаны между собой ρ-соотношением, классическим прообразом которого является уравнение (6):

$$\psi^{+}(z, \bar{z}, \lambda) - \psi^{-}(z, \bar{z}, \lambda) = \int\limits_{|\lambda'| = 1} \rho(\lambda, \lambda')\psi^{-}(z, \bar{z}, \lambda')\,|d\lambda'|, \qquad |\lambda| = 1. \tag{13}$$

Теперь можно кратко изложить основные моменты построения алгоритма реконструкции двумерного рассеивателя $v(z, \bar{z})$. Во-первых, из уравнения (7), записанного в переменных (3), следует, что при $\lambda \to \infty$

$$\mu(z, \bar{z}, \lambda, \bar{\lambda}) = 1 + \frac{\mu_1(z, \bar{z})}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где $\mu_1(z, \bar{z})$ – функция, не зависящая от λ. Тогда из уравнения (9), также переписанного в новых переменных и рассмотренного для предельных значений $\lambda \to \infty$, вытекает связь [1, 5]

$$v(z, \bar{z}) = 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \mu_1(z, \bar{z}). \tag{14}$$

Во-вторых, функция $\mu(z, \bar{z}, \lambda, \bar{\lambda})$ однозначным образом связана с величиной своего

скачка

$$K(z, \bar{z}, \lambda) = \mu^{+}(z, \bar{z}, \lambda) - \mu^{-}(z, \bar{z}, \lambda), \quad |\lambda| = 1, \tag{15}$$

на единичной окружности S формулой [6]

$$\mu(z, \bar{z}, \lambda, \bar{\lambda}) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda'|=1} \frac{K(z, \bar{z}, \lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda', \quad \lambda \in \mathbb{C}^1, \quad |\lambda| \neq 1, \tag{16}$$

справедливой в случае соблюдения условия (11), которое в переменных λ и $\bar{\lambda}$ имеет вид

$$h_1(\lambda, \bar{\lambda}) \equiv 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^1. \tag{17}$$

Следовательно, для неоднородности, не создающей рассеяния назад,

$$\mu_1(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda'|=1} K(z, \bar{z}, \lambda') d\lambda'. \tag{18}$$

В-третьих, уравнение для $K(z, \bar{z}, \lambda)$, $|\lambda| = 1$, получается из (13) при учете определения (15) и соотношения (16), примененного для случая $|\lambda| \to 1 + 0$. При этом само ядро $\rho(\lambda, \lambda')$, $|\lambda| = |\lambda'| = 1$, связано с измеряемой в эксперименте амплитудой рассеяния $f(\lambda, \lambda')$ уравнениями (19) – (21), приведенными ниже.

Итак, реконструкция рассеивателя $v(z, \bar{z})$ по известной функции $f(\lambda, \lambda')$, $|\lambda| = |\lambda'| = 1$, при выполнении требования (17) осуществляется на основе следующей последовательности уравнений [2, 5], где все функции, зависящие от параметров типа λ, определяются при $|\lambda| = 1$, т.е. при $\mathbf{k}_I = 0$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R$. Из $f(\lambda, \lambda')$ находятся две функции $h^{\pm}(\lambda, \lambda')$, являющиеся предельными значениями функции (10) при $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^{+} \to 0$ и при $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^{-} \to 0$ соответственно [4]

$$h^{\pm}(\lambda, \lambda') - \pi i \int\limits_{|\lambda''|=1} h^{\pm}(\lambda, \lambda'') \theta \left[\pm \frac{1}{i} \left(\frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda''} \right) \right] f(\lambda'', \lambda') \, |d\lambda''| = f(\lambda, \lambda'), \tag{19}$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда. По найденным значениям $h^{\pm}(\lambda, \lambda')$ строится либо функция $f_1(\lambda, \lambda')$, либо функция $f_2(\lambda, \lambda')$

$$\begin{aligned} f_1(\lambda, \lambda') &= \theta \left[-\frac{1}{i} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right] h^{+}(\lambda, \lambda') - \theta \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right] h^{-}(\lambda, \lambda'), \\ f_2(\lambda, \lambda') &= \theta \left[-\frac{1}{i} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right] h^{-}(\lambda, \lambda') - \theta \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right] h^{+}(\lambda, \lambda'). \end{aligned} \tag{20}$$

Решая любое из интегральных уравнений (21), подобных уравнениям (19), вычисляется ядро $\rho(\lambda, \lambda')$ для ρ-соотношения (13)

$$\rho(\lambda, \lambda') + \pi i \int\limits_{|\lambda''|=1} \rho(\lambda, \lambda'') \theta \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\lambda'}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda'} \right) \right] f_1(\lambda'', \lambda') \, |d\lambda''| = -\pi i f_1(\lambda, \lambda'), \tag{21}$$

$$\rho(\lambda, \lambda') + \pi i \int\limits_{|\lambda''|=1} \rho(\lambda, \lambda'') \theta \left[-\frac{1}{i} \left(\frac{\lambda'}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda'} \right) \right] f_2(\lambda'', \lambda') \, |d\lambda''| = -\pi i f_2(\lambda, \lambda').$$

Уравнение для $K(z, \bar{z}, \lambda)$ базируется на ρ-соотношении (13)

$$\begin{aligned} K(z, \bar{z}, \lambda) = \int\limits_{|\lambda'|=1} \rho(\lambda, \lambda') \exp \Big[i \frac{k_0}{2} \big((\lambda' - \lambda) \bar{z} + \\ + \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) z \big) \Big] \Big(1 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{K(z, \bar{z}, \xi)}{\xi - \lambda'(1+0)} d\xi \Big) |d\lambda'|. \end{aligned} \tag{22}$$

В этом уравнении интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{K(z, \bar{z}, \xi)}{\xi - \lambda'(1+0)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} \frac{K(z, \bar{z}, \lambda)}{\lambda - \lambda'(1+0)} d\lambda,$$

рассматриваемый в "частотном" (по λ') представлении, означает отсечение половины спектра функции $K(z, \bar{z}, \lambda)$ и сводится к вычислению быстрого преобразования Фурье (БПФ) от $K(z, \bar{z}, \lambda)$ при фиксированных z и $\bar{z}$. Поэтому в дискретном варианте уравнение (22) сводится к системе неоднородных линейных уравнений, решаемых для каждой фиксированной пары значений $(z, \bar{z})$.

Уравнения (14) и (18) позволяют вычислить $v(z, \bar{z})$ по уже известной функции $K(z, \bar{z}, \lambda)$:

$$v(z, \bar{z}) = -\frac{k_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{|\lambda|=1} K(z, \bar{z}, \lambda) d\lambda. \tag{23}$$

Алгоритм (19) – (23) обладает двумя главными особенностями. Первая особенность связана с тем, что несмотря на то, что в общем случае при учете перерассеяний обратная задача рассеяния акустических волн является нелинейной относительно восстанавливаемой функции рассеивателя в силу нелинейности ряда Борна-Неймана (за исключением приближения Борна – приближения однократного рассеяния волны), рассматриваемый алгоритм позволяет учитывать многократное рассеяние волны в рамках решения уравнений, линейных по рассеивателю. В самом деле, интегральные члены в (19) и (21) и член I в (22) обеспечивают учет перерассеяний падающего монохроматического поля плоской волны на неоднородности $v(z, \bar{z})$, за счет чего уравнения (19) – (22) нелинейны, в общем случае, относительно данных рассеяния $f(\lambda, \lambda')$. В то же время, уравнение (23) имеет один и тот же вид вне зависимости от числа учитываемых перерассеяний. Но с другой стороны, используя представление (15) через $\mu^{\pm}$ и уравнение (7), функцию $K(z, \bar{z}, \lambda)$ можно разложить в ряд Борна-Неймана по степеням функции рассеивателя, однако при этом должно оставаться справедливым соотношение (23), левая часть которого линейна относительно $v(z, \bar{z})$. Из этих соображений с неизбежностью вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{|\lambda|=1} K^{(m)}(z, \bar{z}, \lambda) d\lambda \equiv 0, \qquad m \geqslant 2,$$

где $K^{(m)}(z, \bar{z}, \lambda)$ – член ряда Борна-Неймана для функции $K(z, \bar{z}, \lambda)$, соответствующий m-му порядку; этот член содержит m сомножителей типа $v(z, \bar{z})$. Действительно, удалось показать, что при каждом фиксированном $\mathbf{x}$, т.е. при фиксированных z и $\bar{z}$,

$$\int\limits_{|\lambda|=1} K^{(m)}(z, \bar{z}, \lambda) d\lambda \equiv 0, \qquad m \geqslant 2,$$

или, возвращаясь к старым переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{k}$,

$$\int\limits_0^{2\pi} K^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) e^{i\psi} d\psi = 0, \qquad m \geqslant 2, \tag{24}$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R = \{k_0 \cdot \cos\psi, k_0 \sin\psi\}$. Была поставлена задача понять механизм, за счет которого становится справедливым соотношение (24), имея в виду цель выявить возможности обобщения рассматриваемого алгоритма на наиболее интересный для практики случай трехмерного рассеивателя. Для этого член $K^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ выписывался в явном виде через ряд Борна-Неймана и осуществлялся переход от пространства координат $\mathbf{x}$ в сопряженное с ним пространство волновых векторов ξ, т.е. рассматривался фурье-образ $\tilde{K}^{(m)}(\xi, \mathbf{k})$ от функции $K^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ по координатам $\mathbf{x}$ при фиксированном $\mathbf{k}$. Оказалось, что равенство (24) обеспечивается за счет двух действующих в совокупности причин: во-первых, за счет интегрирования по углу ψ (т.е. фактически по всем направлениям волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R$ падающей волны), благодаря тому, что в уравнении (7) вместо обычной функции Грина $G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, для однородного уравнения Гельмгольца, фигурирующей в уравнении (5), оперируют функции Грина (8) (их надо рассматривать, в данном случае, для предельных значений $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+ \to 0$ и $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^- \to 0$); во-вторых, за счет наложения ограничений на пространственный спектр рассеивателя, которые, естественно, совпадают с ограничениями (12), поскольку об-

суждаемый алгоритм строился в предположении соблюдения условия (11), или, что эквивалентно, (17).

Ограничения (12) определяют вторую особенность алгоритма, которая сводится к регуляризации решения обратной задачи рассеяния акустических волн, получаемого как на основе этого алгоритма, так и другими, например, итерационными, методами: для обеспечения устойчивости решения с ростом силы рассеивателя частотная область, в которой в основном сосредоточивается спектр рассеивателя, обязана уменьшаться. Таким образом, устойчивость восстановления требует наращивания (это отражает специфику именно нелинейных задач) регуляризации по мере необходимости учета все большего числа перерассеяний волны на неоднородности.

Весьма важной в практическом отношении является перспектива экономии вычислительных затрат, требующихся для реализации схемы (19) – (23). В предположении того, что амплитуда рассеяния измеряется для N направлений рассеяния при каждом из N заданных направлений распространения падающей волны, т.е. сам рассеиватель восстанавливается в силу безызбыточности задачи не более, чем в N^2 пространственных точках, численная реконструкция неоднородности в соответствии со схемой (19) – (23) требует по порядку величины N^4 операций. Такой порядок количества операций определяется, в сущности, уравнением (22), вычислительные затраты для решения которого будут наибольшими по сравнению с затратами на решение каждого из остальных уравнений. В то же время, разработанные итерационные алгоритмы реконструкции рассеивателя средней силы [7] путем обращения матрицы, имеющей в двумерном случае размерность $(N^2 \times N^2)$, нуждаются примерно в N^6 действиях; алгоритмы с попеременными итерациями [8, 9] в применении к рассеивателям средней силы предполагают порядка N^5 операций на каждую итерацию (использование БПФ может несколько уменьшить эту оценку), а восстановление сильного рассеивателя требует около N^6 действий. Поэтому схема (19) – (23) для приближенной (поскольку игнорируется все же существующее в реальных условиях рассеяние назад) реконструкции двумерных слабых и средней силы неоднородностей имеет с вычислительной точки зрения существенное преимущество перед перечисленными алгоритмами, особенно значимое при восстановлении сложных объектов, для которых N велико.

Для произвольного двумерного рассеивателя, создающего столь значительное рассеяние назад, что его необходимо принимать во внимание, анализировавшийся до сих пор приближенный алгоритм становится неприемлемым: уравнения (19) – (21) остаются прежними, а уравнения (22) – (23) принципиально усложняются, поскольку для нахождения $K(z, \bar{z}, \lambda)$ и $v(z, \bar{z})$ требуется уже знать функцию $h_1(\mathbf{k}) \equiv h_1(\lambda, \bar{\lambda})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$. Однако здесь возникает дополнительная трудность: функцию $h_1(\mathbf{k})$ нельзя непосредственно измерить в эксперименте. Эта функция сама находится из амплитуды рассеяния по определенной схеме [10, 11], обладающей двумя главными недостатками: чрезмерной громоздкостью при организации вычислительного процесса, влекущей за собой большие вычислительные затраты, и, в особенности, явно выраженной неустойчивостью, нарастающей по мере роста мнимой части $\mathbf{k}_I$ волнового вектора $\mathbf{k}$ [10]. Устойчивость имеет место лишь для рассеивателей, пространственный спектр которых при учете m-го порядка ряда Борна-Неймана для волновой функции может выходить из круга радиуса $2k_0/m$ крайне незначительно. Поэтому строгий в математическом плане учет рассеяния назад, снимающий ограничения на спектр рассеивателя, практически не приводит к расширению класса неоднородностей, для которых возможна удовлетворительная реконструкция.

Изложенные соображения относительно реконструкции рассеивателей, основанной на функционально-аналитических методах, позволяют сделать ряд выводов, которые, как правило, являются следствием не только конкретного алгоритма, но и, что особенно важно, отражают типичную ситуацию, внутренне присущую обратным акустическим задачам восстановления неоднородности среды в целом. Как показывает функциональный анализ, наилучшим образом поддаются восстановлению два класса неоднородностей. Первый класс представлен слабыми рассеивателями, которые могут обладать достаточно широким пространственным спектром; второй – рассеивателями

средней силы с пространственным спектром, в основном локализованном в узком частотном диапазоне. Попытка же восстановления как сильных неоднородностей с любым спектральным диапазоном, так и неоднородностей средней силы, но широкополосных по спектру, приводит к сильной неустойчивости задачи. Размерная избыточность данных рассеяния трехмерной задачи может несколько смягчить эту ситуацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гриневич П.Г., Манаков С.В.* Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера, $\bar{\partial}$-метод и нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. Вып. 2. С. 14–24.
2. *Новиков Р.Г.* Построение двумерного оператора Шредингера с данной амплитудой рассеяния при фиксированной энергии // Теорет. и мат. физика. 1986. Т. 66. Вып. 2. С. 234–240.
3. *Новиков Р.Г., Хенкин Г.М.* $\bar{\partial}$-уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния // УМН. 1987. Т. 42. Вып. 3 (255). С. 93–152.
4. *Фаддеев Л.Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния. II. // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 3. С. 93–180.
5. *Новиков Р.Г.* Обратная задача рассеяния для двумерного уравнения Шредингера при фиксированной энергии и нелинейные уравнения: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1989. 87 с.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. 2-е изд. переработ. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1962. С. 599.
7. *Буров В.А., Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Итерационный алгоритм решения обратной задачи рассеяния // Вестн. МГУ. Сер. 3, Физика, астрономия. 1982. Т. 23. № 6. С. 87–89.
8. *Буров В.А., Рычагов М.Н., Сасковец А.В.* Учет многократных рассеяний в задачах дифракционной томографии: *T*-матричный подход // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1989. Т. 30. № 1. С. 44–48.
9. *Johnson S.A., Zhou Y., Tracy M.L., Berggren M.J., Stanger F.* Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple sourse, moment method. Pt. III: Fast algorithms // Ultrason. Imag. 1984. V. 6. № 4. P. 103–106.
10. *Буров В.А., Румянцева О.Д., Сучкова Т.В.* Практические возможности применения функционального подхода к решению обратных задач рассеяния // X Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Винница. Сентябрь 1990. Волны и дифракция-90. М.: Физическое общество, 1990. Т. 3. С. 275–278.
11. *Новиков Р.Г.* Восстановление двумерного оператора Шредингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии // Функцион. анализ. и его прил. 1986. Т. 20. Вып. 3. С. 90–91.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
17.05.91

V.A. Burov, O.D. Rumiantseva

SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL ACOUSTICAL INVERSE SCATTERING PROBLEM BASED ON FUNCTIONAL-ANALYTICAL METHODS

The inverse problem of scattering inhomogeneities reconstruction based on functional-analytical methods is discussed. One of the main ways for these methods is a mathematical extension of real wave vectors to a "nonphysical" domain of complex wave vectors. The real wave vectors characterize a wave field in the medium if there is no attenuation. The complex wave vectors correspond to fictious radiation and reception of inhomogeneous waves. Such method allows to obtain the solution of the Helmholtz – type equation which has a more general character than in a classic case. Moreover, the functional-analytical methods are basic for creating of the reconstruction algorithm of two–dimensional inhomogeneities. This algorithm provides essential economy of calculation during the process of scatterers reconstruction. The algorithm presumes the reconstruction of middle force scatterers, for which the back scattering may be ignored. This fact results in the limitations of a space scatterers spectrum depending on a scatterers force. Namely, the scatterers spectrum must be localized in a certain range of space frequencies. At the same time, an attempt to reconstruct both two–dimensional middle force inhomogeneities with a wide spectrum and strong inhomogeneities leads to evident instability of the problem that is inherent to any method of solution of two–dimensional inverse problems for a monochromatic observation regime.