АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 3

УДК 534.22

© 1992 г. А.Н. Богданов, А.Т. Скворцов

НЕЛИНЕЙНЫЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЕ

Рассмотрено распространение нелинейных сдвиговых волн в зернистой среде, которая представляет собой сжатую кубическую упаковку упругих сфер одинакового диаметра. Показано, что нелинейный характер сдвиговых волн в такой среде в значительной степени определяется нелинейными свойствами контакта между сферами. Получены уравнения для низкочастотных и высокочастотных возмущений в рассматриваемом случае. Показано, что низкочастотные солитоноподобные возмущения описываются уравнением Буссинеска.

Распространение упругих волн в зернистых средах традиционно исследуется применительно к задачам сейсмоакустики, акустики океана, механики композитов и т.д. (см. [1] и литер.). К настоящему времени в линейном приближении сравнительно подробно изучены особенности распространения продольных и сдвиговых волн в таких средах [2–4]. Вместе с тем установлено, что зернистые среды обладают ярко выраженными нелинейно упругими характеристиками (из-за нелинейных свойств контактов между зернами [1, 2]), поэтому даже при малой амплитуде упругих волн могут оказаться существенными нелинейные эффекты. Исследование такого рода эффектов было проведено в ряде работ [5, 6], причем рассмотрение всегда ограничивалось продольными волнами. В настоящей работе исследуются нелинейные эффекты для сдвиговых волн в зернистых средах.

Следуя [2] (см. также [4]), рассмотрим распространение сдвиговых волн в зернистой среде, которая представляет собой кубическую упаковку упругих сфер. Будем предполагать, что вдоль каждой из осей упаковки X, Y, Z действует постоянная сдавливающая сила P (см. рисунок). Под действием этой силы сферы деформируются так, что расстояние между их центрами становится равным $a = 2R - \delta_0$, где R – невозмущенный радиус сферы.

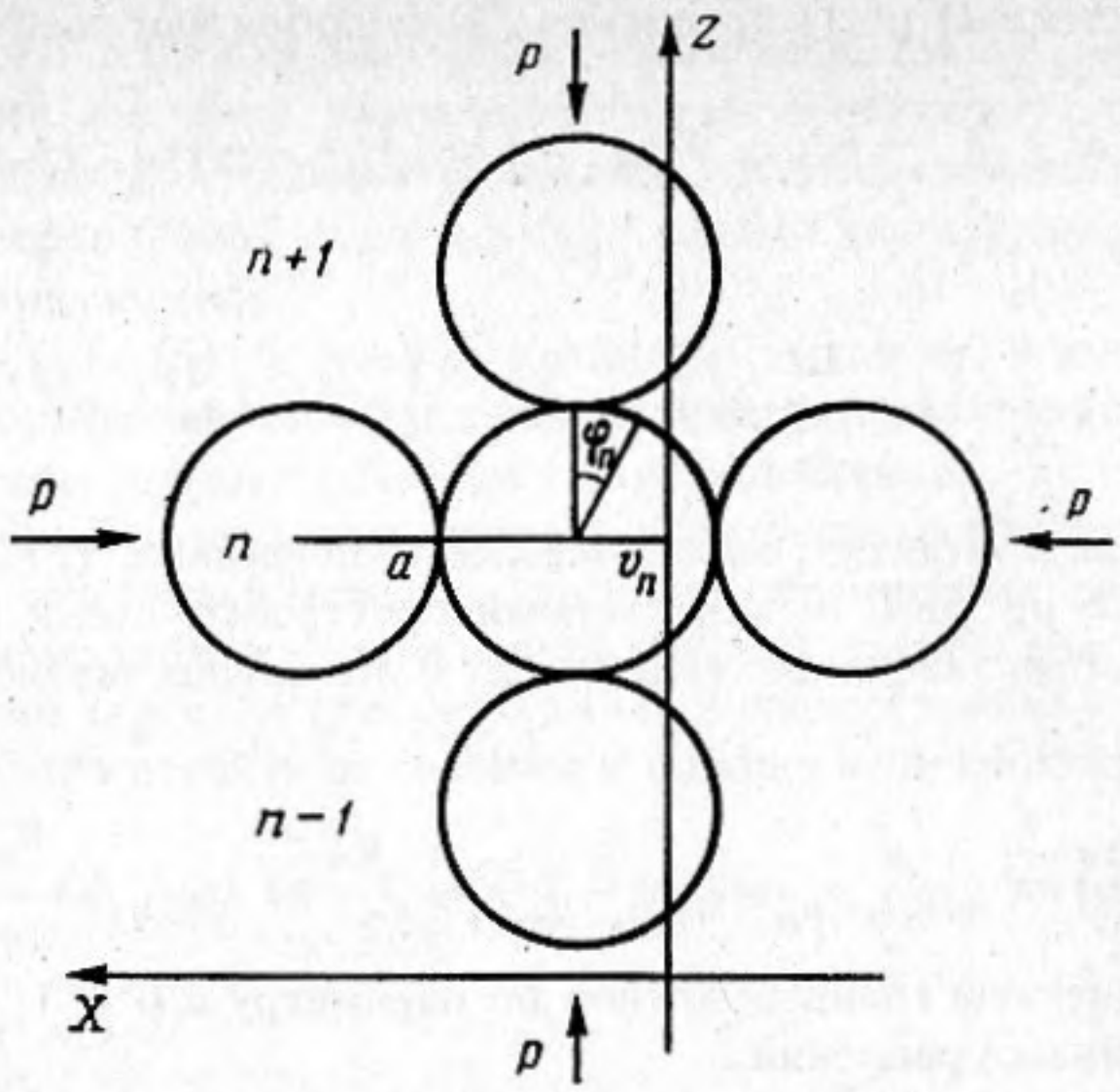
Рассмотрим распространение сдвиговых волн в такой среде. Пусть сдвиговая волна распространяется вдоль одной из осей упаковки (обозначим ее осью Z и будем считать, что она направлена вертикально). Ограничимся смещениями (поляризацией), которые лежат в плоскости XZ. Ясно, что параметры волны в этом случае не будут зависеть от горизонтальной координаты.

В горизонтальных слоях сфер ($-\infty < n < +\infty$, см. рис.) сдвижение каждой сферы можно охарактеризовать величиной смещения v_n центра масс вдоль оси X и углом поворота φ_n вокруг собственной оси. Тогда относительные поперечные смещения поверхностей сфер на контактах определятся из следующих кинематических соотношений:

$$\epsilon_n^{(1)} = v_{n+1} - v_n - (\varphi_{n+1} + \varphi_n)a/2,$$

$$\epsilon_n^{(2)} = v_{n-1} - v_n + (\varphi_{n-1} + \varphi_n)a/2, \qquad (1)$$

$$\epsilon_n^{(4)} = \epsilon_n^{(3)} = 2\varphi_n a/2,$$



Модель зернистой среды. v_n – смещение центра масс сферы из слоя n вдоль оси X, φ_n – ее угол поворота. j = 1, 2, 3, 4 – контакты с другими сферами

где $\epsilon_n^{(j)}$ – поперечное смещение поверхности феры в n-м слое на j-м контакте (j = 1, 2, 3, 4), а $F(\epsilon_n^{(j)})$ – силы, действующие в точках контактов (см. рис.).

Уравнения движения сфер в n-м слое представляют собой систему из уравнения моментов и уравнения сил:

$$I\ddot{\varphi}_n = \frac{a}{2}(F(\epsilon_n^{(1)}) - F(\epsilon_n^{(2)}) - 2F(\epsilon_n^{(3)})),$$
$$m\ddot{v}_n = F(\epsilon_n^{(1)}) + F(\epsilon_n^{(2)}), \tag{2}$$

где $I = 2mR^2/5$ – момент инерции, m – масса сферы.

Для случая квазистатических деформаций выражение для сил $F(\epsilon_n^{(j)})$ может быть получено из результатов работы [7]. В этой работе исследовалась зависимость касательной силы, действующей на контакте двух сдавливаемых сфер, от величины деформации. В результате было получено следующее выражение:

$$F \equiv F(\epsilon) = fP[1 - (1 - \epsilon\frac{8\mu r}{3fP(2-\nu)})^{3/2}], \tag{3}$$

где P – сдавливающая сила (действующая вдоль линии центров сфер), F – тангенциальная сила, действующая в перпендикулярном направлении, ϵ – относительное смещение сфер в этом направлении, f – коэффициент трения, $r = \sqrt{R\delta_0/2}$ – радиус кругового контакта, μ и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала, соответственно. Сохраняя в (3) только первые два члена разложения по параметру $\beta = \epsilon\mu r/fP \ll 1$ (случай малых деформаций), приходим к выражению:

$$F = \gamma_1\epsilon - \gamma_2\epsilon|\epsilon|, \tag{4}$$

где $\gamma_1 = 4\mu r/(2-\nu)$, $\gamma_2 = 8(\mu r)^2/3fP(2-\nu)^2$.

Появление знака модуля в правой части (4) связано с тем, что сила F должна быть нечетной функцией смещения ϵ. Отметим, что линейная часть силы F не зависит от коэффициента трения f.

С учетом зависимостей (4) и (1) уравнения (2) приобретают следующий вид:

$$\frac{2}{a} I\ddot{\varphi}_n - \gamma_1 \left\{ v_{n+1} - v_{n-1} - \frac{a}{2}(\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} + 6\varphi_n) \right\} = -\gamma_2 \{ \epsilon_n^{(1)} | \epsilon_n^{(1)} | -$$

$$- \epsilon_n^{(2)} | \epsilon_n^{(2)} | - 2\epsilon_n^{(3)} | \epsilon_n^{(3)} | \},$$

$$m\ddot{v}_n - \gamma_1 \left\{ v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n - \frac{a}{2}(\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) \right\} = -\gamma_2 \{ \epsilon_n^{(1)} | \epsilon_n^{(1)} | + \epsilon_n^{(2)} | \epsilon_n^{(2)} | \},$$

где $\epsilon_n^{(j)}$ – смещения на контактах, определяемые уравнениями (1). Для длинноволновых возмущений ($L \gg a$, где L – характерный пространственный масштаб возмущения) дальнейшее преобразование системы может быть осуществлено с помощью обычной замены:

$$\varphi_n = \varphi(z),\ \varphi_{n\pm1} = e^{\pm a \frac{\partial}{\partial z}} \varphi(z),\ \ v_n = v(z),\ \ v_{n\pm1} = e^{\pm a \frac{\partial}{\partial z}} v(z)$$

с последующим сохранением главных членов по параметру $a/L \ll 1$. В результате получается система нелинейных уравнений:

$$\varphi_{tt} + \omega_0^2 \varphi + 5c_t^2 \varphi_{zz} - \frac{1}{2}\omega_0^2 v_z - \frac{10}{3} c_t^2 v_{zzz} = -\gamma_2 \frac{a}{2I} \{ \epsilon^{(1)}(z) | \epsilon^{(1)}(z) | -$$

$$- \epsilon^{(2)}(z) | \epsilon^{(2)}(z) | - 2\epsilon^{(3)}(z) | \epsilon^{(3)}(z) | \}, \tag{5}$$

$$v_{tt} - 2c_t^2 v_{zz} - c_t^2 \frac{a^2}{6} v_{zzzz} + 2c_t^2 \varphi_z + c_t^2 \frac{a^2}{3} \varphi_{zzz} = -\gamma_2 \frac{1}{m} \{ \epsilon^{(1)}(z) | \epsilon^{(1)}(z) | +$$

$$+ \epsilon^{(2)}(z) | \epsilon^{(2)}(z) | \}, \tag{6}$$

где $\omega_0^2 = 20\gamma_1/m$, $c_t^2 = \gamma_1 a^2/2m$, а выражения $\epsilon^{(j)}$ имеют вид

$$\epsilon^{(1)} = av_z + \frac{a^2}{2} v_{zz} - (2\varphi + a\varphi_z)a/2,$$

$$\epsilon^{(2)} = -av_z + \frac{a^2}{2} v_{zz} + (2\varphi - a\varphi_z)a/2,$$

$$\epsilon^{(3)} = a\varphi.$$

Рассмотрим вначале линеаризованную (т.е. без членов в правых частях уравнений) систему. Стандартным способом [8] можно показать, что эта система описывает два типа волновых процессов. Первый из них – низкочастотный ($\omega \ll \omega_0$) – характеризуется законом дисперсии "акустического" типа: $\omega^2 = c_t^2 k^2 (1 + (ka)^2/60)$. Второй – высокочастотный – "оптического" типа: $\omega^2 = \omega_0^2 - 4c_t^2 k^2$. Другими словами, низкочастотные колебания в рассматриваемой модели зернистой среды представляют собой сдвиговые волны, которые описываются уравнением

$$v_{tt} - c_t^2 v_{zz} + c_t^2 \frac{a^2}{60} v_{zzzz} = 0.$$

Существенно, что скорость распространения этих волн c_t всегда меньше скорости продольных волн, так как при возможных значениях коэффициента Пуассона ($0 < \nu < 0{,}5$) $c_l^2/c_t^2 = (2-\nu)(1+\nu)/(1-\nu^2) > 1$ (выражение для c_l взято из [2]). Движение сфер в низкочастотных сдвиговых волнах сводится в основном к поперечному отклонению от направления распространения и небольшому повороту вокруг собственной оси.

Напротив, высокочастотные колебания (описываемые уравнением $\varphi_{tt} + \omega_0^2\varphi + 4c_t^2\varphi_{zz} = 0$) соответствуют вращательным колебаниям сфер вокруг собственной оси с частотой, близкой к ω_0 и малым поперечным отклонениям.

Очевидно, что тем же способом может быть исследовано распространение волн с другой поляризацией (т.е. волн, движение которых происходит в плоскости YZ). В более общем случае (но в рамках линейного описания), можно рассмотреть сдвиговую волну, которая будет суперпозицией волн с этими типами поляризаций (например, волну с элиптической поляризацией).

Полная система (5), (6) (с учетом нелинейных членов) позволяет описать разные нелинейные взаимодействия с участием высокочастотных и низкочастотных волн (нелинейное затухание, параметрические взаимодействия, распространение солитонов и т.д.). Подробный анализ этих процессов представляет самостоятельный интерес и выходит за рамки настоящей работы. Здесь мы ограничимся только анализом низкочастотных солитоноподобных возмущений. Будем также считать, что возмущения имеют однополярный характер (т.е. функция v_z знакопостоянна).

В этом случае можно перейти от системы к одному нелинейному уравнению:

$$v_{tt} - c_t^2 v_{zz} + c_t^2 \frac{a^2}{60} v_{zzzz} = -\delta \frac{1}{2a} \left\{ (v_z + \frac{a}{2} v_{zz}) | v_z + \frac{a}{2} v_{zz} | - (v_z - \frac{a}{2} v_{zz}) \times \right.$$

$$\left. \times | v_z - \frac{a}{2} v_{zz} | \right\}, \tag{7}$$

где $\delta = \gamma_2 a^3 / 2m$. Далее, для длинноволновых возмущений как правило выполняется условие $| v_z | > | a v_{zz}/2 |$, а при таком соотношении можно считать, что знак модуля в правой части (7) определяется знаком v_z. Тогда для однополярных возмущений (7) преобразуется в известное уравнение Буссинеска [8]:

$$v_{tt} - c_t^2 v_{zz} + c_t^2 \frac{a^2}{60} v_{zzzz} = \begin{cases} -\delta v_z v_{zz}, & v_z > 0, \\ \delta v_z v_{zz}, & v_z < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Для определенности выберем в уравнении (8) $v_z > 0$ (другой случай отвечает просто изменению направления оси X на противоположное). Стационарные решения уравнения (8) имеют вид уединенных волн (солитонов):

$$v = v_0 \operatorname{th} [(z - Vt)/\Delta], \quad \text{или} \quad v_z = \frac{v_0}{\Delta} \operatorname{ch}^{-2} [(z - Vt)/\Delta], \tag{9}$$

где v_0, Δ, V – соответственно амплитуда, ширина и скорость солитона, связанные соотношениями: $\delta v_0 = 3\Delta(c_t^2 - V^2)$, $\Delta^2/a^2 = c_t^2/15(c_t^2 - V^2)$.

Решение (9) описывает стационарные нелинейные сдвиговые волны (солитоны) в данной модели зернистой среды. Оно имеет вид сглаженной ступени: $v(+\infty) - v(-\infty) = 2v_0$ (ударная волна поперечных смещений). Следует отметить, что скорость распространения такого солитона V всегда меньше скорости сдвиговых волн c_t.

Условие квазистатичности, которое необходимо для использования формулы (3), состоит в том, что характерный период колебаний сфер существенно больше времени распространения упругих волн в сфере. Легко показать, что для частот $\omega \ll \omega_0$ это условие соответствует неравенству $c_0 \gg c_t$, где c_0 – скорость распространения поперечных волн в материале сфер. Учитывая выражения для c_0 [9] и c_t через параметры материала, получим, что условие квазистатичности выражается неравенством $R/r \gg 1$ (r – радиус контакта двух сфер), что реально выполнено всегда.

Полученные выше результаты для низкочастотных волн можно распространить и на случай, когда пространство между сферами заполнено жидкостью (флюидом). Действительно, для низкочастотных поперечных колебаний применима теория Гассмана [2], согласно которой влияние флюида сводится только к соответствующей перенормировке плотности материала. В нашем случае это достигается заменой m в системе (2) и далее на $m(1 + \rho_f \Phi/(1 - \Phi)\rho_s)$, где ρ_f и ρ_s – плотности флюида и сфер, Φ – пористость, которая для случая кубической упаковки равна $1 - \pi/6$ [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990.
2. *Уайт Дж.Э.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986.
3. *Brettell J.M.* Elastic wave propagation in powders // Acustica. 1987. V. 65. № 1. P. 49–51.
4. *Duffy J., Mindlin R.D.* Stress-strain relations of a granular medium // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. № 4. P. 585–593.
5. *Нестеренко В.Ф.* Распространение нелинейных импульсов сжатия в зернистых средах // Журн. ПМТФ. 1983. № 5. С. 136–148.
6. *Лазариди А.Н., Нестеренко В.Ф.* Обнаружение уединенных волн нового типа в одномерной зернистой среде // Журн. ПМТФ. 1985. № 3. С. 115–118.
7. *Mindlin R.D.* Compliance of elastic bodies in contact // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1949. V. 71. P. A259–268.
8. *Додд Р. и др.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева
Российской Академии наук

Поступила в редакцию
30.05.91

A.N. Bogdanov, A.T. Skvortsov

MONLINEAR SHEAR WAVES IN A GRANULAR MEDIUM

Elastic waves propagation and interaction in a granular medium with regard for its nonlinear properties are considered. A granular medium represents a cubic packing of elastic spheres uniformly compressed along symmetry axes. It is shown that nonlinear features in the considered model of a granular medium result from nonlinear properties of inter-sphere contacts (the so called Hertz nonlinearity).

The propagation of shear waves in the considered case is analyzed in detail. It is found out that the system of shear waves in the linear approximation presumes the existence of the oscillation motion of two types: high-frequency oscillations (which correspond mainly to the spheres rotation around their own axes) and low-frequency oscillations (which correspond to a transversal deflection of the spheres from the wave propagation direction). Taking into account the nonlinear terms, the obtained system describes different nonlinear interactions of low- and high-frequency waves (the nonlinear attenuation, parametric interaction, solitons propagation, etc.).

The equations for the low-frequency shear waves in the nonlinear approximation can be reduced to the Boussinesque equation which allows soliton solutions in a form of an "over-fall".

The obtained results are generalized for the case of a fluid-filled granular medium.