

равны нулю. Тогда после простых преобразований систему можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial z} - \frac{N}{4} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} V \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial T} - \frac{N}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 = 0. \quad (6)$$

Таким образом, для получения частного решения необходимо из общего решения линейного уравнения (5) выбрать то, которое удовлетворяет (6).

Одно из наиболее простых комплексных решений (5) имеет вид

$$V = \frac{C}{1 - iNz(1 - ib)} \exp \left[iT - R^2 \frac{1 - ib}{1 - iNz(1 - ib)} \right], \quad (7)$$

где C и b – постоянные.

Действительная часть (7) описывает распространение сфокусированной гармонической волны с гауссовым поперечным распределением в приближении линейной акустики.

Подставляя (7) в (6), замечаем, что если выбрать

$$f(z) = 1 - iNz(1 - ib), \quad (8)$$

то (6) обращается в тождество. Следовательно, решение, определяемое формулами (3), (7), (8), и является точным решением уравнения Хохлова – Заболотской.

Недостаток полученного решения – представление в комплексном виде. Однако этот недостаток компенсируется компактностью записи. Данное решение может применяться для тестирования численных алгоритмов решения уравнения Хохлова – Заболотской.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
3. Лапидус Ю.Р., Руденко О.В. Новые приближения и результаты теории нелинейных акустических пучков // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 6. С. 797–800.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило в редакцию
16.07.91

УДК 534.26

© 1992 г. А.Д. Лапин

ВОЛНЫ В ТВЕРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ПОКРЫТОМ ЖИДКИМ СЛОЕМ

Пусть однородное твердое полупространство $z < 0$ покрыто однородным жидким слоем $0 < z < h$ со свободной границей $z = h$ и пусть в точке $r = 0, z = z_0$ (r и z – цилиндрические координаты) этого слоя расположен точечный гармонический источник с объемной скоростью V . Требуется найти волны в твердом полупространстве.

Обозначим через c, c_l и c_t – соответственно скорость звука в жидкости и скорости продольной и поперечной волн в твердом теле, плотности жидкой и твердой сред обозначим соответственно через ρ и ρ_1 . Звуковое давление p в жидкости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = i\omega\rho V \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - z_0),$$

где $k = \omega/c$, ω – частота, $\delta(r)$ – дельта-функция, и равно нулю на свободной границе слоя: $p(r, h) = 0$.

Смещение u частиц в твердой среде удовлетворяет уравнению

$$c_l^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u - c_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} u + \omega^2 u = 0.$$

На границе жидкость— твердое тело поля сшиваются, т.е. при $z = 0$ выполняются соотношения

$$u_z = \frac{1}{\omega^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \sigma_{zz} = -p, \quad \sigma_{zr} = 0,$$

где σ_{zz} и σ_{zr} — компоненты тензора напряжений [1, 2].

Поля p , u_z и u_r ищем в виде интегралов Фурье—Бесселя [3]. Выполняя громоздкие стандартные вычисления, получим следующие интегральные представления полей:

$$p(r, z) = -i\omega\rho \frac{V}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ D(\xi) \operatorname{ch}[\sqrt{\xi^2 - k^2} z_0] + k_t^4 \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\sqrt{\xi^2 - k_l^2}}{\sqrt{\xi^2 - k^2}} \operatorname{sh}[\sqrt{\xi^2 - k^2} z_0] \right\} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh}[\sqrt{\xi^2 - k^2} (h - z)]}{\sqrt{\xi^2 - k^2} D_1(\xi)} H_0^{(1)}(\xi, r) \xi d\xi, \quad z_0 < z < h, \quad (1)$$

$$u_z(r, z) = -\frac{iVk_t\rho}{4\pi c_t\rho_1} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\xi^2 - k_l^2} \frac{\operatorname{sh}[\sqrt{\xi^2 - k^2} (h - z_0)]}{\sqrt{\xi^2 - k^2} D_1(\xi)} \times \\ \times \left\{ (k_t^2 - 2\xi^2) e^{\sqrt{\xi^2 - k_l^2} z} + 2\xi^2 e^{\sqrt{\xi^2 - k_t^2} z} \right\} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \quad (2)$$

$$u_r(r, z) = \frac{iVk_t\rho}{4\pi c_t\rho_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[\sqrt{\xi^2 - k^2} (h - z_0)]}{\sqrt{\xi^2 - k^2} D_1(\xi)} \left\{ (k_t^2 - 2\xi^2) e^{\sqrt{\xi^2 - k_l^2} z} + \right. \\ \left. + 2\sqrt{\xi^2 - k_l^2} \sqrt{\xi^2 - k_t^2} e^{\sqrt{\xi^2 - k_t^2} z} \right\} H_1^{(1)}(\xi r) \xi^2 d\xi, \quad (3)$$

где

$$D_1(\xi) = D(\xi) \operatorname{ch}[\sqrt{\xi^2 - k^2} h] + k_t^4 \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\sqrt{\xi^2 - k_l^2}}{\sqrt{\xi^2 - k^2}} \operatorname{sh}[\sqrt{\xi^2 - k^2} h], \quad (4)$$

$$D(\xi) = (2\xi^2 - k_t^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - k_l^2} \sqrt{\xi^2 - k_t^2}, \quad (5)$$

$$k_{l,t} = \omega/c_{l,t}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\xi^2 - k_{l,t}^2} \geq 0, \quad \operatorname{Im} \sqrt{\xi^2 - k_{l,t}^2} \leq 0,$$

$H_0^{(1)}(\xi r)$ и $H_1^{(1)}(\xi r)$ — функции Ханкеля. Поле $p(r, z)$ при $0 < z < z_0$ получим по формуле (1) при замене $z \rightarrow z_0$, $z_0 \rightarrow z$ в ней.

В формулах (1)–(3) полюсы подынтегральных выражений определяются из уравнения

$$D_1(\xi) = 0. \quad (6)$$

Это известное дисперсионное уравнение для нормальных волн в жидком слое, лежащем на твердом полупространстве [4–8]. Вещественные корни этого уравнения соответствуют незатухающим нормальным волнам, амплитуда которых убывает лишь по закону $1/\sqrt{r}$, обусловленному цилиндрическим расхождением волны. Особый интерес представляет первая нормальная волна. Она не имеет критической частоты и распространяется без затухания в слое любой толщины. Эта нормальная волна является поверхностной волной, распространяющейся вдоль границы жидкость — твердое полупространство [5]. Она переходит в поверхностную волну Стоунли при $kh \rightarrow \infty$ и в поверхностную волну Рэлея при $kh \rightarrow 0$. Скорость рэлеевской волны равна

$$c_R = \frac{0,87 + 1,12\sigma}{1 + \sigma} c_t, \quad 0 \leq \sigma \leq 0,5, \quad \sigma - \text{коэффициент Пуассона.}$$

Исследуем структуру поля в твердом полупространстве. С этой целью введем полярные координаты R и θ

$$z = -R \cos \theta, \quad r = R \sin \theta, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

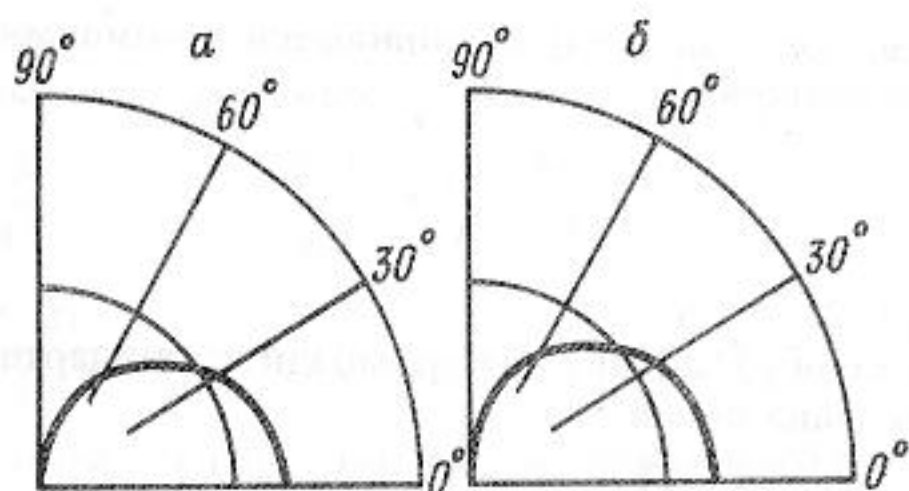


Рис. 1. Диаграмма направленности волны u_R : а - $\sigma = 1/4$; б - $\sigma = 1/3$

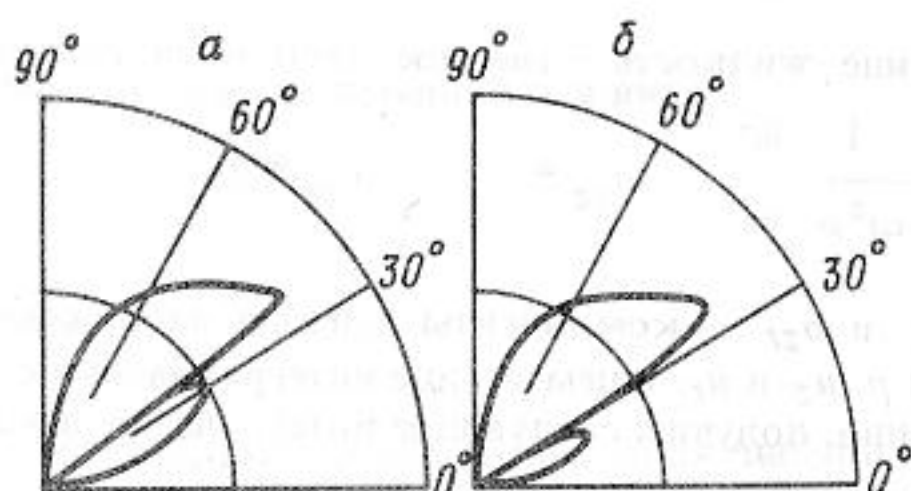


Рис. 2. Диаграмма направленности волны u_θ : а - $\sigma = 1/4$; б - $\sigma = 1/3$

При $k_l R \gg 1$ интегралы (2) и (3) можно вычислить методом перевала [3]. Интегрируя по перевальному пути, получим следующие выражения для радиальной и угловой компонент смещения:

$$u_R = -u_z \cos \theta + u_r \sin \theta \approx -iV \frac{k_l^2 k_t^2 \rho}{2\pi\omega\rho_1} \cos \theta \times \\ \times \frac{(k_t^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta)}{D_1(k_l \sin \theta)} \frac{\text{sh}[\sqrt{k_l^2 \sin^2 \theta - k^2}(h - z_0)]}{\sqrt{k_l^2 \sin^2 \theta - k^2}} \frac{e^{ik_l R}}{R}, \quad (7)$$

$$u_\theta = u_r \cos \theta + u_z \sin \theta \approx -V \frac{k_t^5 \rho}{2\pi\omega\rho_1} \sin(2\theta) \times \\ \times \frac{\sqrt{k_t^2 \sin^2 \theta - k_l^2}}{D_1(k_t \sin \theta)} \frac{\text{sh}[\sqrt{k_t^2 \sin^2 \theta - k^2}(h - z_0)]}{\sqrt{k_t^2 \sin^2 \theta - k^2}} \frac{e^{ik_t R}}{R}. \quad (8)$$

Это объемные сферические волны. Согласно этим формулам, в дальней зоне ($k_l R \gg 1$) радиальная и угловая компоненты поля распространяются соответственно со скоростями c_l и c_t .

При деформировании исходного контура интегрирования в перевальный могут встретиться полюсы подынтегрального выражения, определяемые из уравнения (6). Тогда к объемным волнам (7) и (8) следует добавить вычеты в этих полюсах, умноженные на $2\pi i$. Вычет в полюсе ξ_n дает "хвост" n -й нормальной волны, распространяющейся в слое. Вблизи границы раздела ($\sqrt{\xi_n^2 - k_t^2} |z| \lesssim 1$) хвосты распространяющихся нормальных волн дают основной вклад в полное поле u . Если же точка наблюдения находится достаточно далеко от границы раздела ($\sqrt{\xi_n^2 - k_t^2} |z| \gg 1$), то этими хвостами можно пренебречь по сравнению с объемными волнами (7) и (8).

Получим асимптотическое представление поля в твердом полупространстве при низких частотах, когда толщина жидкого слоя мала по сравнению с длинами волн в жидкости и в твердом теле. В этом случае выполняются приближенные соотношения

$$\xi_1 \approx \xi_R \equiv \omega/c_R, \quad D'_1(\xi_1) \approx D'(\xi_R), \quad D_1(k_{l,t} \sin \theta) \approx D(k_{l,t} \sin \theta),$$

$$\frac{\text{sh}[\sqrt{k_{l,t}^2 \sin^2 \theta - k^2}(h - z_0)]}{\sqrt{k_{l,t}^2 \sin^2 \theta - k^2}} \approx (h - z_0).$$

Объемные волны в полупространстве примут следующий вид:

$$u_R \approx -i\omega\rho V(h - z_0) \frac{k_l^2}{2\pi\rho_1 c_t^2} \cos \theta \frac{k_t^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta}{D(k_l \sin \theta)} \frac{e^{ik_l R}}{R}, \quad (9)$$

$$u_\theta \approx -\omega\rho V(h - z_0) \frac{k_t^3}{2\pi\rho_1 c_t^2} \sin(2\theta) \frac{\sqrt{k_t^2 \sin^2 \theta - k_l^2}}{D(k_t \sin \theta)} \frac{e^{ik_t R}}{R}. \quad (10)$$

На рис. 1 и 2 приведены диаграммы направленности этих волн.

Поверхностная волна, бегущая вдоль тонкого жидкого слоя, переходит в рэлеевскую волну:

$$u_{z1}(r, z) \approx \omega \rho V (h - z_0) \frac{\xi_R \sqrt{\xi_R^2 - k_l^2}}{2 \rho_1 c_l^2 D'(\xi_R)} \times \\ \times \left\{ (k_t^2 - 2\xi_R^2) e^{\sqrt{\xi_R^2 - k_l^2} z} + 2\xi_R^2 e^{\sqrt{\xi_R^2 - k_t^2} z} \right\} H_0^{(1)}(\xi_R r), \quad (11)$$

$$u_{r1}(r, z) \approx -\omega \rho V (h - z_0) \frac{\xi_R^2}{2 \rho_1 c_l^2 D'(\xi_R)} \left\{ (k_t^2 - \xi_R^2) e^{\sqrt{\xi_R^2 - k_l^2} z} + \right. \\ \left. + 2 \sqrt{\xi_R^2 - k_l^2} \sqrt{\xi_R^2 - k_t^2} e^{\sqrt{\xi_R^2 - k_t^2} z} \right\} H_1^{(1)}(\xi_R r). \quad (12)$$

Из сопоставления поля (9)–(12) с полем точечной нормальной силы f , приложенной к поверхности твердого полупространства [9–11], можно сделать вывод, что точечный источник объемной скорости V , расположенный в тонком жидком слое, создает такое же поле в твердом полупространстве, как и точечная нормальная сила

$$f = i \omega \rho V (h - z_0),$$

приложенная в точке $r = z = 0$. Мощности, уносимые объемной волной сжатия (9), объемной волной сдвига (10) и поверхностной рэлеевской волной (11), (12), при $\sigma = 1/4$ получим по формулам из работ [9, 11]:

$$W^P = 0,027 \frac{\omega^2 |f|^2}{\rho_1 c_l^3}, \quad W^S = 0,095 \frac{\omega^2 |f|^2}{\rho_1 c_l^3}, \quad W^R = 0,26 \frac{\omega^2 |f|^2}{\rho_1 c_l^3}.$$

Эти формулы дают следующее процентное соотношение мощностей излучения различных типов волн для точечного источника объемной скорости:

$$W^P : W^S : W^R = 7 : 25 : 68\%.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 202 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
4. Шерман Д.И. О распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве // Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, 1945. № 115.
5. Biot M.A. The interaction of Rayleigh and Stonely waves in the ocean bottom // Bull. Seism. Soc. Amer. 1952. V. 42. № 1. P. 81–93.
6. Зволинский Н.В. Плоские волны в упругом полупространстве и покрывающем его слое жидкости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56. С. 21–24.
7. Зволинский Н.В. Поверхностные плоские волны в упругом полупространстве и покрывающем его слое жидкости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56. С. 363–366.
8. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
9. Miller G.F., Pursey H. The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1954. V. 223. № 1155. P. 521–541.
10. Miller G.F., Pursey H. On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. V. 223. № 1192. P. 55–69.
11. Гуцин В.В., Докучаев В.П., Заславский Ю.М., Конюхова И.Д. О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде // Исследование земли невзрывными сейсмическими источниками. М.: Наука, 1981. С. 113–118.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева
Российской Академии наук

Поступило в редакцию
24.01.91