

Сравнение кривых 2 из рис. 2 с кривой 1 рис. 5 в [5] показывает, что относительное сечение обратного рассеяния  $\sigma_0$  не дает иногда полной информации о резонансных свойствах упругого рассеивателя.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильменков С.Л., Клещев А.А. Излучение упругими телами сфероидальной формы и связь его с дифракцией звука на них // Судовая акустика: Сб. научн. тр. Л.: ЛКИ, 1989. С. 15–21.
2. Клещев А.А., Клюкин И.И. Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1987.
3. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
4. Клещев А.А., Клюкин И.И. Экспериментальный способ получения характеристик дальнего поля рассеивателей // Тр. ЛКИ. Л.; ЛКИ, 1972, № 77. С. 37–40.
5. Клещев А.А. Резонансные эффекты в характеристиках рассеяния звука упругими телами сфероидальной формы // Судовая акустика: Сб. научн. тр. Л.: ЛКИ, 1989. С. 21–28.

Санкт-Петербургский  
кораблестроительный институт

Поступило в редакцию  
01.03.91

УДК 534.222

© 1992 г. Ю.Р. Лapidус, О.В. Руденко

#### ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА – ЗАБОЛОТСКОЙ

Нелинейно-дифракционную трансформацию акустической волны удобно описывать на основе модельного уравнения Хохлова – Заболотской. В цилиндрических координатах это уравнение имеет вид [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (rv), \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + c_0 \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $u, v$  – компоненты колебательной скорости вдоль и поперек оси пучка,  $\epsilon$  – нелинейный параметр,  $c_0$  – скорость звука,  $\tau = t - x/c_0$ ,  $x, r$  – осевая и поперечная координаты. В безразмерных переменных  $V = u/u_0$ ,  $U = v(2l_D/u_0 a)$ ,  $\theta = \omega \tau$ ,  $z = x/l_p$ ,  $R = r/a$  система примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{N}{4} \frac{\partial}{\partial R} (RU), \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial R} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $N = l_p/l_D$  – отношение длины образования разрыва  $l_p = c_0^2/\epsilon \omega u_0$  к дифракционной длине  $l_D = \omega a^2/2c_0$ ;  $u_0, \omega, a$  – характерные амплитуда, частота и радиус пучка.

К сожалению, для уравнений (1) не найдено общее точное решение. Наиболее часто это уравнение анализируют, применяя численные методы [2]. Однако и в случае использования численных методов крайне желательно иметь точные решения для тестирования алгоритмов. Кроме того, анализ точного решения позволяет лучше разобраться в физике явления. Рассмотрим процесс получения частного точного решения уравнения (2). Введем новую независимую переменную  $T$ :

$$T = \theta + Vf(z) \int_0^z \frac{d\xi}{f(\xi)}, \quad (3)$$

где  $f(z)$  – некоторая неопределенная функция осевой координаты. Новая переменная  $T$  – обобщение замены [3]  $T = \theta + zV$  на случай распространения плоской волны в канале переменного сечения. Перейдем в (2) от  $\theta$  к  $T$ :

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{N}{4} \left( \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} \right) = -\frac{N}{4} f(z) \int_0^z \frac{d\xi}{f(\xi)} \left[ \frac{4}{N} \frac{f'(z)}{f(z)} V \frac{\partial V}{\partial T} - \left( \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} \right) \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial U}{\partial T} \right], \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial R} = 0.$$

Для нахождения частного решения (4) потребуем, чтобы левые и правые части уравнения были

равны нулю. Тогда после простых преобразований систему можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial z} - \frac{N}{4} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} V \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial T} - \frac{N}{4} \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 = 0. \quad (6)$$

Таким образом, для получения частного решения необходимо из общего решения линейного уравнения (5) выбрать то, которое удовлетворяет (6).

Одно из наиболее простых комплексных решений (5) имеет вид

$$V = \frac{C}{1 - iNz(1 - ib)} \exp \left[ iT - R^2 \frac{1 - ib}{1 - iNz(1 - ib)} \right], \quad (7)$$

где  $C$  и  $b$  – постоянные.

Действительная часть (7) описывает распространение сфокусированной гармонической волны с гауссовым поперечным распределением в приближении линейной акустики.

Подставляя (7) в (6), замечаем, что если выбрать

$$f(z) = 1 - iNz(1 - ib), \quad (8)$$

то (6) обращается в тождество. Следовательно, решение, определяемое формулами (3), (7), (8), и является точным решением уравнения Хохлова – Заболотской.

Недостаток полученного решения – представление в комплексном виде. Однако этот недостаток компенсируется компактностью записи. Данное решение может применяться для тестирования численных алгоритмов решения уравнения Хохлова – Заболотской.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
3. Лапидус Ю.Р., Руденко О.В. Новые приближения и результаты теории нелинейных акустических пучков // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 6. С. 797–800.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

Поступило в редакцию  
16.07.91

УДК 534.26

© 1992 г. А.Д. Лапин

#### ВОЛНЫ В ТВЕРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ПОКРЫТОМ ЖИДКИМ СЛОЕМ

Пусть однородное твердое полупространство  $z < 0$  покрыто однородным жидким слоем  $0 < z < h$  со свободной границей  $z = h$  и пусть в точке  $r = 0$ ,  $z = z_0$  ( $r$  и  $z$  – цилиндрические координаты) этого слоя расположен точечный гармонический источник с объемной скоростью  $V$ . Требуется найти волны в твердом полупространстве.

Обозначим через  $c$ ,  $c_l$  и  $c_t$  – соответственно скорость звука в жидкости и скорости продольной и поперечной волн в твердом теле, плотности жидкой и твердой сред обозначим соответственно через  $\rho$  и  $\rho_1$ . Звуковое давление  $p$  в жидкости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = i\omega\rho V \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - z_0),$$

где  $k = \omega/c$ ,  $\omega$  – частота,  $\delta(r)$  – дельта-функция, и равно нулю на свободной границе слоя:  $p(r, h) = 0$ .

Смещение  $u$  частиц в твердой среде удовлетворяет уравнению

$$c_l^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u - c_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} u + \omega^2 u = 0.$$