даемой пластине, кривая 2 – с массами на противоположной пластине. Из рис. 3 видно, что отличие кривых имеет место лишь в интервале 240–320 Гц, т.е., как отмечено выше, в области, где имеет место продольный резонанс оболочки. Таким образом, из эксперимента также следует вывод о возможности влияния на продольные колебания оболочки и входящую в систему энергию путем воздействия на невозбуждаемую пластину, причем воздействие это проявляется в диапазоне частот, соответствующем продольным резонансным колебаниям свободной оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никифоров А.С.* Возбуждение бесконечной пластины поперечной силой, равномерно распределенной по окружности // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 4. С. 588–593.
2. *Ковинская С.И., Никифоров А.С.* Влияние резонансных свойств конструкций на коэффициент передачи силы // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 135–138.

Центральный научно-исследовательский институт им. А.Н. Крылова

Поступило в редакцию 18.06.91

УДК 534:22

А.Н. Котюсов

О МЕХАНИЗМЕ ДЕГАЗАЦИИ ЖИДКОСТИ ЗВУКОМ

В жидкости, на которую воздействуют относительно интенсивные акустические колебания, уменьшается количество газа как растворенного, так и находящегося в виде пузырьков. Этот эффект находит применение в промышленной практике при дегазации расплавов металлов и стекла, растворов смол, вискозы, масел, различного рода жидкостей [1, 2].

Однако до сего времени нет ясной физической картины механизма дегазации и четкого представления об основных качественных и количественных зависимостях характеристик этого процесса от параметров звукового поля. Теоретически изучено несколько возможных механизмов [2]. Так, рост паровых пузырьков вызывается в основном поглощением механической энергии звука в результате испарения и конденсации жидкости на границе пузырька [3]. Газовые же пузырьки могут расти либо благодаря диффузии растворенного в жидкости газа, либо благодаря коалесценции [2].

Наиболее сложным является выяснение механизма коалесценции. Принято считать, что этот процесс обусловлен действием сил Бьеркнесса, увлечением пузырьков акустическими потоками, а также влиянием радиационного давления [2]. При этом во всех работах, касающихся как процессов коалесценции [2], так и аналогичных им процессов акустической коагуляции аэрозолей [2, 4], рассматривается воздействие звуковых колебаний на одиночную частицу или пару частиц, а затем полученные закономерности переносятся на совокупность имеющихся частиц. Оценки, сделанные в рамках таких моделей, часто не согласуются с экспериментальными данными. В связи с этим авторы работы [5] предложили объяснение акустической коагуляции на основе модели коллективного взаимодействия частиц, учитывающей не силы парного взаимодействия, а силы, обусловленные движением всего ансамбля частиц.

Физическая интерпретация явления достаточно проста [5, 6]. В области увеличения концентрации частиц взвеси эффективное сечение для газа уменьшается, что приводит к возрастанию скорости его течения относительно частиц. Рост скорости сопровождается падением давления и увеличением эффективной силы Стокса. Оба эти фактора приводят к дальнейшему возрастанию концентрации твердых частиц. В результате увеличивается вероятность столкновения частиц и ускоряется процесс коагуляции. Поскольку полученная неустойчивость имеет универсальный характер, очевидно, что она может возникать при любом плавном движении в двухфазной среде. Весьма интересным является изучение развития этой неустойчивости в жидкости с пузырьками газа, учет собственных колебаний которых может так или иначе повлиять на развитие процесса [8].

Рассмотрим простую модель вязкой жидкости, содержащей одинаковые пузырьки газа. Будем считать, что характерные масштабы задачи (расстояние между частицами, размеры областей неоднородности концентрации пузырьков) существенно меньше длины звуковой волны в жидкости. Тогда при малых числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} = va/\nu$, v – относительная скорость пузырька радиуса a, ν – кинематическая вязкость жидкости) система уравнений, описывающих движение пузырьков в вязкой жидкости, имеет вид [7]:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \partial\alpha/\partial t + \operatorname{div} \alpha\mathbf{v}_1, \tag{1}$$

$$\partial n/\partial t + \operatorname{div} n\mathbf{v}_2 = 0, \tag{2}$$

$$a \frac{d_2^2 a}{dt^2} = \frac{p_2 - p_1 - 2\sigma/a}{\rho_1} - \frac{4\nu}{a}\frac{d_2 a}{dt} - \frac{3}{2}\left(\frac{d_2 a}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2}{2}\right)^2, \tag{3}$$

$$d_2\rho_2/dt = -(3/a)\,\rho_2 d_2 a/dt, \tag{4}$$

$$\rho_2 \frac{d_2 \mathrm{v}_2}{dt} = \rho_1 \frac{d_1 \mathrm{v}_1}{dt} + \frac{\rho_1}{2}\left[\frac{d_2}{dt}(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2) - (\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1)\frac{3}{a}\frac{d_2 a}{dt}\right] +$$

$$+ \frac{9\nu}{2a^2}\rho_1(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2) + \frac{9}{2a}\sqrt{\frac{\nu\rho_1^2}{\pi}}\int_0^t \frac{d_2(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)}{dt'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}, \tag{5}$$

$$\rho_1 \frac{d_1 \mathrm{v}_1}{dt} = \nabla p^* - \rho_1 \frac{\alpha}{2}\left[\frac{d_2}{dt}(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2) - (\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1)\frac{3}{a}\frac{d_2 a}{dt}\right] -$$

$$- \frac{9\nu}{2a^2}\rho_1\alpha(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2) - \frac{9\alpha}{2a}\sqrt{\frac{\nu\rho_1^2}{\pi}}\int_0^t \frac{d_2(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)}{dt'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}, \tag{6}$$

$$p^* = -(1-\alpha)p_1 - \alpha\left(p_2 - \frac{2\sigma}{a}\right) - \rho_1\alpha\left[\left(\frac{d_2 a}{dt}\right)^2 + \frac{(\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1)^2}{2}\right] +$$

$$+ \frac{4}{3}\nu\rho_1\nabla[\alpha\mathrm{v}_2 + (1-\alpha)\mathrm{v}_1]. \tag{7}$$

Здесь $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \rho_1, \rho_2$ – скорости и плотности жидкости и газовых пузырьков соответственно, $\alpha = {}^4/_3\,\pi a^3 n$, n – концентрация пузырьков, σ – коэффициент поверхностного натяжения, $d_1/dt = \partial/\partial t + v_1\nabla$, $d_2/dt = \partial/\partial t + \mathrm{v}_2\nabla$ – субстанциональные производные, связанные с движением жидкости и пузырьков соответственно, p_1 – давление в жидкости, p_2 – давление газа в пузырьке (из уравнения состояния $p_2 = p_0\,(a_0/a)^{3\gamma}$), γ – показатель адиабаты, p_0 – давление газа в пузырьке радиуса a_0. Уравнения (5) и (6) записаны с учетом всех сил, действующих в системе (Архимеда, "присоединенных масс", Стокса, Бассэ).

Пусть на жидкость с пузырьками газа воздействует монохроматическая акустическая волна частоты ω и амплитуды v_{10}. Тогда согласно (5) пузырьки движутся со скоростью

$$v_{20} = v_{10}\frac{3\,\omega/2 + i\beta + \sqrt{9\beta\omega/2}\,\exp(i\pi/4)}{\omega/2 + i\beta + \sqrt{9\beta\omega/2}\,\exp(i\pi/4)}, \tag{8}$$

где $\beta = 9\nu/2a_0^2$, множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен.

На частотах $\omega \gg \beta$ выражение (8) существенно упрощается. При этом колебания пузырьков синхронны колебаниям жидкости, но их амплитуда равна $v_{20} = 3\,v_{10}$.

Для исследования неустойчивости, считая величины $v_{10}, v_{20}, n_0, a_0, p_0$ невозмущенными, линеаризуем систему (1) – (7) на их фоне. Предполагая возмущения $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{a}$, $\tilde{p}_1$ зависящими от координат по закону $\exp ikr$, из (1) – (7), в предположении малости силы Бассэ, можно получить два уравнения относительно $\tilde{a}$, $\tilde{\alpha}$. Если затем ввести новые переменные, связанные с $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{a}$ соотношениями

$$\tilde{\alpha} = x\exp\left(-i\int^t k v_{20}\,dt'\right), \qquad \frac{\tilde{a}}{a_0} = y\exp\left(-i\int^t k v_{20}\,dt'\right), \tag{9}$$

то при учете малости $\alpha \ll 1$ и $\rho_2/\rho_1 \ll 1$ получим систему

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} + \left(\beta + \frac{5}{2}i\alpha k\Delta\mathrm{v}\right)\frac{d}{dt} + \alpha\left[\frac{3}{2}ik\Delta\mathrm{v}' - (k\Delta\mathrm{v})^2 + i\beta k\Delta\mathrm{v}\right]\right\}x =$$

$$= \alpha\left\{\frac{3}{2}\frac{d^2}{dt^2} + \left(3\beta - \frac{3}{2}ik\Delta\mathrm{v}\right)\frac{d}{dt} + 2i\beta k\Delta\mathrm{v}\right\}y, \tag{10}$$

$$\left\{\frac{3}{2}\alpha\frac{d^2}{dt^2} + \left(\alpha\beta + \frac{1}{2}ik\Delta\mathrm{v}\right)\frac{d}{dt} + \alpha\left[ik\Delta\mathrm{v}' - \frac{5}{4}(k\Delta\mathrm{v})^2 + i\beta k\Delta\mathrm{v}\right]\right\}x =$$

$$= -\alpha\left\{a_0^2 k^2\frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{8}{9}k^2 a_0^2\beta - \frac{3}{2}ik\Delta\mathrm{v}\right)\frac{d}{dt} + k^2 a_0^2\omega_0^2 - 2i\alpha\beta k\Delta\mathrm{v}\right\}y. \tag{11}$$

Здесь

$$\Delta v = v_{10} - v_{20}, \quad \Delta v' = \frac{d}{dt} \Delta v, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c^2}{a_0^2} \frac{3 \rho_2}{\rho_1} - \frac{2 \sigma}{a_0^3 \rho_1}}$$

– собственная частота адиабатических колебаний пузырька (c – скорость звука в газе). Решение системы (10) – (11) целесообразно искать в виде

$$x = A \exp \int^t f(\tau)\, d\tau, \quad y = B \exp \int^t f(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), (11) и исключая постоянные A и B, получаем для функции f уравнение

$$\frac{\kappa^2}{2} (f' + f^2 + \frac{8}{9} \beta f + \omega_0^2)(f' + f^2 + 2 \beta f) - \frac{(k \Delta v)^2}{2} f (2 \beta - \frac{3}{2} f) =$$

$$= \alpha \Big\{ -\kappa^2 \Big[\frac{5}{2} ik \Delta v f + \frac{3}{2} ik \Delta v' - (k \Delta v)^2 + i\beta k \Delta v \Big] \times$$

$$\times (f' + f^2 + \frac{8}{9} \beta f + \omega_0^2 - \frac{3}{2} i \frac{k \Delta v}{\kappa^2} f) + i\beta k \Delta v \times$$

$$\times (f' + f^2 + 2 \beta f) - \Big[\frac{3}{2} (f' + f^2) + \beta f + ik \Delta v' - \frac{5}{4} (k \Delta v)^2 + i\beta k \Delta v \Big] \times$$

$$\times \Big[\frac{3}{2} (f' + f^2 + 2 \beta f) + ik \Delta v (2 \beta - \frac{3}{2} f) \Big] \Big\}, \tag{13}$$

где $\kappa = ka_0$. Уравнение (13) весьма громоздко и для его аналитического решения необходимо сделать ряд упрощений.

При $\alpha = 0$ частное решение уравнения $f = 0$. Естественно предположить, что при $\alpha \ll 1$ $f \ll \beta, \omega_0, \omega_0^2/\beta$. Тогда, считая зависимость $v_{10}(t)$ заданной ($v_{10} = v_0 \cos \omega t$), будем искать решение (13) в виде ряда

$$f = \gamma_* + f_1 + f_2 + \ldots, \tag{14}$$

где

$$f_1 = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t, \quad f_2 = A_2 \sin 2 \omega t + B_2 \cos 2 \omega t.$$

При определении неустойчивости нас будет интересовать лишь постоянная составляющая f. Подставляя (14) в (13) с учетом (8), для $\omega \gg \beta$ получим для инкремента неустойчивости

$$\gamma_* = 2 \alpha \frac{|k v_0|^2}{\beta} \left(1 + \frac{2 \beta^2}{\kappa^2 \omega_0^2}\right). \tag{15}$$

Решение демонстрирует наличие двух равноправных механизмов неустойчивости. Один из них (первый член в (15)) изложен в начале настоящей работы. Другой (второй член в (15)) обусловлен наличием собственных колебаний пузырьков и может быть объяснен следующим образом. При увеличении размеров пузырьков в некоторой области смеси уменьшается эффективное сечение для жидкости, что приводит к возрастанию скорости ее течения относительно пузырьков. Рост скорости сопровождается падением давления, что в свою очередь способствует дальнейшему росту пузырьков. Первый механизм действует в области коротковолновых возмущений $k^2 \gg (81/2) \; (\rho_1/\rho_2) \; (\nu^2/a^4 c^2)$ и справедлив для сравнительно крупных пузырьков. Так, для сред с характерными параметрами $a = 10^{-2}$ см, $n = 2 \cdot 10^3$ см$^{-3}$, $v_0 = 3$ см/с, $k \sim n^{1/3}$, $\nu = 10^{-2}$ см^{2}с$^{-1}$ (вода) $\gamma_* \sim 0{,}08$ с$^{-1}$ и время коалесценции $t \sim \gamma_*^{-1} \sim 12$ с, частота дегазации $f = \omega/2\pi \gg 0{,}1$ кГц.

Второй механизм имеет место для длинноволновых возмущений и характерен для жидкостей с мелкими пузырьками. При $a = 5 \cdot 10^{-4}$ см, $n = 10^6$ см$^{-3}$, $v_0 = 30$ см/с $\gamma_* \sim 0{,}1$ с$^{-1}$ и время коалесценции $t \sim 10$ с, частота дегазации $f > 30$ кГц.

Полученные значения t удовлетворительно совпадают с временами озвучивания жидкостей для их дегазации в промышленности [2], где они достигают нескольких минут.

Автор выражает благодарность Немцову Б.Е. за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капустин А.П.* Дегазация жидкости в ультразвуковом поле // ЖТФ. 1954. Т. 24. В. 6. С. 1008–1012.
2. *Капустина О.А.* Дегазация жидкостей // Физические основы ультразвуковой технологии / Под ред. Розенберга Л.Д. М.: Наука, 1970. С. 253–337.
3. *Миронов М.А.* Рост парового пузырька в ультразвуковом поле // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 4. С. 568–575.
4. *Медников Е.П.* Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
5. *Немцов Б.Е., Эйдман В.Я.* Коллективный эффект конденсации капель под действием звука // Акуст. журн. 1989. Т. 25. № 5. С. 882–886.
6. *Котюсов А.Н., Немцов Б.Е.* Неустойчивость равномерного распределения твердых частиц в потоке газа // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 12. С. 1230–1236.
7. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987.
8. *Котюсов А.Н., Немцов Б.Е., Орлова Е.Е.* О механизме коалесценции пузырьков газа, движущихся в вязкой жидкости // ЖПМТФ. 1992. № 2.

Нижегородский научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступило в редакцию
17.06.91

УДК 534.222

А.А. Мазаников

ОБ ИЗМЕРЕНИИ СКОРОСТЕЙ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Измерение скоростей и амплитуд нормальных волн в однородных по трассе волноводах рассматривалось в ряде работ [1–3]. Для их измерения использовался эффект Доплера, обусловленный взаимным перемещением приемника и источника. При возбуждении гармоническим источником доплеровские смещения частоты обратно пропорциональны фазовым скоростям нормальных волн, что позволяет определить скорости и амплитуды при помощи спектрального анализа.

Возможность измерения параметров нормальных волн в неоднородных волноводах исследовалась в работах [4, 5].

Согласно [4], если неоднородность волновода может быть описана линейным по трассе изменением продольных волновых чисел, доплеровские смещения частоты также линейно изменяются. Поэтому вместо дискретных спектральных компонент, соответствующих нормальным волнам в однородном волноводе, возникает набор ЛЧМ-сигналов. Параметры этих сигналов (средняя частота, девиация, амплитуда спектральных компонент) связаны соответственно со средним значением скорости нормальных волн на исследуемом участке волновода, величиной ее изменения и амплитудой волн. В работе [5] для определения скоростей нормальных волн использовалось вычисление текущих спектров, изменяющихся по трассе волновода в соответствии с изменением скоростей и амплитуд.

Рассмотрим двумерный волновод $\{-\infty < x < \infty, 0 \leqslant z \leqslant H(x)\}$, внутри которого удовлетворяется уравнение Гельмгольца с зависящим от x и z волновым числом $k = \omega/c\ (x, z)$.

Экспоненциальное затухание, связанное с поглощением и утечкой энергии через границы волновода, учитывать не будем. В связи с этим границы волновода считаем абсолютно отражающими (большей конкретизации граничных условий не требуется). В сечении $x = 0$ расположен монохроматический источник звука частотой ω_0, приемник равномерно движется вдоль координаты x при $z = z_0$ со скоростью V (излучатель и приемник можно поменять местами).

Давление p на приемник будет

$$p(t) = \sum_n A_n(Vt)\, \psi_n(Vt, z_0) \exp\,[i\varphi_n(Vt) - i\omega_0 t],$$