УДК 534.222

В.И. Ерофеев

СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩИХ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ

В задачах акустики упругих конструкций традиционно уделяется большое внимание распространению изгибных волн в стержнях и стержневых системах [1–3]. При этом, как правило, ограничиваются приближением линейной теории. Однако при распространении интенсивных волн возникает необходимость учета геометрической нелинейности – нелинейной связи между тензором деформаций и градиентами перемещений [4]. Наличие нелинейности приводит к эффекту взаимодействия изгибных волн с продольными и к самовоздействию изгибных волн.

Резонансные взаимодействия квазигармонических продольных и изгибных волн в прямолинейных стержнях и кольцевых резонаторах изучались в работах [5–7].

В настоящей работе проанализированы нелинейные стационарные волны огибающих, возникающие при распространении квазигармонических изгибных волн в стержне.

Распространение изгибных волн в нелинейноупругом стержне описывается уравнением [4]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right]. \tag{1}$$

Здесь введены безразмерные переменные:

$$x' = x/r_y, \quad t' = c_s t/r_y, \quad w' = w/r_y,$$

где r_y – осевой радиус инерции поперечного сечения, $c_s = \sqrt{E/\rho}$ – стержневая скорость, E – модуль Юнга, ρ – плотность материала. Штрихи в (1) опущены.

Считаем, что стержень является полубесконечным. Такая идеализация допустима, если на одной границе системы $x = 0$ располагается источник возбуждения колебаний, а на второй границе $x = \infty$ находится оптимальное деформирующее устройство, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающая на него изгибная волна не будет отражаться [8]. Это позволяет задать для (1) следующие граничные условия:

$$w\big|_{x=0} = L_x a_0 \cos\omega t, \qquad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left. w = \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right|_{x=0} = 0,$$

где ω, L_x – безразмерные частота и длина волны, a_0 – амплитуда волны деформации, n – целое число.

Уравнение (1) эквивалентно двум связанным нелинейным уравнениям Шредингера. Одно из которых имеет вид

$$i\,\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\,(U - U^*)\,|U - U^*|^2 = 0, \tag{2}$$

а второе является комплексно-сопряженным (2) (U^* – величина, комплексно-сопряженная U).

Переход к (2) можно осуществить, например, с помощью метода связанных нормальных волн [9]. При этом функции U и U^* связаны с поперечным смещением w соотношениями:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\,(U + U^*), \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = i\,(U^* - U). \tag{3}$$

Уравнение (2) позволяет описывать как квазигармонические, так и существенно несинусоидальные процессы, поскольку при его выводе не делалось дополнительных предположений о характере изгибных волн. Однако наличие сильной дисперсии в (1) исключает возможность синхронизма гармоник с частотами ω и 3ω.

Введем в (2) действительные переменные A и φ: $U = Ae^{i\varphi}$, где $\varphi = \omega t - kx + \Psi(\epsilon_0 x, \epsilon_0 t)$, $A = A(\epsilon_0 x, \epsilon_0 t)$, $\epsilon_0 \sim 10^{-5}$ – характерная величина упругих деформаций. Рассмотрим стационарные волны огибающих: $A = A(\xi)$, $\Psi = \Psi(\xi)$, где $\xi = x - Vt$, V – скорость стационарной волны.

В этом случае фаза (φ) выражается через амплитуду (A) соотношением $\dfrac{d\varphi}{d\xi} = \dfrac{d}{A^2} - \dfrac{V}{2}$, где d – постоянная интегрирования, а изменение амплитуды описывается уравнением ангармонического осциллятора

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + \frac{V^2}{4}A - \frac{3}{2}A^3 - d^2 A^{-3} = 0. \tag{4}$$

В работе [10] проанализированы качественно различные варианты динамического поведения ангармонического осциллятора в зависимости от параметров уравнения (4). Таких качественно различных случаев — двадцать. Кроме того, в [10] найдены аналитические решения (4), выражающиеся через эллиптические функции Якоби.

В рассматриваемом случае (4) имеет как периодическое $|d| < V^3/18\sqrt{3}$, так и апериодическое $|d| = V^3/18\sqrt{3}$ (солитонное) решения.

Ограничимся рассмотрением солитонного решения. Для солитона огибающей можно предположить, что $\left.\dfrac{d\varphi}{d\xi}\right|_{\xi = \infty} = 0$ [11]. Тогда константа интегрирования определяется выражением

$$d = Va_\infty^2/2, \tag{5}$$

где a_∞ — амплитуда квазигармонической волны при $x \to \infty$. Очевидно, что $a_\infty = \vartheta a_0$, где ϑ — коэффициент прохождения изгибной волны. Если затуханием волны пренебречь, то $\vartheta = 1$ и

$$a_\infty = a_0. \tag{6}$$

Решение уравнения (1) в виде квазигармонической волны, промодулированной по солитонному закону, имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \pm 2\left\{\frac{4}{3}A_0 - 2A_0\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x - Vt}{\Delta}\right)\right\}^{1/2}\sin\varphi,$$

$$\varphi = \omega t - kx - \frac{V}{2}(x - Vt) +$$

$$+\frac{2\sqrt{3}}{9}\left\{x - Vt + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left[\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \mathrm{th}\left(\dfrac{x - Vt}{\Delta}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \mathrm{th}\left(\dfrac{x - Vt}{\Delta}\right)}\right]\right\} + \quad \mathrm{const},$$

где A_0 — амплитуда солитона, $\Delta = 1/\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,A_0^{1/2}$ — его ширина.

Условия (5), (6) позволяют выразить все параметры солитона через значение амплитуды волны деформации на границе $x = 0$ (a_0). Скорость солитона пропорциональна первой степени $a_0 V = 3\sqrt[4]{3}a_0$, а его амплитуда пропорциональна квадрату этой величины $A_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a_0^2$. Ширина солитона определяется выражением $\Delta = 2/3\sqrt[4]{3}\,a_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никифоров А.С., Будрин С.В.* Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. Л.: Судостроение, 1968. 216 с.
2. *Артоболевский И.И., Боровницкий Ю.И., Генкин М.Д.* Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. Авиационная акустика / Под ред. Мунина А.Г. М.: Машиностроение, 1986. Т. 1. 248 с. Т. 2. 264 с.
4. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 778 с.
5. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Потапов А.И.* Параметрическая трансформация продольных волн в изгибные в тонких стержнях // Волны и дифракция. М.: ИРЭ АН СССР, 1981. Т. 2. С. 82–85.
6. *Ерофеев В.И., Потапов А.И.* Терхчастотные резонансные взаимодействия продольных и изгибных волн в стержне // Динамика систем. Горький: ГГУ, 1985. С. 75–84.
7. *Ковригин Д.А., Потапов А.И.* Нелинейные резонансные взаимодействия продольных и изгибных волн в кольце // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 4. С. 803–807.
8. *Весницкий А.И., Романов Н.Д.* К построению демпфера гашения изгибных колебаний балки // // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 6. С. 122–124.
9. *Новиков А.А.* О применении метода связанных волн к анализу нерезонансных взаимодействий // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. № 2. С. 321–323.
10. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Потапов А.И.* Исследование динамической системы второго порядка, содержащей нелинейность в отрицательной степени // Дифф. и интегр. уравнения. Горький: ГГУ, 1986. С. 32–36.
11. *Косевич А.М., Ковалев А.С.* Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наук. думка, 1989. 304 с.

Институт машиноведения
Академии наук СССР,
Нижегородский филиал

Поступило в редакцию
03.12.90