АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 1

УДК 534.23
© 1992 г.

Б.П. Шарфарец

ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛЯ НАПРАВЛЕННОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Получено асимптотическое решение неоднородного уравнения Гельмгольца с переменным показателем преломления в многомерном пространстве. Излучатель заменен эквивалентным точечным. Получены выражения для эйконала и амплитуд переноса, вычисляемых по рекуррентному соотношению через нулевую амплитуду переноса. Задача вычисления амплитуды переноса сведена к задаче рассеяния плоской волны на неоднородном включении, представляющем собой область исходного неоднородного пространства, занятую источником. Нулевая амплитуда переноса трактуется как диаграммная функция излучателя в неоднородном пространстве, так как она, оставаясь постоянной на луче, зависит только от угла выхода луча из источника. Показана эффективность предложенного метода по сравнению с методом функций Грина. Приведены примеры его применения.

В работе [1] был рассмотрен геометрооптический подход к описанию поля направленного излучателя в плавно-неоднородной среде, искривление звуковых лучей в которой существенно проявляется лишь на расстояниях, больших по сравнению с размерами излучателя. Однако, в случае, когда нерегулярностью среды в пределах апертуры антенны пренебречь нельзя, рассматриваемый в [1] подход неприменим, и приходится обращаться к асимптотическим либо численным методам. В настоящей работе для решения указанной проблемы используется один из таких асимптотических методов – метод квазиклассического приближения [2–4]. Ранее в работе [5] указанным методом уже была решена задача нахождения функции Грина (функции точечного источника) для уравнения Гельмгольца с переменным показателем преломления $n(\mathbf{x})$.

Пусть протяженный источник, характеризующийся парой (f, D), где f – функция объемной плотности излучателя, $D = \operatorname{supp} f$ – носитель функции $f(\mathbf{x})$, находится в безграничном пространстве с переменным показателем преломления $n(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (плотность для простоты выкладок принимается постоянной). В математической постановке задача о поле протяженного излучателя выглядит следующим образом:

$$[\Delta + k^2 n^2(\mathbf{x})]u(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \tag{1}$$

$$u = O(|\mathbf{x}|^{(-n+1)/2}), \quad \partial u/\partial|\mathbf{x}| - jku = o(|\mathbf{x}|^{(-n+1)/2}), \tag{2}$$

$$n(\mathbf{x}) \in C^\infty; \quad n(\mathbf{x}) > 0; \quad n(\mathbf{x}) \to 1, \quad |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{3}$$

Пусть, кроме того, скорость спада функции $n(\mathbf{x}) - 1$ на бесконечности для любого мультииндекса α удовлетворяет условию [3]

$$D_x^\alpha(n(\mathbf{x})) \leqslant C_\alpha(1 + |\mathbf{x}|)^{-|\alpha|-2}, \quad C_\alpha = \text{const}. \tag{3,a}$$

Здесь $k = \text{const}$ – значение волнового числа при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Условия излучения (2) и условия стабилизации (3), (3,а) вводятся для выделения единственного решения поставленной задачи [3, 4].

В операторном обозначении задача (1)–(3) имеет вид

$$L(x, -j/k\, \partial/\partial x)\, u(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Здесь L – дифференциальный оператор (1)–(3). Формально для решения задачи (4) необходимо обратить оператор L. Искомое решение тогда запишется в виде

$$u(\mathbf{x}) = L^{-1}(-f(\mathbf{x})).$$

Здесь L^{-1} – оператор, обратный к L. Однако, в общем случае в точной постановке задача обращения оператора L при переменном показателе преломления не решается. В этом случае необходимо прибегать к разработанным к настоящему времени приближенным методам, позволяющим получить так называемое квазирешение. К ним в первую очередь следует отнести метод, применяемый для обращения псевдодифференциальных операторов [6 и др.] и метод, разработанный В.П. Масловым [7].

Однако в настоящей работе проблема существенно упрощается тем, что в работе [5] для задачи (1)–(3) найдена формальная квазиклассическая асимптотика функции Грина, удовлетворяющая уравнению

$$LG_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(k^{-N-1})$$

и доказана ее асимптотическая сходимость к точной функции Грина G

$$|G - G_N| \leqslant k^{-\tilde{N}}(1 + |\mathbf{x}|)^{(1-n)/2}, \quad \tilde{N} = N - (7n + 17)/2. \tag{5}$$

Выражение для G_N при условии отсутствия каустик в точке приема x имеет вид [5]

$$G_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 2^{-n/2}\pi^{(1-n)/2}[n(\mathbf{x}_0)]^{(n-2)/2}k^{(n-3)/2} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{m(x)} \sum_{i=0}^{N+2} \exp[jkS_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) - j\pi(n+S)/4 - j\pi/2\gamma_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})] \times$$
$$\times \varphi_{im}(\mathbf{x})|J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})|^{-1/2}(jk)^{-i}. \tag{6}$$

Здесь S_m – эйконал m-го луча, соединяющего точки $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}$; фаза $\gamma_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ равна числу нулей якобиана J_m с учетом их кратности на интервале $(0, t_m)$; t – параметр вдоль луча; $m(\mathbf{x})$ – число лучей, соединяющих точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$;

$$J_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = [D(x_1, \ldots, x_n)/D(\theta_1^m, \ldots, \theta_{n-1}^m, t_m)]\omega^{-1}(\boldsymbol{\theta}^m);$$
$$\omega(\boldsymbol{\theta}) = \sin^{n-2}\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2};$$

$\boldsymbol{\theta}^m$ – сферические координаты m-го луча на сфере начальных импульсов $\sum_{i=1}^{n} p_{i0}^2 = n^2(\mathbf{x}_0)$; φ_{im} – некоторые функции, удовлетворяющие уравнениям переноса.

В случае наличия в области D особых каустических точек, либо, когда сама точка $\mathbf{x}$ является особой, необходимо функцию Грина представлять через канонический оператор Маслова [5]. Однако в настоящей работе примем, что имеет место обратное.

Используя выражение для квазифункции Грина G_N, получим квазирешение задачи (1)–(3) с помощью композиции правой части (1) f с функцией G_N

$$u_N(\mathbf{x}) = \int_D G_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})f(\mathbf{x}_0)d^n x_0. \tag{7}$$

Легко доказать, используя оценку (5), что в случае ограниченной области D, квазирешение u_N также асимптотически сходится к точному решению u по последовательности k^{-i}, $i = \overline{0, \infty}$. Отметим, однако, что использование "напрямую" метода функций Грина (7) для нахождения квазирешения является малоэффективным вследствие необходимости полного вычисления композиции (7) для каждой точки x, а также отсутствия наглядности решения. Будем поэтому искать квазирешение задачи (1)–(3) в неособых точках $x \bar{\in} D$ в виде стандартного асимптотического разложения

$$u_N(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{m(x)} \sum_{i=0}^{N+2} \exp[jkS_m(\mathbf{x}) - j\pi/2\gamma_m(\mathbf{x})]\psi_{im}(\mathbf{x})|J_m(\mathbf{x})|^{-1/2}(jk)^{-i}. \tag{8}$$

Здесь $S_m, \gamma_m, \psi_{im}, J_m$ – искомые функции. Будем искать эти функции для единичного луча, приходящего в точку $\mathbf{x}$; для остальных лучей выкладки аналогичны. Кроме того, в разложении (6) ограничимся только нулевым членом по обратным степеням k, т.е.

примем $N = -2$. Известно [5], что в (6) $\varphi_{0m} \equiv 1$. Таким образом, для единичного луча имеем (индекс опущен)

$$G_{-2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 2^{-n/2}\pi^{(1-n)/2}[n(\mathbf{x}_0)]^{(n-2)/2}k^{(n-3)/2} \times$$
$$\times \exp[jkS(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) - j\pi(n+S)/4 - j\pi/2\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})]|J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})|^{-1/2}. \quad (9)$$

Для дальнейших рассуждений приведем ряд известных фактов (см. например [3]). Так выписанные справа в (6), (8), (9) функции связаны с лагранжевым многообразием, вложенным в фазовое импульсно-координатное пространство $R^{2n}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$ и отвечающим нулевому уровню гамильтониана, соответствующему оператору (1). Гамильтониан в нашем случае имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 - n^2(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Нулевому уровню $H(x, p)$ соответствует система Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 2\mathbf{p}; \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \nabla n^2(\mathbf{x}); \quad \mathbf{p}|_{t=0} = \mathbf{p}_0. \quad (11)$$

Начальные импульсы подчинены условию $\sum_{i=1}^{n} p_{i0}^2 = n^2(\mathbf{x}_0)$. Решение системы (11) имеет вид

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}\ t) = \mathbf{p}_0 + \int_0^t \nabla n^2(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, \tau))d\tau, \quad \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}\ t) = \mathbf{x}_0 + 2\int_0^t \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}, \tau)d\tau, \quad (12)$$

где ∇ – оператор градиента.

Выражение для эйконала имеет вид

$$S(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t)) = 2\int_0^t n^2(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, \tau))d\tau = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} n(l)\,dl.$$

Интегрирование в последнем случае осуществляется вдоль бихарактеристики, соединяющей проекции точек $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t)$ на лагранжево многообразие, либо вдоль луча l, соединяющего точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$ соответственно; dl – элемент длины луча.

Существует по крайней мере две возможности вычисления функций, стоящих в (8) с помощью композиции (7). Первая заключается в том, что из точки $\mathbf{x}$ строится центральное поле лучей, покрывающих область D. В области D фиксируется некоторая точка $\mathbf{x}^0$ (например, геометрический центр антенны). Эйконал представляется в виде $S(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = S(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}) - S(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$, где $S(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$ следует вычислять на лагранжевом многообразии, соответствующем упомянутому центральному полю лучей. Фаза $\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$, равная числу нулей якобиана $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ с учетом их кратности, называется индексом Морса. В случае гамильтониана вида (10) индекс Морса совпадает с индексом Маслова, который является целочисленным гомотопическим инвариантом по mod (4), и, если $\mathbf{x}_0$ лежит в неособой карте Ω, что соответствует принятому допущению об отсутствии особых точек в D, то $\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ не зависит от $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ [3, с. 147]. Таким образом, правомерно записать $\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x}_0 \in D$. Подставляя (9) в (7), с учетом сказанного, имеем для первого члена асимптотического разложения (8) в случае единичного луча

$$u_{-2}(\mathbf{x}) = \exp[jkS(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}) - j\pi/2\gamma(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})]\psi_0(\mathbf{x})|J(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})|^{-1/2}; \quad (13)$$

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \beta\int_D [n(\mathbf{x}_0)]^{(n-2)/2} f(\mathbf{x}_0)|J(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})/J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})|^{1/2} e^{-jkS(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)} d^n x_0,$$
$$\beta = \exp(-j\pi(n+S)/4)2^{-n/2}\pi^{(1-n)/2}k^{(n-3)/2}. \quad (14)$$

Известно, что нулевая амплитуда на фазовой траектории сохраняет постоянную величину [3, 4]. Поэтому имеем $\psi_0(\mathbf{x}) = \text{const}$, $\forall \mathbf{x}$, лежащих на луче. Или иначе $d\psi_0/dt = 0$ на фазовой траектории. Отметим попутно, что в (14) под интегралом от t

зависит отношение якобианов и эйконал. Таким образом, вычисление интеграла (14) для какого-либо одного значения $\mathbf{x}$ дает постоянную нулевую амплитуду ψ_0 для всех $\mathbf{x}$, лежащих на той же фазовой траектории. Недостатком описанного подхода является сложность вычисления интеграла (14) вследствие необходимости нахождения функций $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ и $S(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ для $\forall\, \mathbf{x}_0 \in D$. Эту трудность удается ослабить с помощью второго подхода, который заключается в том, что точка $\mathbf{x}$ устремляется в бесконечность. В этом случае происходит следующее.

Рассмотрим луч, выходящий из точки $\mathbf{x}^0$ в нужном направлении. Будем рассматривать переменную точку $\mathbf{x}$ на этом луче и лучевую трубку центрального поля лучей, выходящих из точки $\mathbf{x}$, которая "заметает" область D. Устремим теперь $|\mathbf{x}| \to \infty$. Тогда вне некоторой сферы достаточно большого радиуса, включающей в себя D, благодаря условию стабилизации (3), (3,а) лучи в трубке станут прямыми. Кроме того, вследствие бесконечной удаленности точки $\mathbf{x}$, лучи внутри трубки вне указанной сферы станут параллельными, а фронт волны плоским. Центральное поле лучей становится как бы нецентральным, выпущенным с поверхности, представляющей собой участок гиперплоскости, вырезанный в ней лучевой трубкой, нормальной к этой гиперплоскости. Поверхность лежит вне указанной сферы. Фиксировать эту начальную поверхность относительно центрального луча вне указанной сферы естественно можно в любой точке. В этих условиях эйконал $S(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$ в (14) перестает зависеть от t, т.е. от удаленности $\mathbf{x}$ от $\mathbf{x}^0$ по лучу, так как поле лучей становится нецентральным (лучевая трубка стабилизируется), а зависит от взаимного расположения точек $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0 \in D$. Таким образом, в (14) зависимость от t сохраняет только отношение якобианов. Приравнивая нулю производную (14) по t, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} |J(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})/J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})|^{1/2} = 0,$$

или

$$\lim_{t\to\infty} |J(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})/J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})| = c = \text{const},$$

$\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0 \in D$; $\mathbf{x}$ принадлежит центральному лучу. Учитывая, что точка $\mathbf{x}_0$ пробегает все $\mathbf{x} \in D$, в том числе и $\mathbf{x}^0$, находим, что $c = 1$. Таким образом, при $t \to \infty$ величина якобиана $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ перестает зависеть от $\mathbf{x}_0 \in D$. С учетом сказанного имеем из (14)

$$\psi_0(\boldsymbol{\theta}) = \beta \int_D [n(\mathbf{x}_0)]^{(n-2)/2} f(\mathbf{x}_0)\, e^{-jk\tilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)} d^n x_0, \tag{15}$$

где $\tilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0) = \lim\limits_{t\to\infty} S(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$. Таким образом, задача поиска нулевой амплитуды переноса упростилась.

Для вычисления интеграла в (15) необходимо рассчитать только функцию $\tilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$ в отличие от интеграла (14), где необходимо рассчитывать еще и отношение якобианов. После вычисления нулевой амплитуды переноса $\psi_0(\theta)$ остальные амплитуды в (8) можно рассчитывать по рекуррентному соотношению [4, 5]

$$\frac{d}{dt}\, \psi_i(\boldsymbol{\theta}, t) = -|J(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})|^{1/2} \Delta \left(\frac{\psi_{i-1}}{|J(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})|^{1/2}} \right), \quad i > 0$$

или в интегральной форме

$$\psi_i(\boldsymbol{\theta}, t) = \psi_i(\boldsymbol{\theta}, T) - \int_T^t |J(\boldsymbol{\theta}, t')|^{1/2} \Delta \left(\frac{\psi_{i-1}(\boldsymbol{\theta}, t')}{|J(\boldsymbol{\theta}, t')|^{1/2}} \right) dt'. \tag{16}$$

Здесь $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ – лапласиан; $\boldsymbol{\theta}$ – сферические координаты на сфере начальных импульсов в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующие рассматриваемому лучу; T – некоторое значение параметра t на бихарактеристике. Найдем постоянную $\psi_i(\boldsymbol{\theta}, T)$. Это можно сде-

лать, рассматривая предельные случаи, когда лучи выпрямляются либо в непосредственной окрестности точки $\mathbf{x}^0$, либо при $t \to \infty$. Рассмотрим предельный случай $t \to \infty$. При этом показатель преломления $n(x) \to 1$ (стабилизируется), пространство R^n становится однородным, а условия излучения (2) можно переписать в виде [4]

$$u = \varphi(\boldsymbol{\theta}')\, r^{(1-n)/2} e^{jkr}(1 + O(r^{-1})), \quad r \to \infty, \tag{17}$$
$$\boldsymbol{\theta}' = \mathbf{x}/r, \quad r = |\mathbf{x}|.$$

Если теперь решение, представленное при $t \to \infty$ в виде типичного для однородного случая асимптотического разложения [8]

$$u \sim r^{(1-n)/2} e^{jkr} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(\boldsymbol{\theta}')/(jkr)^i \tag{18}$$

подставить в стабилизировавшееся уравнение Гельмгольца $(\Delta + k^2)u = 0$, $r \to \infty$, то можно получить следующую рекурсию [8]

$$\varphi_{i+1}(\boldsymbol{\theta}') = \frac{\Delta_{\boldsymbol{\theta}} + i(i+1) + (1-(n-2)^2)/4}{2(i+1)} \varphi_i(\boldsymbol{\theta}'), \quad i \geqslant 0. \tag{19}$$

Здесь $\Delta_{\boldsymbol{\theta}}$ – угловая часть лапласиана в n-мерном случае. Таким образом, если известна нулевая амплитуда переноса $\varphi_0(\boldsymbol{\theta}')$, которая совпадает с $\varphi(\boldsymbol{\theta}')$ в условии (17), то рекурсия (19) позволяет точно найти последующие амплитуды переноса. Пусть рассматриваемый нами луч, вышедший из точки $\mathbf{x}^0$ под углом $\boldsymbol{\theta}$ при больших t в стабилизировавшейся области переходит в радиальный луч с углом $\boldsymbol{\theta}'$ относительно начала координат. Сшивая в этой области два асимптотических разложения (8) и (18), которые должны совпадать в силу единственности асимптотических разложений, находим $J(\boldsymbol{\theta}, t) = \gamma_1 r^{n-1}$, $\psi_i(\boldsymbol{\theta}, t) = \gamma_2 \varphi_i(\boldsymbol{\theta}')/r^i$, $i \geqslant 0$. Здесь r на луче соответствует параметру t на бихарактеристике; γ_1, γ_2 – константы. Зафиксируем теперь на радиальном луче точку $t = T$, которой соответствует $r = R$. Подставляя в рекурсию (16) соотношения, $\psi_i(\boldsymbol{\theta}, t) = \gamma_2 \varphi_i(\boldsymbol{\theta}')/r^i$, справедливые в стабилизировавшейся области, и учитывая рекурсию (19) для φ_i, находим окончательно, что ψ_i в (16) выражается при произвольных $t \in [0, \infty)$ как на регулярных, так и на неоднородных участках пространства R^n через неопределенный интеграл

$$\psi_i(\boldsymbol{\theta}, t) = -\int |J(\boldsymbol{\theta}, t)|^{1/2} \Delta \left(\frac{\psi_{i-1}(\boldsymbol{\theta}, t)}{|J(\boldsymbol{\theta}, t)|^{1/2}} \right) dt, \quad i > 0 \tag{20}$$

с постоянной интегрирования равной нулю, так как значение интеграла (16) в нижнем пределе интегрирования точно равно постоянной $\psi_i(\boldsymbol{\theta}, T)$ с обратным знаком. Такой же результат может быть получен в другом предельном случае прямолинейных лучей, а именно, когда $t \to 0$. Простейший пример применимости рекурсии (20) представляет собой случай однородного пространства R^n, где (20) сводится к (19).

Таким образом, если известна нулевая амплитуда переноса, то последующие могут быть найдены из (20). Этим завершается построение решения задачи (1)–(3) в виде (8). Окончательно для произвольной точки $\mathbf{x}^0 \in D$ введенные в (8) функции равны (индекс m опущен) следующим функциям: $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})$;

$$\gamma(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}); \quad J(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}),$$

рассматриваемых на лучах, соединяющих точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}$.

Основным в отыскании решения является нахождение нулевой амплитуды переноса $\psi_0(\boldsymbol{\theta})$, которая, как видно из (15), является функцией угловых координат $\boldsymbol{\theta}$. Смысл ψ_0 легко понять, положив $n(\mathbf{x}) \equiv 1$. В этом случае $\tilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}), \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^0)$, фронт волны плоский и функция $\psi_0(\boldsymbol{\theta})$ представляет собой введенную в [8] диаграммную функцию источника (f, D) в однородном пространстве R^n, а решение (8) переходит в соответствующий ряд по степеням $(kr)^{-1}$, полученный в [8] для однородного случая. Здесь $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})$ – единичный вектор, имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\mathbf{x}-\mathbf{x}^0$. Влияние искажающего воздействия неоднородной среды

можно проследить, переписав (15) с учетом следующего равенства

$$\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0) = \widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0) + (\nabla\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0), \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^0) + F(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})) =$$
$$= (\mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}), \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^0) + F(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})). \qquad (21)$$

Здесь учтено, что $\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0) = 0$; $\partial\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0)/\partial x_i = p_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})$; $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})$ – вектор в точке $\mathbf{x}^0$, касательный к лучу, соединяющему $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}$; $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}))$ – функция, равная невязке между эйконалом $\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$ и набегом фазы в плоской волне с эйконалом $(\mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}), \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^0)$. С учетом (21) можно переписать (15) в следующем виде

$$\psi_0(\boldsymbol{\theta}) = \beta \int_D \left\{ [n(\mathbf{x}_0)]^{(n-2)/2} f(\mathbf{x}_0) e^{-jkF(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}))} \right\} e^{-jk(\mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}), \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^0)} d^n x_0. \qquad (22)$$

Здесь β – коэффициент перед интегралом в (14). Из (22) видно, что $\psi_0(\theta)$ можно вновь трактовать, как диаграммную функцию некоторого искаженного неоднородностью источника с объемной плотностью, равной функции в фигурных скобках в (22).

Остановимся подробнее на вычислении предельной функции $\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$. При определении этой функции был допущен произвол в выборе опорного (центрального) луча и точки $\mathbf{x}^0$ на нем. Следовательно, поле предельных лучей, а следовательно и эйконал $\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$, будут различными в зависимости от выбора опорного луча. Допустим, что зафиксирована функция $n(\mathbf{x})$ в области D и ее ближайшей окрестности (эту совокупную область обозначим через D_1) и зафиксирован опорный луч в этой области. Покажем, что при фиксированном угле $\boldsymbol{\theta}$ выхода луча из точки $\mathbf{x}^0 \in D$ на опорном луче, величина $\psi_0(\boldsymbol{\theta})$ на луче меняться не будет при изменении показателя преломления $n(\mathbf{x})$ в рамках условий (3), (3а) в области $R^n \setminus D_1$, а будет меняться лишь траектория опорного луча вне области D_1. Рассмотрим точку $\mathbf{x}$, лежащую на опорном луче в ближайшей окрестности области D, т.е. $\mathbf{x} \in D_1 \setminus D$. Как видно из (14), значение $\psi_0(\boldsymbol{\theta})$ в точке $\mathbf{x}$ зависит от $n(\mathbf{x}_0)$ только для $\mathbf{x}_0 \in D$. Поскольку $\psi_0(\theta)$ должна быть постоянной на луче, то при возмущении $n(\mathbf{x})$ в рамках условий (3), (3а), $\mathbf{x} \overline{\in} D_1$, величина $\psi_0(\boldsymbol{\theta})$ меняться не будет, а изменится лишь траектория опорного луча вне D_1. Таким образом, можно подобрать такое распределение $n(\mathbf{x})$ вне области D_1, чтобы предельное поле лучей, "заметающих" D при $|\mathbf{x}| \to \infty$ ($\mathbf{x}$ лежит на опорном луче при возмущенном $n(\mathbf{x})$) можно было бы легко описать, и тем самым, вычислив $\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$, определить $\psi_0(\boldsymbol{\theta})$ по формуле (15), после чего вернуться к исходному распределению $n(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^n \setminus D_1$, с опорным лучом, который является продолжением зафиксированного опорного луча внутри D_1. Величина $\psi_0(\boldsymbol{\theta})$ останется неизменной. Очевидно, простейшим распределением $n(\mathbf{x})$ вне D_1 является распределение $n(\mathbf{x}) = n_0 = \text{const}$ при условии гладкого продолжения показателя преломления $n(\mathbf{x})$ и ее производных до константы n_0, что необходимо для избежания отражений и ложных каустик. Тогда задача сводится к следующей. На область D_1 падает плоская волна с направления, обратного направлению выхода опорного луча в однородное пространство $R^n \setminus D_1$. Необходимо найти функцию $\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$, т.е. распределение эйконала в области D_1, или фактически решить задачу рассеяния плоской волны на неоднородной области D_1. Приведем простейший пример. Пусть область D является однородной и граничит с неоднородной областью $R^n \setminus D$. В области D находится источник (f, D). Тогда для нахождения $\psi_0(\boldsymbol{\theta})$ необходимо дополнить D до R^n однородной областью $R^n \setminus D$ с тем же показателем преломления. В этом случае фронт волны в D: $\widetilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0) = \text{const}$ – плоский, а $\psi_0(\boldsymbol{\theta})$ совпадает со значением диаграммной функции источника в направлении $\boldsymbol{\theta}$ в однородном пространстве R^n. Возвращаясь к исходному неоднородному пространству, легко построить решение (8). По сути дела, это и было проделано в работе [1]. Описанный подход значительно упрощает задачу, так как ее приходится решать не во всем пространстве R^n, а только в его части D_1.

Приведем примеры применения полученных соотношений.

Пример 1. Рассмотрим двумерный случай, $n = 2$, показатель преломления есть функция только одной координаты $n(x, y) = n(y)$. Источник характеризуется парой (f, D).

Выберем $\mathbf{x}^0 \in D$ и найдем квазирешение на луче, выходящем из $\mathbf{x}^0$ под углом $\pi/2$ к оси x. Очевидно, в силу геометрии, луч будет прямым, параллельным оси y. К этому случаю можно свести расчет поля в сечении x = const в трехмерном нерегулярном волноводе, показатель преломления и глубина в котором зависят только от одной плоской переменной y после квазиразделения переменных методом горизонтальных лучей и вертикальных мод.

Очевидно, что фронт $\tilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0)$ = const будет плоским перпендикулярным выбранному лучу, а сам эйконал равен

$$\tilde{S}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0) = \int_{y^0}^{y_0} n(y)\,dy = \tilde{S}(y^0, y_0).$$

Здесь $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0)$; $\mathbf{x}_0 = (x^0, y_0)$.

Вычисления дают

$$\psi_0(\pi/2) = \beta \int_D f(\mathbf{x}_0) \exp[-jk \int_{y^0}^{y_0} n(y)\,dy]\,d^2x_0;$$

$$\gamma(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}) = 0; \quad J(\pi/2, t) = 2n(y^0)\,n(y)\,t.$$

Подставив эти величины, имеем решение в виде (8), где ψ_i находятся из рекурсии (20).

Пример 2. Рассмотрим случай n = 3. Пусть источник снова характеризуется парой (f, D), но D представляет собой одномерную область, совпадающую с траекторией луча, проходящего от $\mathbf{x}^0 \in D$ к точке $\mathbf{x} \bar{\in} D$. Нулевая амплитуда переноса рассчитывается по формуле

$$\psi_0(\boldsymbol{\theta}) = \int_D n^{1/2}(\mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0) \exp[-jk \int_{\mathbf{x}^0}^{\mathbf{x}_0} n(l)\,dl]\,d^3x_0.$$

Решение ищется в виде (8).

В заключение отметим, что полученное представление имеет по крайней мере два преимущества по отношению к методу функций Грина. Во-первых, оно значительно эффективнее последнего в вычислительном плане, а во-вторых, имеет прозрачный физический смысл. Эффективность вычислений можно показать на примере антенны, состоящей из N элементов. Метод функций Грина предполагает построение в общем случае для каждой точки $\mathbf{x}$ N лучей, соединяющих ее с элементами антенны и соответственно N асимптотических рядов вида (6). В описанном подходе излучатель заменяется эквивалентным точечным и для всех точек фиксированного луча, выходящего из этого точечного источника нулевая амплитуда переноса сохраняет постоянное значение, а необходимо вычислять только якобиан и вторичные амплитуды процесса. Особенно эффективным становится подход в случае, когда можно ограничиться только нулевой амплитудой переноса, что и происходит в действительности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарфарец Б.П.* Геометрооптическое представление поля направленного излучателя в неоднородных средах // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 738–742.
2. *Маслов В.П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988. 312 с.
3. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.
4. *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1982. 296 с.
5. *Кучеренко В.В.* Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера // Теорет. и матем. физика. 1969. Т. 1. № 3. С. 384–406.
6. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987. 696 с.
7. *Маслов В.П.* Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987. 408 с.

8. *Косырев Б.А., Шарфарец Б.П.* Поле протяженного источника в нерегулярных океанических волноводах. Препринт. Владивосток: ТОИ ДВО АН СССР, 1991. 46 с.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВО Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14.02.91

B.P. Sharfarets

QUAZI-CLASSICAL APPROACH FOR REPRESENTING THE FIELD OF A DIRECTIONAL RADIATOR IN INHOMOGENEOUS MEDIA

Asimptotic solution of the inhomogeneous Helmholtz equation with a variable refraction index in multidimensional space is considered. The source is replaced by an equivalent point one. The expressions for the eikonal and amplitude of transfer which are calculated by means of the zero amplitude of transfer is reduced to the problem of scattering of the plane wave on the inhomogeneous obstacle which is the domain of the initial inhomogeneous space occupied with the source. The zero amplitude of the transfer is considered as the source diagram tunction in inhomogeneous space because it is equal to the constant on every ray and therefore depends on the source. The effectiveness of the proposed method in comparison with the Green function is shown. Some examples of applying of this method are presented.