АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 5

УДК 534.222
© 1991 г.

О.В. Руденко, А.К. Сухорукова

НЕЛИНЕЙНАЯ ПИЛООБРАЗНАЯ ВОЛНА В ПОДВОДНОМ ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ

В приближении нелинейной геометрической акустики изучен процесс распространения сильно искаженной нелинейной периодической волны пилообразного профиля в слоистой среде с характеристиками, моделирующими звуковой канал в глубоком океане. Изучено поведение в пространстве формы и ширины пучка с учетом нелинейной изотропизации и фокусировки. Построена картина пространственного распределения максимальных (пиковых) давлений в пилообразной волне.

Изучение процессов распространения интенсивных акустических волн в неоднородных средах представляет интерес для многих прикладных задач. Однако нелинейность приводит к уширению спектра исходного сигнала, что не позволяет использовать обычное приближение геометрической акустики, удобное для описания квазимонохроматических волн. В работе авторов [1] из уравнения типа Хохлова–Заболотской для плавно неоднородной среды [2] получены уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{b}{2 c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} - p \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{\rho c} +$$

$$+ \nabla_\perp \psi \nabla_\perp p + \frac{1}{2} \Delta_\perp \psi_p = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla_\perp \psi)^2 + \frac{1}{2} (1 - n^2) = 0, \tag{2}$$

позволяющие описывать нелинейные волны с широким спектром. Заметим, что здесь p – акустическое давление, а не амплитуда волны, как в линейном геометроакустическом приближении; ϵ, b – параметры нелинейности и диссипации; ρ, c – плотность и скорость звука. Координата x отсчитывается вдоль центрального луча (оси пучка), а координаты $\mathbf{r}$ вводятся в плоскости, ортогональной лучу. Далее: $\psi(x, \mathbf{r})$ – эйконал, $\theta = t - (x + \psi)/c$ – время в системе координат, сопровождающей волну, n – показатель преломления. Все величины, характеризующие среду, могут зависеть от пространственных координат.

В отличие от обычного уравнения переноса уравнение (1) (оно является обобщением уравнения Бюргерса для неоднородной среды) содержит временную переменную θ. Если вычеркнуть в (1) нелинейный член и положить $p = A(x, \mathbf{r}) \exp(-i\omega\theta)$, придем к обычному уравнению переноса в квазиоптическом (параболическом) приближении.

Как показано в работе [1], существует еще один, очень важный случай (профиль волны сильно искажен и может считаться пилообразным), когда в уравнении (1) также удается исключить переменную θ. При этом нелинейность учитывается полностью, а функция $A(x, \mathbf{r})$ имеет смысл не амплитуды, а "пикового" давления в пилообразной волне. Получаемое таким образом "уравнение переноса" с квадратично-нелинейным членом имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\epsilon\omega}{\pi c^3 \rho} A^2 - A \frac{\partial}{\partial x} \ln\sqrt{\rho c} + \nabla_\perp \psi \nabla_\perp A + \frac{1}{2} \Delta_\perp \psi A = 0. \tag{3}$$

Заметим, что аналогичный подход был использован при описании самовоздействия акустических пучков (где неоднородность создается полем самой волны) и в некоторых других задачах нелинейной акустики [3, 4]. Применительно к однородным средам подход изложен в книге [5], где с его помощью анализируются явления нелинейной изотропизации пучков, связанные с нелинейным затуханием пилообразных волн.

В работе [1] рассмотрено прохождение волны через фокусирующую неоднородность среды, локализованную вдоль оси x. Здесь же, напротив, исследуется среда, неоднородная в поперечном и однородная в продольном направлении. Такая постановка задачи характерна для многих реальных ситуаций, в частности для распространения акустических волн в слоисто-неоднородном океане.

Будем полагать, что распространяется плоский пучок с амплитудой $A(x, y)$, $y \perp x$, в неоднородной среде с параболическим профилем показателя преломления $n^2 = 1 - y^2/a^2$ и постоянной плотностью $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Скорость звука определяется как

$$c = c_0/n = c_0(1 - y^2/a^2)^{-1/2}, \tag{4}$$

где c_0 – скорость звука на оси канала. Уравнения (2) и (3) перепишем в виде

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\epsilon\omega}{\pi c^3 \rho_0} A^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} A = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} (1 - n^2) = 0. \tag{6}$$

Аппроксимируя профиль скорости формулой (4), мы тем самым рассматриваем задачу о распространении пилообразной волны в форме плоского (щелевого) пучка вблизи оси волновода, на глубине порядка a. Как известно, в этом случае пучок не выходит из звукового канала, а ход лучей описывается выражением

$$y = a \operatorname{tg}\varphi_0 \sin(x/a) + y_0 \cos(x/a). \tag{7}$$

Поскольку формула (7) получена как решение уравнения (6), отметим ограничения, которые вносит упрощенное уравнение эйконала (6). Решение (7) справедливо, когда $\operatorname{tg}\varphi_0 \ll 1$ и $y_0/a \ll 1$. Здесь $\operatorname{tg}\varphi_0 = (\partial\psi/\partial y)_{x=0}$ – тангенс угла наклона луча к оси x, $y = y_0$ – точка входа луча (в сечении $x = 0$).

Рассмотрим вначале частный случай: на входе пучок параллелен оси x и имеет плоский фазовый фронт. Уравнение (5) удается решить точно:

$$\frac{A}{p_0} = \frac{\Phi[y/\cos(x/a)]}{\sqrt{\cos(x/a)}} \left\{ 1 + \frac{a}{x_p} \Phi\left[\frac{y}{\cos(x/a)} \right] \int_0^{x/a} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{dz}{\sqrt{\cos z}} \left[1 - \frac{y^2}{a^2} \frac{\cos^2 z}{\cos^2(x/a)} \right]^{3/2} \right\}^{-1}. \tag{8}$$

Здесь Φ – функция, описывающая поперечную структуру пучка на входе $x = 0$: $A(0, y) = p_0\Phi(y)$, длина образования разрыва $x_p = \pi c_0^3 \rho_0/\epsilon\omega p_0$ – это характерный масштаб нелинейного поглощения. Отметим, что пучок, падающий на среду под углом $\varphi_0 = 0$, в линейной ($x_p \to \infty$) неоднородной среде фокусируется на длине $x_ф/a = \pi/2$. Очевидно, пиковое давление возрастает до бесконечности в точке фокуса. В реальных системах этому процессу препятствует дифракция, которой мы пренебрегли при выводе уравнений. Поэтому будем изучать процесс, не доходя до фокальной точки.

Если среда нелинейна, то исходный профиль пучка искажается при его распространении. Искажение тем сильнее, чем больше нелинейность, характеризуемая отношением a/x_p. Действительно, предположим, что нелинейность сильна, т.е. $a/x_p \gg 1$. Тогда для

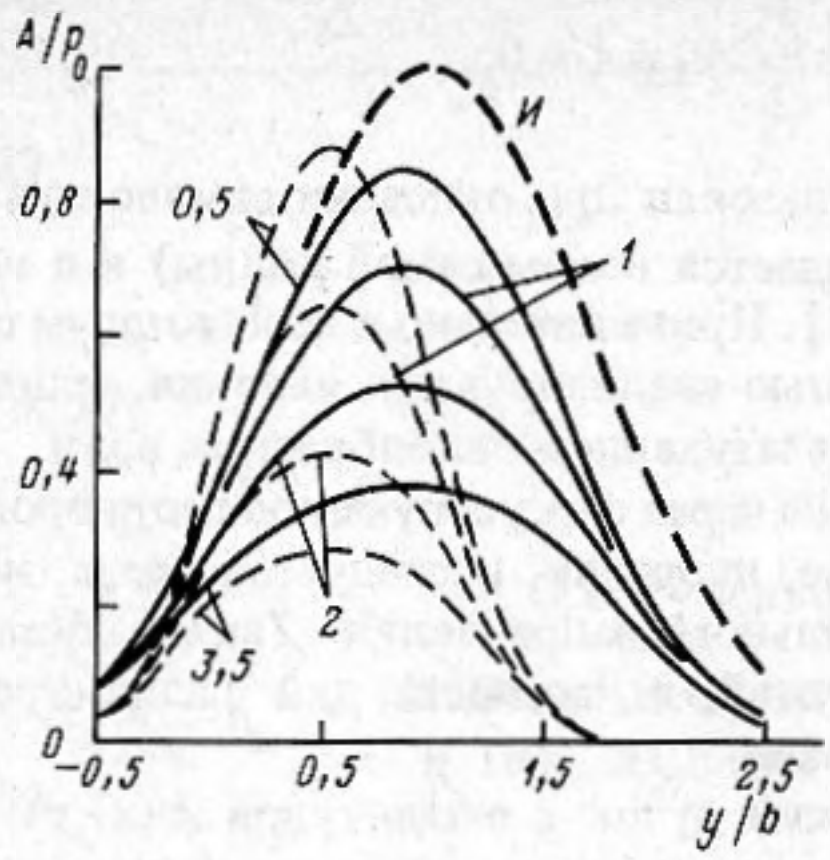

Рис. 1

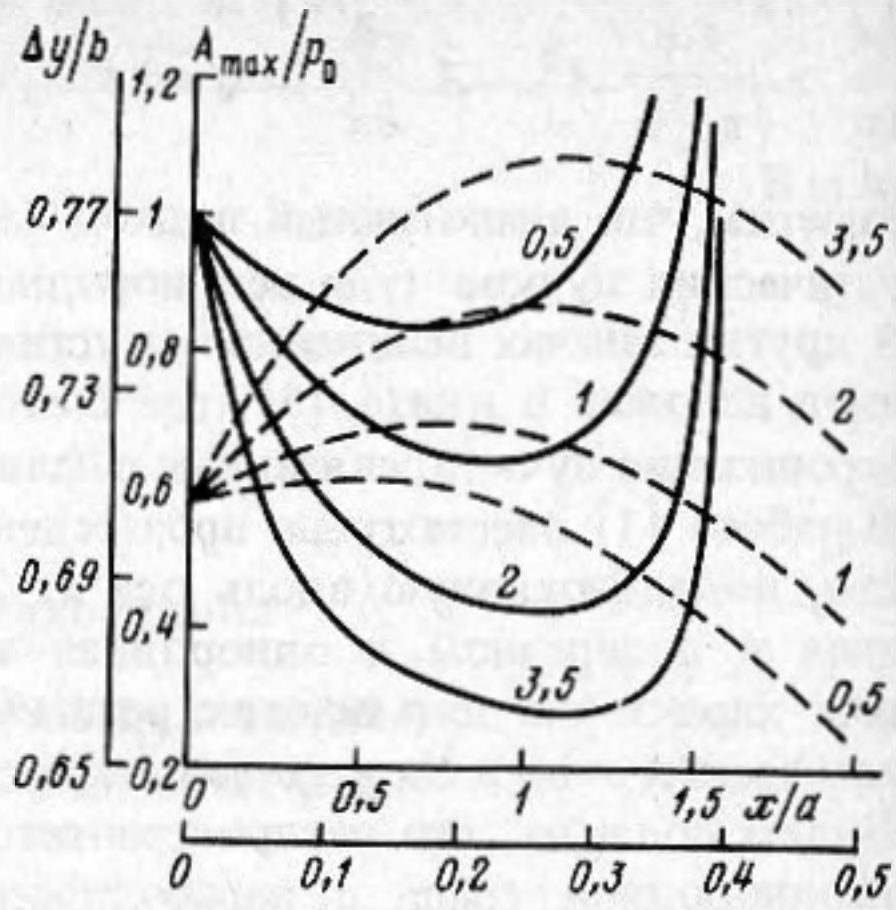

Рис. 2

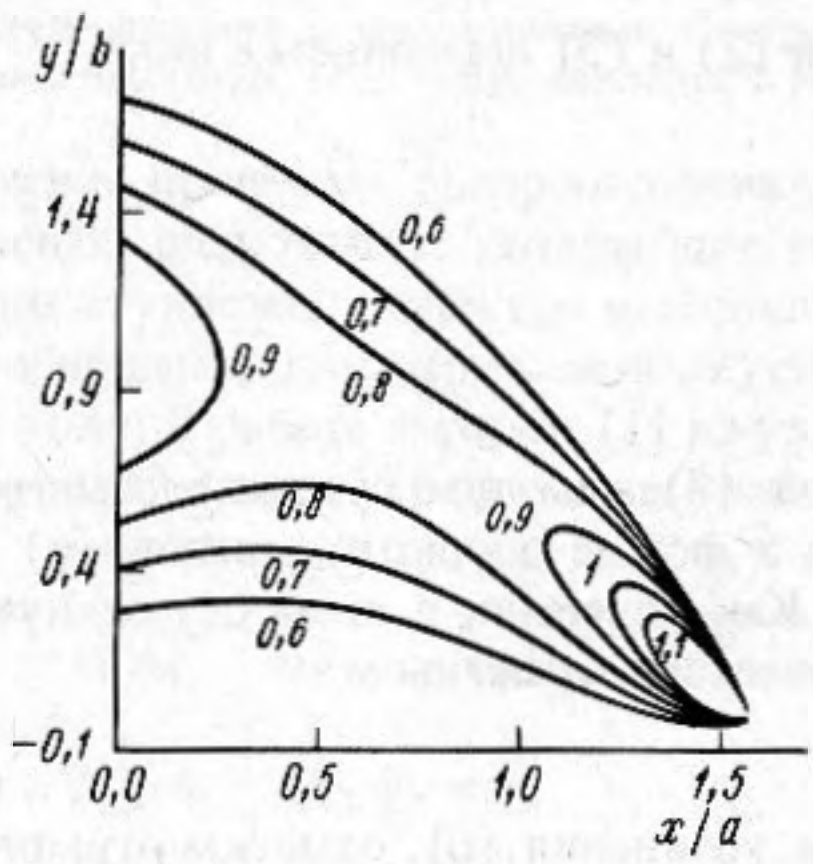

Рис. 3

Рис. 1. Профили пучка на различных расстояниях $x/a = 0{,}5$ (сплошные кривые), $x/a = 1$ (штриховые линии), пройденных волной в неоднородной среде, и различных значениях нелинейности a/x_p, отмеченных цифрами у кривых. Пучок И – начальный гауссов профиль

Рис. 2. Максимальные давления на оси пучка A_{max}/p_0 (сплошные линии) и ширины пучков $\Delta y/b$ (штриховые кривые) при различных значениях параметра нелинейности a/x_p, отмеченных цифрами у кривых

Рис. 3. Уровни равных давлений $A/p_0 = \mathrm{const}$ (отмечены цифрами) в среде со значением параметра нелинейности $a/x_p = 0{,}5$

центральной области пучка единицей в знаменателе формулы (8) можно пренебречь. Правая часть (8) перестает зависеть от y, если не учитывать слабую зависимость под интегралом. Это указывает на эффект изотропизации, происходящий из-за нелинейного поглощения: исходный (например, гауссов $\Phi(y) = \exp(-y^2/b^2)$) профиль пучка стремится принять прямоугольную форму [2, 5].

Если центр пучка на входе $x = 0$ не совпадает с осью звукового канала, а расположен на расстоянии $y = y_0$ от нее, к тому же угол падения отличен от нуля, $\varphi_0 \neq 0$, то решение (8) следует модифицировать: функцию $\Phi\,[y/\cos(x/a)]$ нужно заменить на эту же функцию от другого аргумента, определяемого ходом лучей (7):

$$\Phi = \Phi[\,y/\cos(x/a) - a\,\mathrm{tg}\,\varphi_0\,\mathrm{tg}(x/a) - y_0\,]. \qquad (9)$$

Выражение (8) с учетом (9) исследовалось нами с помощью ЭВМ. Полученные результаты представлены на трех рисунках; всюду полагалось $\varphi_0 = 0$.

На рис. 1 изображены профили пучка на различных длинах: сплошные линии соответствуют длине $x/a = 0{,}5$, штриховые – $x/a = 1$. Кривая И – исходный гауссов профиль. Цифрами у кривых отмечены соответствующие величины a/x_p. Из рисунка видно, что исходный пучок, отстоящий от оси канала на $y_0/b = 1$, при распространении в среде смещается к оси $y = 0$, сужается и изменяет форму. Особенно четко изменение формы (изотропизация) наблюдается при большой нелинейности $a/x_p = 3{,}5$. При малой нелинейности, $a/x_p = 0{,}5$, форма пучка изменяется слабо.

На рис. 2 сплошными линиями показаны максимальные давления на оси пучка при различных нелинейностях a/x_p. Отметим, что ось пучка искривляется по закону $y = y_0 \cos(x/a)$. Штриховыми кривыми отмечена ширина пучка, измеряемая на половинном уровне максимальной амплитуды. Отчетливо прослеживается общая картина. Давление вначале уменьшается, а ширина пучка растет. Увеличение нелинейности усиливает этот эффект. Это объясняется усилением нелинейного поглощения. В дальнейшем фокусирующие свойства неоднородной среды приводят к возрастанию давления с одновременным сужением пучка.

На рис. 3 изображены уровни равного давления $A/p_0 = \mathrm{const}$ (они помечены цифрами) при $a/x_p = 0{,}5$. Ясно видны как процесс сужения пучка при подходе к фокусу, так и уменьшение давления вследствие нелинейного поглощения, а затем и его возрастание. Приблизительно в точке $x/a = 0{,}7$; $y/b = 0{,}8$ образуется "седло". Линия, проведенная вдоль луча, в ' седле ' имеет вогнутость, а поперек луча – выпуклость.

Оценим характерные значения параметра a/x_p для реальных ситуаций. Для воды $\epsilon = 4$, $\rho_0 = 1$ г/см^3, $c_0 = 1{,}5 \cdot 10^5$ см/с. Возьмем частоту $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ Гц и давление $p_0 = 0{,}1$ атм ≈ 1 Н/см$^2 = 10^5$ дин/см^2. Подставляя эти величины в написанную выше формулу, получим: $a/x_p = 3{,}5$ при $a = 1{,}5$ км, $a/x_p = 0{,}5$ при $a = 200$ м.

Параметр a, характеризующий неоднородность среды, определяет длину фокусировки. Использованные при оценках значения a соответствуют наблюдаемому ходу лучей в звуковом канале в глубоком океане. Заметим, что с увеличением a (уменьшением фокусирующих свойств неоднородности) сильнее проявляются эффекты нелинейного поглощения.

На рис. 1–3 рассчитан пример волнового пучка с плоским исходным фронтом, ось которого не совпадает с осью звукового канала и угол падения $\varphi_0 = 0$. При распространении в неоднородной среде вследствие искривления лучей пучок фокусируется на оси канала в точке: $y_ф = 0$, $x_ф = a\pi/2$. Это ясно видно на рис. 3. Если угол падения $\varphi_0 \neq 0$, то пучок также будет фокусироваться в фокальной плоскости $x_ф = a\pi/2$, но не на оси канала, а в точке $y_ф = a\,\mathrm{tg}\varphi_0$. Интересно отметить, что для этого случая рисунок 2 остается неизменным, так как искривление оси пучка не влияет на поведение максимального давления и ширины пучка (см. формулу (8)).

В заключение укажем, что подход и результаты этой работы могут быть использованы в решении по крайней мере двух прикладных задач: при расчете параметрического излучателя, работающего вблизи оси ПЗК в режиме насыщения (в этом случае рисунок 3 трактуется как картина поля нелинейных источников НЧ-сигнала), а также при расчете прохождения взрывных импульсных сигналов через неоднородную среду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В., Сухорукова А.К.* Нелинейные пилообразные волны в неоднородной среде. Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 4. С. 753–759.
2. *Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллинн: Валгус, 1984. 154 с.
3. *Руденко О.В., Сагатов М.М., Сапожников О.А.* Тепловая самофокусировка пилообразных волн//ЖЭТФ. 1990. Т. 98. № 3 (9). С. 808–818.
4. *Руденко О.В., Сапожников О.А.* Мощные акустические пучки: самовоздействие разрывных волн, фокусировка импульсов и экстракорпоральная литотрипсия//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия. 1991. Т. 32. № 1. С. 3–17.
5. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 434 с.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
06.05.91

O.V. Rudenko, A.K. Sukhorukova

NONLINEAR SAWTOOTH–LIKE WAVE IN UNDERWATER SOFAR CHANNEL

Using nonlinear geometrical acoustic approximation the propagation process for nonlinear periodic wave having sawtooth–like profile is studied. The properties of layered medium are considered which correspond to sofar channel. Inhomogeneity is supposed to be smooth, slowly–varying in transverse direction (in cross–section of the sound beam). Along the direction of propagation of the sawtooth wave the medium properties are homogeneous. New general analytical solutions describing nonlinear sound field are obtained. The space–behaviour of the beam profile and the beam width as well as maximum (peak) pressure in sawtooth wave are investigated taking into account nonlinear isotropisation, nonlinear absorption and focusing processes. Peak pressure on the curved axis of the sound beam, the characteristic width of the beam for different parameters of nonlinearity and inhomogeneity, as well as constant pressure levels in two–dimensional space are computed. The results seem to be applicable to parametric array which radiates signals at high pressure levels near saturation regime, and to explosion signals transmitting through inhomogeneous media.