АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 4

УДК 534.23

© 1991 г.

Б.П. Шарфарец

ПОЛЕ ПРОТЯЖЕННОГО ИСТОЧНИКА В РЕГУЛЯРНОМ ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Решение неоднородного уравнения Гельмгольца, описывающее звуковое поле протяженного гармонического источника в океаническом волноводе в виде слоистого жидкого полупространства, ищется в виде разложения по полной системе собственных функций соответствующей поперечной краевой задачи, сводящейся к сингулярной задаче Штурма–Лиувилля, имеющей как дискретный, так и непрерывный спектры. Полученное решение оказывается связанным с диаграммной функцией излучателя, характеризующегося объемной плотностью, совпадающей с правой частью исходного уравнения.

Задача нахождения поля протяженного гармонического источника в регулярных океанических волноводах относится в настоящее время к разряду достаточно хорошо изученных. Библиография по этой проблеме насчитывает более десятка работ. Не приводя все эти работы, перечислим лишь те, в которых отражен тот или иной общий подход решения задачи. Метод представления источника счетной системой мультиполей изложен в работе [1]. Метод функций Грина точный и в приближении ВКБ отражены соответственно в работах [2, 3]. В работе [4] излагается метод диаграммных функций. В работе [5] приведен метод когерентных состояний.

В настоящей работе излагается подход к решению указанной задачи, основанный на разложении решения по полной системе собственных функций соответствующей поперечной краевой задачи.

Рассмотрим случай регулярного волновода, представляющего собой жидкое слоистое полупространство с переменной плотностью $\rho(z)$ и скоростью звука $c(z)$. При этом $\rho(z)$ и $c(z)$ могут иметь разрывы (например, на глубине H). В этом случае математическая формулировка задачи о поле давления p источника (f, D) может быть записана в виде

$$Lp = (L_r + L_z)p = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\infty, \tag{1}$$

$$p|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

$$[p]_{z=H} = 0, \quad [\rho^{-1}(z)\,\partial p/\partial z]_{z=H} = 0, \tag{3}$$

$$p \in M(\Omega_\infty). \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y, z)$; $f(\mathbf{x})$ – объемная плотность источника,

$$L_r = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2 = \Delta_\perp,$$

$$L_z = \rho(z)\partial/\partial z(\rho^{-1}(z)\partial/\partial z) + k^2(z),$$

$$r = |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{r} = (x, y) = (r, \varphi), \quad D = \operatorname{supp} f,$$

скобки в (3) означают разность пределов стоящих в них величин при $z \to H \pm 0$; $\Omega_\infty = \Omega \cup \Omega_1$ – слоистое полупространство;

$$\Omega = \{\, \mathbf{x} \in R^3 : x, y \in R^2, z \in [0, H] \,\},$$

$$\Omega_1 = \{\, \mathbf{x} \in R^3 : x, y \in R^2, \quad z \in (H, \infty) \,\},$$

условие (4) обозначает записанные формально условия излучения при $|\mathbf{x}| \to \infty$, которые ниже конкретизируются.

С помощью замены

$$u = p\rho^{-1/2}(z) \tag{5}$$

уравнение (1) преобразуется к стандартному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + K^2(z))\, u = -f(\mathbf{x})/\rho^{1/2}(z). \tag{6}$$

Здесь

$$K^2(z) = K^2(z) + \frac{1}{2\rho(z)} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z^2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z}\right)^2.$$

Краевые условия (2), (4) сохраняются неизменными. Условия сшивки (3) преобразуются к виду

$$[u\rho^{1/2}]_{z=H} = 0, \quad [\rho^{-1}\partial(u\rho^{1/2})/\partial z]_{z=H} = 0. \tag{7}$$

Для решения задачи (6), (2), (7), (4) рассмотрим вспомогательную задачу Штурма–Лиувилля

$$(\partial^2/\partial z^2 + K^2(z))\varphi(z, \xi^2) = \xi^2 \varphi(z, \xi^2). \tag{8}$$

Примем далее допущение о существовании предела

$$\lim_{z \to \infty} K^2(z) = K_\infty^2 < \infty.$$

Введем обозначения: $K^2(z) - K_\infty^2 = q(z)$, $K_\infty^2 - \xi^2 = \lambda$. После этого задача (8) преобразуется к виду

$$(\partial^2/\partial z^2 + q(z) + \lambda)\varphi(z, \lambda) = 0. \tag{9}$$

Примем следующее правдоподобное для акустики океана допущение о том, что $q(z) \in L^1(0, \infty)$, т. е. $\int_0^\infty |q(z)|\, dz < \infty$. Тогда, кроме стандартного краевого условия (2) на поверхности и условия сшивки при $z = H$ для φ можно поставить классическое условие излучения при $z \to \infty$ [6]:

$$\partial\varphi(z, \lambda)/\partial z - i\sqrt{\lambda}\,\varphi(z, \lambda) = o(1), \quad z \to \infty. \tag{10}$$

Задача (9), (2), (7), (10) носит название сингулярной задачи Штурма–Лиувилля [6]. Спектр такой сингулярной задачи состоит из двух компонент: дискретной Λ_1, содержащей конечное число N собственных значений λ_n, и непрерывной Λ_2, содержащей все вещественные числа $\lambda > 0$ [6, 7]. Указанная непрерывная компонента существует всегда (при любом $q \in L^1(0, \infty)$), тогда как дискретная компонента может и отсутствовать, например в случае $K^2(z) \equiv K_\infty^2 = \text{const}$, $q(z) \equiv 0$. Последнее означает, что дискретная компонента может существовать только для переменного $K(z)$, который полностью определяет ее свойства, т. е. общее количество и характер расположения соответствующих собственных значений. Указанным множеством Λ_j, $j = 1, 2$, отвечают дискретный и непрерывный спектры

$$\Lambda_1^\xi = \{\, \xi_n^2 \in R^1 : \xi_n^2 = K_\infty^2 - \lambda_n, \lambda_n \in \Lambda_1 \,\},$$

$$\Lambda_2^\xi = \{\, \xi^2 \in R^1 : \xi^2 < K_\infty^2 \,\},$$

$$K_\infty^2 \leqslant \xi_n^2 < K_{\max}^2 = \max_z K^2(z), \quad \forall\, \xi_n^2 \in \Lambda_1^\xi.$$

Имеет место следующая теорема разложения [8]: пусть $\psi(z) \in L^2(0, \infty)$ – непрерывная функция при $z \in (0, \infty)$, тогда имеет место разложение

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi^2)\varphi(z, \xi^2)\, d\sigma(\xi^2) = (F(\xi^2), \varphi(z, \xi^2))_{\sigma(\xi^2)}, \tag{11}$$

где функция $F(\xi^2)$ определяется интегралом

$$F(\xi^2)=\int_0^\infty \psi(z)\varphi(z,\xi^2)\,dz=(\psi(z),\varphi(z,\xi^2))_z, \tag{12}$$

$\varphi(z,\xi^2)$ – решение задачи (9), (2), (7), (10); $\sigma(\xi^2)$ носит название спектральной функции, которая является монотонно возрастающей на непрерывном спектре и ступенчатой (кусочно-постоянной) на дискретном спектре с величиной скачка γ_n^{-2}, где γ_n определено ниже. С учетом наличия дискретного спектра (скачков функции $\sigma(\xi^2)$) разложение (11) приводится к виду

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{F_n\varphi(z,\xi_n^2)}{\gamma_n^2}+\int_{-\infty}^{K_\infty^2}F(\xi^2)\varphi(z,\xi^2)\,d\sigma(\xi^2). \tag{13}$$

Здесь

$$F_n=(\psi(z),\varphi(z,\xi_n^2))_z,\quad F(\xi^2)=(\psi(z),\varphi(z,\xi^2))_z,$$
$$\gamma_n^2=(\varphi(z,\xi_n^2),\varphi(z,\xi_n^2))_z=\|\varphi(z,\xi_n^2)\|^2.$$

Кроме того, имеют место соотношение ортогональности

$$(\varphi(z,\xi_n^2),\varphi(z,\xi_m^2))_z=\gamma_n^2\delta_{nm} \tag{14а}$$

для собственных функций дискретного спектра, и

$$(\varphi(z,\xi^2),\varphi(z,\xi'^2))_z=\delta(\xi^2-\xi'^2) \tag{14б}$$

для собственных функций непрерывного спектра [8]. Перекрестное скалярное произведение собственных функций дискретного и непрерывного спектров равно нулю. Кроме того, система функций $\varphi(z,\xi^2)$, являющихся решением задачи (9), (2), (7), (10), образует полную систему функций в $L^2(0,\infty)$ [8]. В случае несамосопряженной задачи Штурма–Лиувилля (выше рассматривалась самосопряженная задача) имеют место аналогичные разложения по биортогональной системе функций, являющихся решениями задачи Штурма–Лиувилля, сопряженной к исходной [7]. Порядок вычисления спектральной функции $\sigma(\xi^2)$ приведен в работе [8]. В частности, для волновода Пекериса $\sigma(\xi^2)=\xi^2$ [9].

С учетом приведенной теоремы разложения будем искать решение уравнения (6) в виде

$$u(\mathbf{r},z)=\sum_{n=1}^{N}U_n(\mathbf{r})\varphi(z,\xi_n^2)+\int_{-\infty}^{K_\infty^2}U(\mathbf{r},\xi^2)\varphi(z,\xi^2)\,d\sigma(\xi^2). \tag{15}$$

Правую часть в (6) представим в виде (13)

$$f(\mathbf{x})=\sum_{n=1}^{N}\frac{F_n(\mathbf{r})\varphi(z,\xi_n^2)}{\gamma_n^2}+\int_{-\infty}^{K_\infty^2}F(\mathbf{r},\xi^2)\varphi(z,\xi^2)\,d\sigma(\xi^2). \tag{16}$$

Здесь F_n и F определяются из (12), а именно

$$F_n(\mathbf{r})=(f(\mathbf{x})\rho^{-1/2}(z),\varphi(z,\xi_n^2))_z,$$
$$F(\mathbf{r},\xi^2)=(f(\mathbf{x})\rho^{-1/2}(z),\varphi(z,\xi^2))_z.$$

Подставляя выражения (15) и (16) в уравнение (6), перемножая, далее, скалярно обе его части с функцией $\varphi(z,\xi^2)$ на интервале $z\in(0,\infty)$ на непрерывном и дискретном спектре и учитывая соотношения (14) и уравнение (8), имеем

$$(\Delta_\perp+\xi_n^2)U_n(\mathbf{r})=-F_n(\mathbf{r})\gamma_n^{-2},\quad \xi_n^2\in\Lambda_1^\xi; \tag{17}$$
$$(\Delta_\perp+\xi^2)U(\mathbf{r},\xi^2)=-F(\mathbf{r},\xi^2),\quad \xi^2\in\Lambda_2^\xi. \tag{18}$$

Для однозначного решения (17), (18) к ним необходимо добавить стандартные условия излучения для уравнения Гельмгольца в R^2 [10] $(\partial/\partial r-i\xi)U=o(r^{-1/2}),\ r\to\infty$. Здесь U – решение уравнения (17), либо (18).

Найдем решение задачи (17) (решение задачи (18) находится аналогично). Применяя к обеим частям (17) прямое двумерное преобразование Фурье и найдя из получившегося алгебраического выражения значение образа, получаем затем с помощью обратного преобразования само решение в следующем виде:

$$U_n(\mathbf{r}) = -\gamma_n^2 \int\limits_{R^2} \frac{\hat{F}_n(\xi')e^{i\xi'\cdot\mathbf{r}}}{\xi_n^2 - k_x^2 - k_y^2} d^2\xi' = -\gamma_n^{-2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \frac{\hat{F}_n(\xi', \varphi_1)\, e^{i\xi'\cdot\mathbf{r}}}{\xi_n^2 - \xi'^2} \xi' d\varphi_1 d\xi'. \qquad (19)$$

Здесь

$$\hat{F}_n(\xi') = F[F_n](\xi') = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{R^2} F_n(\mathbf{r})\, e^{-i\xi'\cdot\mathbf{r}} d^2r,$$

$$\xi' = (k_x, k_y) = (\xi', \varphi_1),\ \xi' = |\xi'|.$$

Деформированием пути интегрирования в комплексных плоскостях ξ' и φ_1, как показано в работе [11], интеграл (19) сводится к виду

$$U_n(\mathbf{r}) = -\gamma_n^{-2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{i\infty}^{-i\infty} \frac{\hat{F}_n(\xi', \varphi + t)\, e^{i\xi' r\cos t}}{\xi_n^2 - \xi'^2} \xi' dt d\xi'.$$

Вычисление последнего интеграла по переменной ξ' методом контурного интегрирования дает

$$U_n(\mathbf{r}) = \frac{i\pi}{\gamma_n^2} \int\limits_{i\infty}^{-i\infty} \hat{F}_n(\xi_n, \varphi + t)\, e^{i\xi_n r\cos t} dt. \qquad (20)$$

Учитывая (20), получаем для модовой части решения в (15) следующее выражение:

$$u_1(r, \varphi, z) = i\pi \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(z, \xi_n^2)}{\|\varphi(z, \xi_n^2)\|^2} \int\limits_{i\infty}^{-i\infty} \hat{F}_n(\xi_n, \varphi + t)\, e^{i\xi_n r\cos t} dt,\ r, \varphi, z \in \Omega_\infty. \qquad (21)$$

После оценки интегралов в (21) методом перевала аналогично тому, как это осуществлено в [4], получаем выражение для модовой части в следующем виде:

$$u_1(r, \varphi, z) \sim i(2\pi)^{1/2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(z_0, \xi_n^2)\varphi(z, \xi_n^2)}{\|\varphi(z, \xi_n^2)\|^2} e^{i(\xi_n r - \pi/4)} \sum_{k=0}^{\infty} D_{n,k}(\varphi)/(\xi_n r)^{k+1/2}. \qquad (22)$$

Здесь $D_{n,k}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению [4]

$$D_{n,k+1}(\varphi) = \frac{(\partial^2/\partial\varphi^2 + k(k+1) + 1/4)}{2j(k+1)} D_{n,k}(\varphi),\ k = \overline{0, \infty}, \qquad (23)$$

$$D_{n,0}(\varphi) = \pi\hat{F}_n(\xi_n, \varphi)/\varphi(z_0, \xi_n^2) = \int\limits_D f(\mathbf{x})\rho^{-1/2}(z)\varphi(z, \xi_n^2)e^{-i\xi_n\cdot\mathbf{r}} d^3x/(4\pi\varphi(z_0, \xi_n^2)). \qquad (24)$$

Пределы интегрирования в последнем интеграле при определении $\hat{F}_n(\xi_n)$ сужены с Ω_∞ до области D вследствие финитности функции $f(x)$. Учитывая (5), получаем окончательно из (22) выражение для модовой составляющей давления p_1:

$$p_1(r, \varphi, z) \sim i(2\pi)^{1/2}\rho^{1/2}(z) \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(z_0, \xi_n^2)\varphi(z, \xi_n^2)}{\|\varphi(z, \xi_n^2)\|^2} e^{i(\xi_n r - \pi/4)} \sum_{k=0}^{\infty} D_{n,k}(\varphi)/(\xi_n r)^{k+1/2},$$

$$r, \varphi, z \in \Omega_\infty. \qquad (25)$$

Полагая, что в слое Ω плотность постоянна $\rho(z) \equiv 1$, приходим к тому, что выражение (25) для модовой составляющей давления в слое Ω сводится к соответствующему выражению для поля направленного излучателя, полученному в работе [4] методом диаграммных функций (выражение (20) работы [4]). Выражение (24) сводится в этом случае к выражению для диаграммной функции точечного источника, эквивалентного данному источнику (f, D) (выражение (21) работы [4]).

Совершенно аналогично получаем выражение для поля сплошного спектра излучателя (f, D):

$$p_2(r, \varphi, z) \sim j(2\pi)^{1/2}\rho^{1/2}(z)\int_{-\infty}^{K_\infty^2} \varphi(z_0, \xi^2)\varphi(z, \xi^2)\, e^{i(\xi r-\pi/4)} \sum_{k=0}^{\infty} D_k(\xi^2, \varphi)/(\xi r)^{k+1/2} d\sigma(\xi^2), \tag{26}$$

где D_k удовлетворяет рекурсии (23), а D_0 определяется из (24) при $\xi^2 \in \Lambda_2^{\xi}$.

Отметим, далее, что в случае $f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ выражения (25), (26) сводятся к соответствующим выражениям для поля точечного источника (см., например, [7]).

В заключение сделаем несколько замечаний.

Приведенные здесь результаты относятся к случаю $q \in L'(0, \infty)$. Если это условие не выполнено, возможны варианты, обзор которых дан в работе [12].

Использованный здесь подход можно распространить на случай, когда область Ω_1 представляет собой упругое полупространство.

Наконец, отметим, что при решении задачи в трехмерном случае, попутно решалась задача для R^2. Так, решение задачи

$$(\Delta_\perp + k^2)u = -F(\mathbf{r}), \quad k = \text{const}, \quad \mathbf{r} \in R^2,$$

представляется в виде (см. решение уравнения (17))

$$u(r, \varphi) = i\pi \int_{i\infty}^{-i\infty} \hat{F}(k, \varphi + t)\, e^{ikr\cos t} dt \sim (2\pi)^{1/2} i e^{i(kr-\pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\varphi)/(kr)^{n+1/2}. \tag{27}$$

Здесь $D_n(\varphi)$ определяется рекурсией (23), а

$$D_0(\varphi) = \hat{F}(k, \varphi)\pi = \int_D F(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^2r/4\pi, \mathbf{k} = (k, \varphi), \tag{28}$$

$D = \text{supp}F$. Как видно из (27), главный член асимптотики поля имеет вид

$$u(r, \varphi) \sim (2\pi)^{1/2}\, i\, \frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{(kr)^{1/2}}\, D_0(\varphi).$$

Таким образом, $D_0(\varphi)$ характеризует направленность источника (F, D) и, как видно из (28), диаграмма направленности этого источника с точностью до постоянного множителя равна следу двумерного фурье-образа правой части $F(r)$ на окружности радиусом k.

Аналогично можно показать, что в случае R^3 диаграмма направленности излучателя (f, D) равна следу трехмерного фурье-образа на сферу радиусом k, где k – волновое число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haug A., Graves R.D., Überall H.* Normal-mode theory of underwater sound propagation from directional multipole sources // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56. № 2. P. 387–391.
2. *Середов А.М.* Поле распределенного гармонического источника в горизонтально стратифицированном волноводе // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 5. С. 642–646.
3. *Кравцов Ю.А., Кузькин В.М.* Об излучении антенны в многомодовом волноводе с плавно меняющимися параметрами // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 207–210.
4. *Шарфарец Б.П.* Поле протяженного направленного излучателя в регулярном океаническом волноводе // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 132–137.
5. *Валяев А.Б., Кривошлыков С.Г.* Модовый состав излучения в рефракционных волноводах с параболическим профилем показателя преломления, возбуждаемых локализованными источниками // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 431–436.
6. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
7. *Алексеев Г.В.* Математические основы акустики океана. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 1988. 228 с.
8. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.

9. *Osborn M.R.* On the propagation of sound in a layered fluid medium // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1960. V. 13. №4. P. 472–486.
10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
11. *Шарфарец Б.П.* Поле направленного излучателя в слоисто-неоднородном волноводе // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 1. С. 119–125.
12. *Hall M.* Normal-mode theory: The role of the branch-line integral in Pederson-Gordon type models // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V. 72. №6. P. 1978–1987.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВО Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11.10.90

B.P. Sharfarets

FIELD OF A DISTRIBUTED SOURCE IN A REGULAR OCEANIC WAVEGUIDE

The solution of the inhomogeneous Helmholts equation describing a sound field of distributed harmonic source in a half-space is obtained. The half-space simulates a layered oceanic waveguide and the solution is found as an expansion in a complete system of eigenfunctions of a corresponding spectral problem, which is reduced to the singular Sturm-Liuvill problem and has both descrete and continuous spectra. The solution obtained is shown to be connected with the radiation pattern of the source and the volume density, which is equal to the right side of the original equation.