АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 4

УДК 534.29
© 1991 г.

В.Н. Алексеев

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ СО СТОРОНЫ ПУЗЫРЬКА В ЗВУКОВЫХ ПОЛЯХ

В работе рассмотрено взаимодействие сферических твердых частиц с пузырьком, которые колеблются в жидкости под действием звука. Получено новое выражение для добавочной силы, которая в ряде случаев становится главной и определяющей компонентой искомой силы.

Силам взаимодействия между колеблющимися в жидкости телами посвящено множество работ. В частности, взаимодействие произвольно пульсирующего пузырька с осциллирующей независимо от него твердой сферой рассмотрено еще Бьеркнессом в монографии [1]. В последние годы способность взаимодействия пузырьков с твердыми частицами в звуковых полях стала вновь привлекать к себе повышенное внимание. Это связано прежде всего с интенсификацией ряда технологических процессов с использованием ультразвука (флотация и др.), широким применением ультразвука в медицине и т. п. В отличие от классической постановки задачи, когда объекты колеблются независимо друг от друга и сами по себе, вынужденные колебания тел под действием звука накладывают определенный отпечаток на законы их взаимодействия. Кроме того, учет специфики некоторых задач приводит к радикальному изменению законов классического взаимодействия тел. Поскольку в ряде известных публикаций о взаимодействии твердых частиц с пузырьками имеются серьезные неточности (см., например, [2]), все это побудило нас вновь обратиться к обсуждаемому вопросу и рассмотреть его детально и с общих позиций.

Ниже мы найдем среднюю силу, действующую на осциллирующую твердую частицу со стороны пузырька, пульсирующего под действием звука в окрестности рассматриваемой частицы. При нахождении этой силы будем исходить из общего выражения для радиационной силы, найденного в работе [3] и полученного при довольно общих предположениях. Считая, что жидкость идеальна, а радиус сферического твердого тела $R_ч$ много меньше длины падающей на него звуковой волны λ, но много больше глубины проникновения вязкой волны $(2\nu/\omega)^{1/2}$, средняя сила, действующая на тело, согласно [3], оказывается равной

$$F_\alpha = \frac{4}{3}\pi R_ч^3 \rho \left[\frac{\bar{k}^2}{6}\left(1+2\frac{\bar{\rho}}{\rho}-3\frac{\bar{\rho}^2\bar{c}^2}{\rho^2 c^2}\right)\mathrm{Re}\,(BB_\alpha^*)+\frac{1}{5}\left(2+3\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right)\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}-1\right)\mathrm{Re}\,(3B_\gamma B_{\alpha\gamma}^* - B_\alpha B_{\mu\mu}^*)\right]. \quad (1)$$

Здесь ρ и $\bar{\rho}$ – плотности жидкости и частицы, c и $\bar{c}$ – скорости звука в соответствующих средах, а скаляр B, вектор B_α и тензор $B_{\alpha\gamma}$ являются коэффициентами разложения внутреннего потенциала $\bar{\varphi}$, определенного при $r \leqslant R_ч$ по сферическим гармоникам. При выполнении условия $R_ч \ll \lambda$ в общем разложении скалярного потенциала $\bar{\varphi}$ по гармоникам можно ограничиться первыми тремя членами (а для пузырька – первыми двумя) и не конкретизировать вид и характер падающего на тело свободно распространяющегося звукового поля φ_i. Как показано в работе [3], коэффициенты B, B_α и $B_{\alpha\gamma}$ выражаются в этом случае через потенциал φ_i и его производные, взя-

тые в точке нахождения центра частицы $\mathbf{r}_0$, и равны:

$$B = \frac{3 + \alpha^3}{3\bar{\rho}/\rho + \bar{\alpha}^2(1+\alpha)} \varphi_i(\mathbf{r}_0),$$

$$B_\alpha = \frac{3\rho}{\rho + 2\bar{\rho}} \left[1 + \frac{\alpha^3(\rho - \bar{\rho})}{3(\rho + 2\bar{\rho})}\right] \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha}\right)_{\mathbf{r}_0}, \qquad (2)$$

$$B_{\alpha\gamma} = \frac{(5/6)\rho}{2\rho + 3\bar{\rho}} \left[1 + \frac{2\alpha^5(\bar{\rho} - \rho)}{45(2\rho + 3\bar{\rho})}\right] \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma}\right)_{\mathbf{r}_0}.$$

Здесь $\alpha = ikR_{\text{ч}}$, $\bar{\alpha} = i\bar{k}R_{\text{ч}}$ – малые величины, а $k = \omega/c$, $\bar{k} = \omega/\bar{c}$ – соответствующие волновые числа. Коэффициенты B и B_α имеют простой физический смысл. Так, если производная $\partial\varphi/\partial x_\alpha$ равна по определению скорости частичек жидкости, то векторная величина B_α соответствует скорости w_α – перемещению тела в жидкости как целого. Что касается скаляра B, то он связан с радиальными пульсациями тела $\dot{R}$ простым соотношением $\dot{R} = -\bar{k}^2 RB/3$ и для твердых частиц, сжимаемость которых мала, коэффициент B относительно невелик. Заметим, что поскольку формулы (1), (2) справедливы и для пузырьков, то в последнем случае знаменатель в первой из формул (2) оказывается пропорциональным резонансному множителю $\omega_0^2/\omega^2 - 1 - i\delta$ с акустическими потерями $\delta = kR_{\text{п}}$ и на резонансе, когда $\omega_0^2 = 3\bar{c}^2\bar{\rho}/(\rho R_{\text{п}}^2)$, величина B для пузырьков становится довольно большой. Малые мнимые поправки в формулах (2), пропорциональные α^3 и α^5, учитывают сдвиг фаз найденных коэффициентов относительно падающего поля φ_i и его производных и оказываются очень существенными в ряде ситуаций при вычислении конкретного вида радиационной силы F.

Если вблизи рассматриваемой частицы поместить пузырек с радиусом $R_{\text{п}}$, то поле φ_i, падающее на твердую сферу, будет включать в себя помимо первоначально свободно распространяющегося поля $\varphi_i^{(0)}$ также и рассеянную волну $\varphi_s(\mathbf{r})$, исходящую от пузырька. Раскладывая потенциал рассеянного поля $\varphi_s(\mathbf{r})$ в ряд по малому параметру R/L, где L – расстояние между пузырьком и частицей, и ограничиваясь в ряде возмущений только одним первым членом, можно найти, что [4]

$$\varphi_s(\mathbf{r}) \simeq \varphi_i^{(1)} = -\frac{R_{\text{п}}^2 \dot{R}_{\text{п}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{L}|} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{L}|},$$

где

$$\dot{R}_{\text{п}} = \frac{\varphi_i^{(0)}(\mathbf{L})/R_{\text{п}}}{\omega_0^2/\omega^2 - 1 - ikR_{\text{п}}}. \qquad (3)$$

Таким образом, оказывается, что в приближении однократного рассеяния потенциал падающего на твердую частицу поля $\varphi_i(\mathbf{r}_0)$ состоит из суммы двух членов: $\varphi_i \simeq \varphi_i^{(0)} + \varphi_i^{(1)}$, а каждый из коэффициентов B, B_α и $B_{\alpha\gamma}$ можно разбить на две части типа $B = B^{(0)} + B^{(1)}$, ..., где каждая часть определяется соответствующим потенциалом, $\varphi_i^{(0)}$ или $\varphi_i^{(1)}$.

Подставляя найденные таким образом значения коэффициентов B, B_α и $B_{\alpha\gamma}$ в исходную формулу (1), обнаружим, что полную силу F, действующую на твердую частицу, также можно представить в виде суммы двух слагаемых. При этом первое слагаемое будет определяться квадратичной комбинацией, составленной из нулевых потенциалов $\varphi_i^{(0)}$ и его производных, а соответствующая ему компонента силы будет представлять собой чистое радиационное давление. Это давление будет точно таким же, как если бы пузырек отсутствовал. Второе слагаемое в общем выражении для силы F состоит уже из суммы перекрестных членов, в соответствующие квадратичные комбинации которых входят помимо первоначально падающего поля $\varphi_i^{(0)}$ одна или две рассеянные волны $\varphi_i^{(1)}$. Именно эта составляющая радиационной силы F и представляет собой искомую силу взаимодействия F.

Поместим теперь центр твердой частицы в точку с координатой $\mathbf{r} = 0$, а пузырек – в точку $\mathbf{r} = \mathbf{L}_{\text{ч}}$ и будем считать, что имеют место неравенства $R_{\text{п}}, R_{\text{ч}} \ll L \ll \lambda$, а жидкость и частица – несжимаемы. В этом случае формула (1) значительно упрощается

и при условии, что $\varphi_i^{(1)} \ll \varphi_i^{(0)}$, силу **F** можно записать приближенно в виде

$$F_\alpha \simeq (4/5)\,\pi R_{\text{ч}}^3\,(\bar{\rho}-\rho)\,(2+3\bar{\rho}/\rho)\,\mathrm{Re}\,(B_\gamma^{(0)}B_{\alpha\gamma}^{(1)*}). \qquad (4)$$

Согласно формулам (2), в несжимаемой жидкости имеют место равенства: $B_\gamma^{(0)} = w_\gamma$, где **w** – абсолютная скорость осцилляций твердой частицы, а $B_{\alpha\gamma}^{(1)} = (5/6)(2 + 3\bar{\rho}/\rho)^{-1}(\partial^2\varphi_i^{(1)}/\partial x_\alpha \partial x_\gamma)_{\text{r}=0}$. При нахождении второй производной от потенциала $\varphi_i^{(1)}$ возьмем его в форме (3), что с учетом несжимаемости жидкости дает: $(\partial^2\varphi_i^{(1)}/\partial x_\alpha \partial x_\gamma)_{\text{r}=0} = -R_{\text{п}}^2\dot{R}_{\text{п}}(3p_\alpha p_\gamma - \delta_{\alpha\gamma})L^{-3}$, где **p** – единичный вектор, направленный из центра частицы в сторону пузырька. Подставив найденные значения коэффициентов $B_\gamma^{(0)}$ и $B_{\alpha\gamma}^{(1)}$ в формулу (4), найдем выражение для силы **F**, действующей на твердую осциллирующую частицу, со стороны пульсирующего пузырька в звуковом поле:

$$\mathbf{F} = -(2/3)\,\pi R_{\text{ч}}^3 R_{\text{п}}(\bar{\rho}-\rho)\,[3\,(\mathbf{p}\mathbf{e}_k)\,\mathbf{p} - \mathbf{e}_k]\,\mathrm{Re}\,(w\dot{R}_{\text{п}}^*)L^{-3}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{e}_k = \mathbf{w}/w$ – единичный вектор, направленный вдоль осцилляций частицы. Поскольку векторы **w** и **k** параллельны, то $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/k$.

Хотя при выводе последней формулы (5) жидкость считалась несжимаемой, при выводе общей формулы (1) это предположение не использовалось. Известно, что под действием звука частички среды совершают колебательные движения со скоростью $v_\alpha = \partial\varphi_i^{(0)}/\partial x_\alpha \neq 0$. В результате этого движения твердые частички увлекаются окружающей жидкостью и также совершают колебательные движения со скоростью, которая согласно первой из формул (2) равна: $\mathbf{w} = 3\mathbf{v}\rho/(\rho + 2\bar{\rho})$. Взяв относительную скорость **W** поступательного движения частицы относительно окружающей среды **v**, найдем, что эта скорость равна: $\mathbf{W} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = 2\mathbf{w}\,(1 - \bar{\rho}/\rho)/3$, после чего формулу (5) можно переписать в виде:

$$F = \pi R_{\text{ч}}^3 R_{\text{п}}\rho\,[3\,(\mathbf{p}\mathbf{e}_k)\mathbf{p} - \mathbf{e}_k]\,\mathrm{Re}\,(W\dot{R}_{\text{п}}^*)L^{-3}. \qquad (6)$$

Внешне полученная формула совпадает с известным выражением для силы взаимодействия осциллирующей частицы с пульсирующей сферой, когда оба тела совершают собственные, но независимые колебания в покоящейся на бесконечности жидкости, а звук отсутствует. В отличие от режима вынужденных колебаний под действием звука знак силы (6) в этом случае на зависит от разности плотностей ρ и $\bar{\rho}$. В звуковом же поле осцилляции частицы w и радиальные колебания пузырька $\dot{R}_{\text{п}}$ синхронизированы, и в зависимости от того, тяжелее частица окружающей среды или легче ее, сдвиг фаз между колебаниями w и $\dot{R}_{\text{п}}$ будет разным, так же как будет разным и знак силы (5) или (6).

Одной из особенностей силы взаимодействия (5) является закон ее убывания с увеличением расстояния L между телами. В отличие от сил Бьеркнесса и Кёнига, убывающих как L^{-2} и L^{-4} соответственно, сила (5) изменяется с расстоянием как L^{-3}. Заметим, что в ряде известных работ закон взаимодействия между частицей и пузырьком, колеблющимся под действием звука, находится неверно (см., например, монографию [2]). В действительности, как это показано выше, закон взаимодействия тел в этом случае может быть приведен к той же форме, которую имеет и классическое выражение для взаимодействия частицы и пузырька, колеблющихся независимо друг от друга в покоящейся жидкости.

В отличие от центральных сил Бьеркнесса, действующих между пульсирующими пузырьками, сила (5), так же как и сила Кёнига, действующая между осциллирующими частицами, зависит от угла между линией центров и направлением скорости в падающем поле. Это приводит к тому, что помимо центральной компоненты силы имеется еще поперечная составляющая силы взаимодействия, которая разворачивает частицу относительно пузырька по окружности. Умножив выражение (5) на единичный вектор **p**, найдем центральную компоненту силы F_p, действующую на частицу:

$$F_p = -(4/3)\,\pi R_{\text{ч}}^3 R_{\text{п}}^2(\bar{\rho}-\rho)\cos\theta\,\mathrm{Re}\,(w\dot{R}_{\text{п}}^*)L^{-3}, \qquad (7)$$

где θ – угол между векторами **L** и $\mathbf{e}_k$. Выражение (7) достигает своего наибольшего

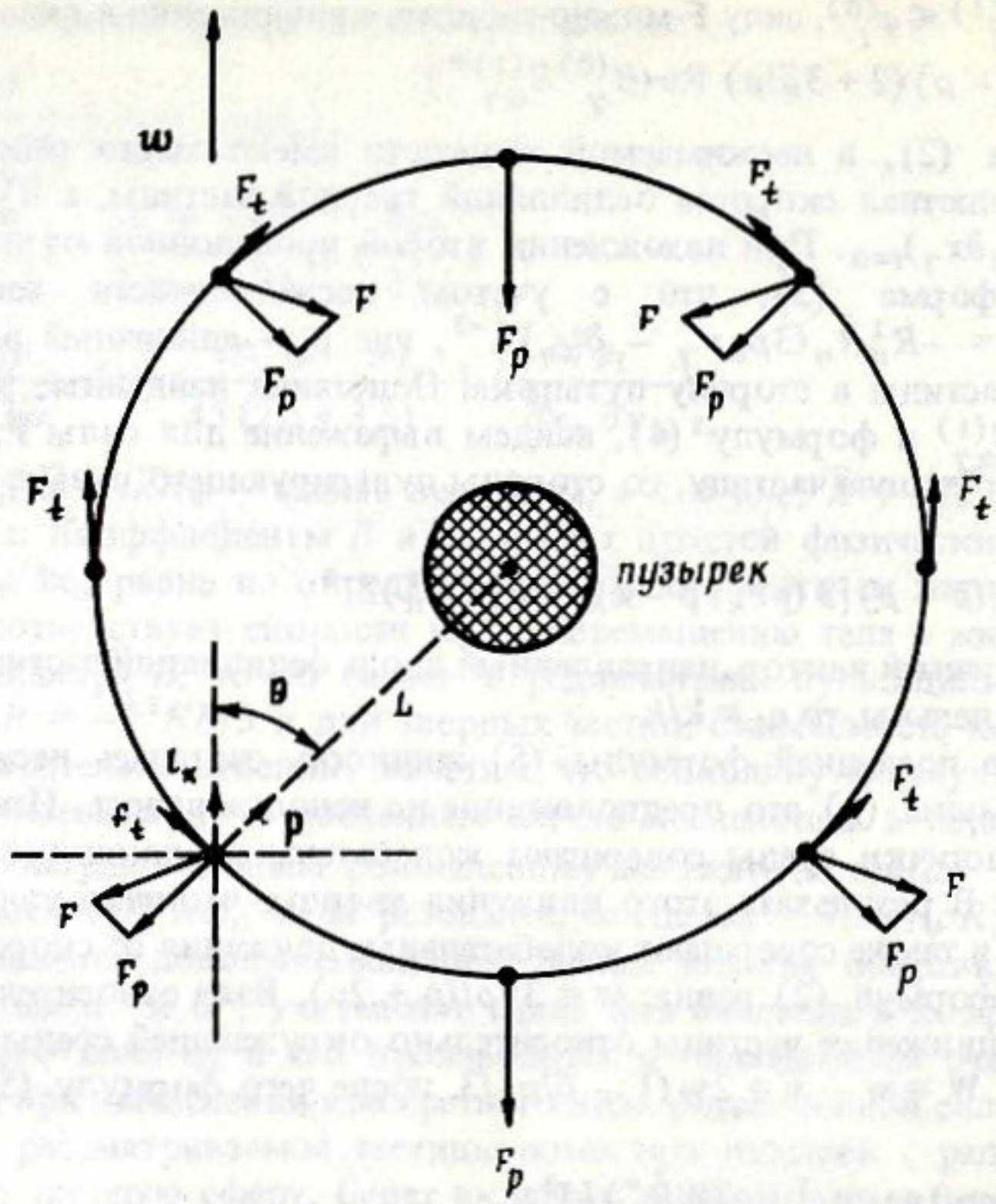

Рис. 1

значения, когда сдвиг фаз между колебаниями w и $\dot{R}_{\text{п}}$ наименьший. Это происходит, в частности, в стоячих волнах. Взяв потенциал $\varphi_2^{(0)}$ в форме $\varphi_0 \cos\mathbf{kr}\cos\omega t$ и приняв во внимание, что согласно (2) $w_\alpha \simeq 3\partial\varphi/\partial x_\alpha \rho/(\rho + 2\bar{\rho})$, а $\dot{R}_{\text{п}}$ определяется выражением (3), найдем, что центральная компонента F_p ведет себя как

$$F_p = -\frac{2D\cos\theta}{L^3},$$

где

$$D = \pi R_{\text{ч}}^3 R_{\text{п}} \frac{\bar{\rho} - \rho}{1 + 2\bar{\rho}/\rho} \frac{k|\varphi_0|^2 \sin 2\mathbf{kr}(\omega_0^2/\omega^2 - 1)}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + k^2 R_{\text{п}}^2}, \tag{8}$$

а тангенциальная составляющая силы равна: $F_t = D\sin\theta/L^3$.

На рис. 1 показана схема взаимодействия пузырька с несколькими твердыми частицами, расположенными под разными углами θ по отношению к центральному пузырьку. Из рисунка видно, что для тяжелых частиц с плотностью $\bar{\rho}$, большей плотности среды ρ, и для дорезонансных пузырьков ($\omega_0 > \omega$) в области, где $\sin 2\mathbf{kr} > 0$, а $\theta < \pi/2$, имеет место отталкивание частиц от пузырька. В противоположном случае и при $\theta > \pi/2$ имеет место притяжение.

В бегущих волнах сдвиг фаз между колебаниями w и $\dot{R}_{\text{п}}$ близок к $\pi/2$ и выражение (7) для силы взаимодействия очень мало, практически равно нулю. В этом случае необходимо учитывать малую величину в мнимой части при колебаниях пузырька. Считая, что $\varphi_i^{(0)} = \varphi_0 \exp(i\mathbf{kr})$, нетрудно показать, что соответствующая сила взаимодействия оказывается по абсолютной величине меньше выражения (8) в $kR_{\text{п}}(\omega_0^2/\omega^2 - 1)$ раз.

Однако в бегущих волнах имеется дополнительная составляющая силы взаимодействия, абсолютно несвязанная с "классическим" выражением (6), но которая относительно велика и ведет себя принципиально иным образом. Напомним, что общее

выражение для силы взаимодействия определяется суммой членов вида (1), в которых квадратичные комбинации коэффициентов B, B_α и $B_{\alpha\gamma}$ содержат перекрестные члены с рассеянными волнами $\varphi_i^{(1)}$, т. е. члены типа $B^{(0)}B_\alpha^{(1)*}$ ... В отличие от рассмотренного выше случая, когда сжимаемость жидкости и частиц не учитывалась и из всей суммы был выделен только один член, пропорциональный $\mathrm{Re}(B_\gamma^{(0)}B_{\alpha\gamma}^{(1)*})$, рассмотрим теперь более общий случай сжимаемых сред. В этом случае надо учитывать еще несколько слагаемых, в которых коэффициенты B и $B_{\alpha\gamma}$ берутся уже в нулевом приближении, а векторный коэффициент B_α берется в приближении однократного рассеяния, т. е. в форме $B_\alpha^{(1)}$. Используя формулы (2) и (3), нетрудно видеть, что в этом случае искомые коэффициенты равны:

$$B_{\alpha\gamma}^{(0)} = -\frac{5k_\alpha k_\gamma \varphi_i^{(0)}}{6(2+3\bar{\rho}/\rho)}, \quad B_{\mu\mu}^{(0)} = -\frac{5k^2\varphi_i^{(0)}}{6(2+3\bar{\rho}/\rho)}, \quad B_\gamma^{(1)} = -\frac{3R_\text{п}^2\dot{R}_\text{п}}{(1+2\bar{\rho}/\rho)}\,\frac{p_\alpha}{L^2}.$$

Подстановка этих коэффициентов в соотношение (1) дает для дополнительной силы взаимодействия, действующей на твердую частицу со стороны пузырька, следующее выражение:

$$\mathbf{F} = 2\pi R_\text{ч}^3 R_\text{п}^2 \rho \frac{\mathrm{Re}(\varphi_i^{(0)}\dot{R}_\text{п}^*)}{L^2}\left[\frac{\bar{\rho}-\rho}{\rho+2\bar{\rho}}(\mathbf{kp})\mathbf{k} + \frac{k^2}{3}\left(1-\frac{\rho c^2}{\bar{\rho}\bar{c}^2}\right)\mathbf{p}\right]. \tag{9}$$

Сравнивая полученное выражение (9) с "классическим" (6), видно, что новая сила ведет себя с расстоянием как $1/L^2$, а не как L^{-3}. По абсолютной величине дополнительная сила (9) в kL раз меньше максимального значения (5), но только для стоячих волн. Что касается бегущих волн, то теперь она в L/R раз больше соответствующего выражения (5). Используя формулу (3) для $\dot{R}_\text{п}$, нетрудно найти конкретное выражение для дополнительной силы (9) при падении на пузырек и частицу бегущей волны вида $\varphi_i^{(0)} = \varphi_0 \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$:

$$\mathbf{F} = -\frac{2\pi R_\text{ч}^3 R_\text{п}\rho k^2 |\varphi_0|^2(\omega_0^2/\omega^2-1)}{3L^2[(\omega_0^2/\omega^2-1)^2+k^2R_\text{п}^2]}\left[3\frac{\bar{\rho}-\rho}{\rho+2\bar{\rho}}(\mathbf{pe}_k)\mathbf{e}_k + \left(1-\frac{\rho c^2}{\bar{\rho}\bar{c}^2}\right)\mathbf{p}\right]. \tag{10}$$

Эта сила также имеет угловую зависимость, однако угловая зависимость ее центральной и тангенциальной компонент совершенно иная. Умножив выражение (10) на единичный вектор $\mathbf{p}$, получим для центральной составляющей следующую формулу:

$$F_p = -\frac{2\pi R_\text{ч}^3 R_\text{п}\rho k^2 |\varphi_0|^2(\omega_0^2/\omega^2-1)}{3L^2[(\omega_0^2/\omega^2-1)^2+k^2R_\text{п}^2]}\left[3\frac{\bar{\rho}-\rho}{\rho+2\bar{\rho}}\cos^2\theta + \left(1-\frac{\rho c^2}{\bar{\rho}\bar{c}^2}\right)\right]. \tag{11}$$

Для тяжелых частиц с $\bar{\rho} > \rho$ и для дорезонансного пузырька ($\omega_0 > \omega$) сила (11) имеет характер отталкивания. При существовании несколько необычной ситуации, когда $\bar{\rho} > \rho$, но $\bar{\rho}\bar{c}^2 < \rho c^2$, около пузырька образуется конус взаимодействия с критическим углом, равным

$$\cos^2\theta_\text{кр} = \frac{(\rho c^2/\bar{\rho}\bar{c}^2 - 1)(\rho+2\bar{\rho})}{3(\bar{\rho}-\rho)}.$$

На поверхности этого конуса сила (11) обращается в нуль, а при переходе через его границу меняет знак. При этом внутри конуса взаимодействия, т. е. при $\theta < \theta_\text{кр}$, центральная составляющая силы имеет характер притяжения. Для твердых частиц, расположенных в окрестности крупного пузырька, радиус которого превышает резонансный размер, знак силы меняется на противоположный.

На рис. 2 приведена схема взаимодействий тяжелых частиц ($\bar{\rho} > \rho$), расположенных в окрестности крупного пузырька ($R > R_0$) при условии, что конус взаимодействия отсутствует, а по среде распространяется бегущая волна вида $\varphi_i^{(0)} = \varphi_0 \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$. Из рисунка видно, что частицы в этом случае притягиваются к пузырьку и собираются в основном в его экваториальной области.

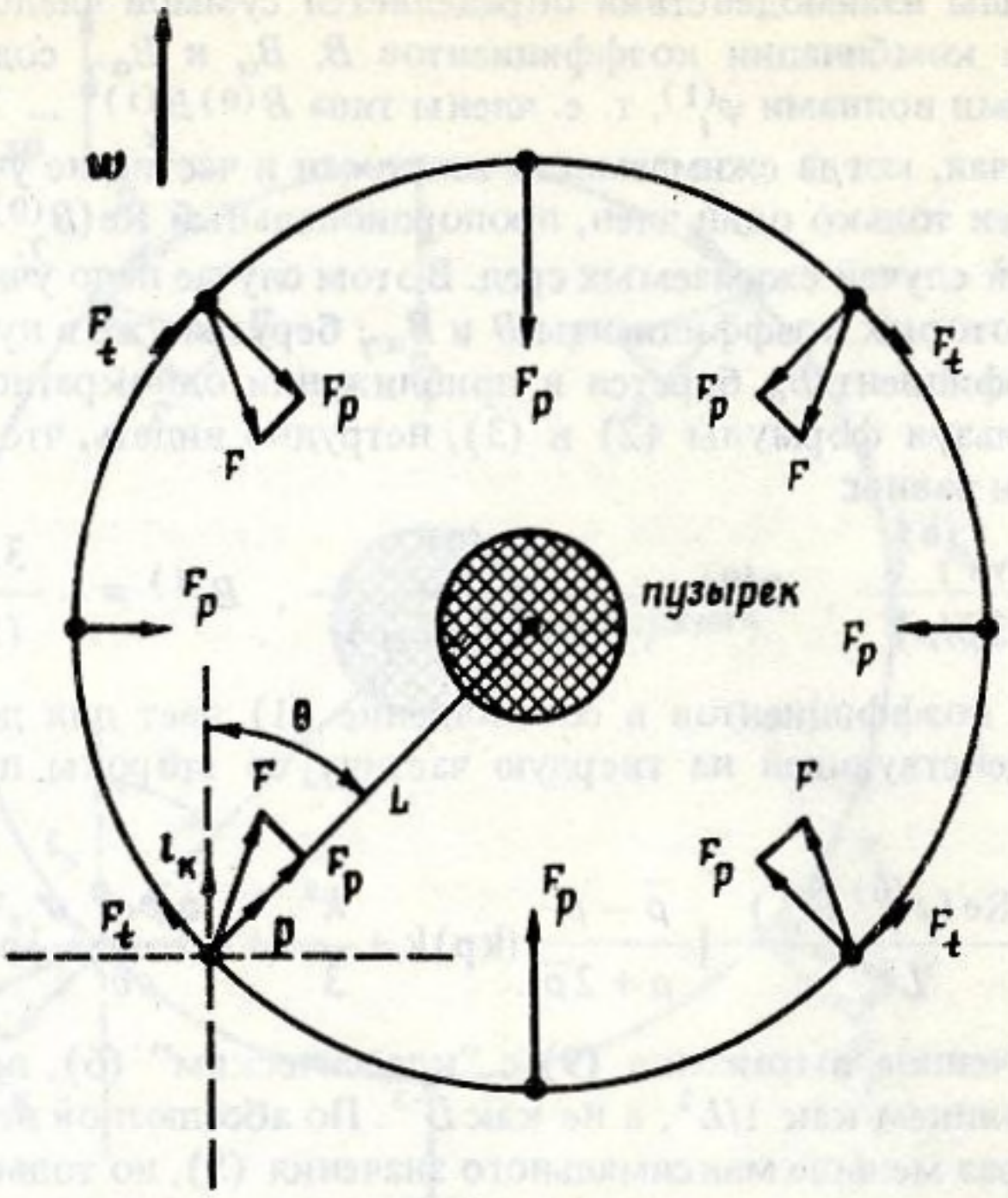

Рис. 2

В случае стоячих волн, т. е. когда $\varphi_i^{(0)} = \varphi_0 \cos \mathbf{kr} \cos \omega t$, множитель $\mathrm{Re}(\varphi^{(0)} \dot{R}_п^*)$ равен:

$$\mathrm{Re}(\varphi_i^{(0)} \dot{R}_п^*) = -\frac{|\varphi_0|^2 \cos^2 \mathbf{kr} (\omega_0^2/\omega^2 - 1)}{R_п [(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + k^2 R_п^2]}$$

и соответствующая сила (9) оказывается в L/λ раз меньше максимального значения (8). Однако дополнительная сила (9) является в некотором смысле уникальной. Обладая совершенно иной угловой зависимостью, чем (5), эта сила становится определяющей и в случае стоячих волн в ряде конкретных ситуаций, а именно в тонких цилиндрических сосудах, оси которых оказываются перпендикулярными направлению распространяющегося звукового поля. Такая ситуация осуществляется, в частности, при облучении ультразвуком живого организма. Кровеносные сосуды расположены в этом случае преимущественно в плоскости, перпендикулярной направлению падающего поля, и при возникновении в них газовых пузырьков в звуковом поле происходит налипание на них твердых составляющих плазмы крови (тромбоцитов и др.). Поскольку область, из которой происходит преимущественное собирание частиц (при их падении на пузырек), расположена вдоль оси цилиндра ($\theta \sim \pi/2$), то сила взаимодействия (9) оказывается действительно определяющей как в случае облучения бегущей звуковой волной, так и при образовании в теле стоячей волны.

В заключение обратим внимание на то, что при $\omega = \omega_0$, т. е. на резонансе, формулы (8), (10) дают чистый нуль. В этом случае необходимо учесть следующие члены разложения силы взаимодействия в общем выражении (1) для радиационного давления звука. Представив, как и ранее, полное поле φ_i, падающее на твердую частицу, в виде суммы $\varphi_i^{(0)} + \varphi_i^{(1)}$ и выписав теперь новый член, определяемый исключительно рассеянным полем $\varphi_i^{(1)}$, находим

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi R_ч^3 R_п^2 (\bar{\rho} - \rho) |\varphi_0|^2 \mathbf{p}}{L^5 (1 + 2\bar{\rho}/\rho) [(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + k^2 R_п^2]}. \qquad (12)$$

Эта составляющая силы взаимодействия убывает с расстоянием как L^{-5}, обычно она невелика, но становится определяющей на резонансе, когда расписанные выше состав-

ляющие силы F обращаются в нуль. Исходя из общих соображений ясно, что сила (12) в общем случае $\omega \neq \omega_0$ играет заметную роль только на расстояниях L, меньших амплитуды рассеяния на пузырьке. Именно в этой области $\varphi_i^{(1)} > \varphi_i^{(0)}$ и полное поле φ_i, падающее на твердую частицу, можно аппроксимировать рассеянным полем (3). Выражение (12) встречается в ряде работ [2], но нередко претендует на роль единственной составляющей силы взаимодействия пузырька с частицей.

И наконец, отметим, что в звуковом поле все известные силы взаимодействия ведут себя как $1/L$ на расстояниях L порядка или больше длины волны. Учитывая волновой характер рассеянных волн, при вычислении производных падающего поля обычно проявляются дополнительные члены типа $(kL)^n \exp(ikL)$ $(n = 1, 2)$. Так, учитывая сжимаемость жидкости и взяв рассеянное поле вблизи пузырька в виде (3), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_i^{(0)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{R_\text{п}^2 \dot{R}_\text{п}}{L^3} e^{ikL} [p_\alpha p_\gamma (3 - 3ikL - k^2L^2) - \delta_{\alpha\gamma}(1 - ikL)]. \qquad (13)$$

При $kL \ll 1$ дополнительные члены представляют собой малые поправки к известным выражениям для сил Бьеркнесса, Кёнига и для сил, определяемых формулами (5), (9). При условии же $kL \gtrsim 1$ эти поправки оказываются существенными и радикально меняют поведение названных сил с расстоянием. Наличие экспоненциального множителя $\exp(ikL)$ обычно приводит к тому, что знак силы F меняется на противоположный при $L \sim \lambda/2$ и далее – через каждые полдлины волны звука. Наличие же множителя kL или $(kL)^2$ приводит к более медленному убыванию сил взаимодействий с расстоянием L.

Как в случае бегущих, так и стоячих волн потенциал $\varphi_i^{(0)}$ или скорость $w_\alpha \sim \partial \varphi_i^{(0)} / \partial x_\alpha$ в формулах (5), (9) берутся в точке нахождения твердой частицы $\mathbf{r} = 0$. Однако радиальная скорость $\dot{R}_\text{п}$, определяемая формулой (3), выражается через потенциал $\varphi_i^{(0)}$, взятый в точке $\mathbf{r} = \mathbf{L}$, поскольку рассеянная волна исходит из центра, где находится пузырек. Последовательный учет конечного значения скорости распространения звука приводит к тому, что выражение (5) для силы взаимодействия частицы с пузырьком в поле бегущей волны уже не равно нулю даже при отсутствии затухания колебаний у газовой полости. В этом случае сдвиг фазы между колебаниями w и $\dot{R}_\text{п}$ не равен нулю, а определяется множителем kL. Учет этого множителя с помощью формулы (13) в случае бегущих волн приводит к появлению конечного значения у силы взаимодействия (5), которое при условии $kL \ll 1$ убывает с расстоянием как $1/L^2$ и по абсолютной величине становится сравнимым с силой (10). Складывая выражения (10) и (5), в последнем из которых полагаем $\varphi_i^{(0)}(\mathbf{L})$ равным $(1 + i\mathbf{k}\mathbf{L})\varphi_i^{(0)}(0)$, находим, что вдали от резонанса сила взаимодействия пузырька с частицей в бегущей волне равна:

$$\mathbf{F} = -\frac{2\pi R_\text{ч}^3 R_\text{п} \rho k^2 |\varphi_0|^2 (\omega_0^2/\omega^2 - 1)}{3L^2 [(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + k^2 R_\text{п}^2]} \left[\frac{9(\lambda - 1)}{1 + 2\lambda} (\mathbf{e}\mathbf{p})^2 + 1 - \frac{\rho c^2}{\bar{\rho}\bar{c}^2}\right] \mathbf{p}. \qquad (14)$$

Эта сила имеет центральный характер, и в зависимости от значения параметров $\lambda = \frac{\bar{\rho}}{\rho}$, $c/\bar{c}$ может существовать критический угол конуса взаимодействия, внутри и вне которого сила (14) имеет разные знаки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bjerkness C.A.* Hydrodynamische Fernkräfte. Leipzig: 1915.
2. Применение ультразвука в медицине / Под ред. Хилл К. М.: Мир, 1989.
3. *Алексеев В.Н.* К вопросу о радиационной силе давления звука на сферу // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 129–136.
4. *Акуличев В.А., Алексеев В.Н., Буланов В.А.* Периодические фазовые превращения в жидкостях. М.: Наука, 1986.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева Академии наук СССР

Поступила в редакцию
03.10.90

V.N. Alekseev

FORCES OF ACTION OF A BUBBLE ON SOLID PARTICLES IN SOUND FIELDS

A theoretical investigation of interaction of solid spherical particles with gas bubbles in ideal liquid is carried out. Particles oscillate and bubbles pulsate in liquid under the action of a sound field. The general expression for interaction force from which follows in particular the classic result for particles oscillating without sound action is obtained. In this and similar cases the interaction force decreases versus the distance L between bubble and particle as L^{-3}. It is shown that real experimental situations exist when the value of classical analog of interaction force appears to be very small. In these cases the new interaction law is found and the detailed analysis of the expression for the new additional force is carried out. This force has a tensor nature and values of its centrifugal and transversal components decrease versus distance as L^{-2}. The law of interaction changes again when the sound frequency approachs to the resonance frequency of a bubble. Now the decrease of interaction is going on as L^{-5} and this law takes place in immediate neighbourhood of a bubble.