АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

Б.П. Белинский

ОБ УЧЕТЕ ПОТЕРЬ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В работе [1] исследовано прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину. Рассмотрение базируется на универсальных представлениях для коэффициентов отражения и прохождения, полученных в [2]. Установлено, что учет потерь в среде с помощью задания в комплексной форме технических модулей может – при произвольных коэффициентах потерь – приводить к физически недопустимым эффектам, например возрастанию амплитуды колебаний при распространении волн. Высказано предположение о существовании соотношений, ограничивающих пределы изменения коэффициентов потерь технических модулей.

Ниже неравенства такого рода установлены на основе энергетических соображений. Найдена форма закона сохранения энергии для прохождения звука через трансверсально-изотропную пластину. Для соответствующих задач рассеяния установлен энергетический принцип единственности [3].

Упругая среда характеризуется положительно определенной квадратичной формой относительно деформаций ϵ_{jk}: $W = C_{jkmn}\epsilon_{jk}\epsilon_{mn}/2 \geqslant 0$. Форма W задает плотность потенциальной энергии деформации среды. Для трансверсально-изотропной пластины тензор C_{jkmn} упругих постоянных представляется матрицей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & & 0 & \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & & & \\ & & & c_{11}-c_{12} & & \\ & 0 & & & 2c_{44} & \\ & & & & & 2c_{44} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Индексы 1 и 3 относятся к плотности пластины и к нормальной плоскости соответственно. Тензор C_{jkmn} связывает тензор напряжений σ_{jk} и деформаций в законе Гука, так что $\sigma_{jk} = C_{jkmn}\epsilon_{mn}$, $W(\sigma, \epsilon) = \sigma_{jk}\epsilon_{jk}/2$. Среди компонент тензора всего пять независимых. Коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ можно выразить через технические модули E_1, G_1, E_3, G_3, ν_1, ν_3 [4]:

$$\begin{gathered} c_{11} = [E_1/(1+\nu_1)m](1-\nu_3^2 E_1/E_3), \quad c_{33} = E_3(1-\nu_1)/m, \quad c_{44} = G_3, \\ c_{12} = [E_1/(1+\nu_1)m](\nu_1 + \nu_3^2 E_1/E_3), \quad c_{13} = E_1\nu_3/m, \\ \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) = G_1 = E_1/2(1+\nu_1), \quad m = 1-\nu_1-2\nu_3^2 E_1/E_3. \end{gathered} \tag{2}$$

В [1] отмечается, что эксперименты на тонких стержнях и пластинах позволяют измерить для данного материала именно технические модули, в том числе их мнимые части, характеризующие потери.

Отвлекаясь сначала от наличия потерь, рассмотрим условия положительности квадратичной формы W, задающей плотность потенциальной энергии деформации. Критерий Сильвестра дает [5]:

$$c_{44} > 0, \ c_{11} > 0, \ c_{11} \pm c_{12} > 0, \ c_{33}(c_{11}+c_{12}) - 2c_{13}^2 > 0. \tag{3}$$

Наша цель – получение неравенств, характеризующих технические модули. Соотношения (3) с учетом связей (2) можно рассматривать как нелинейную систему уравнений относительно модулей. Решая ее, найдем

$$\begin{gathered} 1+\nu_1 > 0, \ E_1 > 0, \ G_1 > 0, \ E_3 > 0, \ G_3 > 0, \\ m = 1-\nu_1-2\nu_3^2 E_1/E_3 > 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Среди неравенств (4) имеются зависимые. В изотропном случае приходим к известным соотношениям [6] $E > 0$, $½ > \nu > -1$. Неравенства (4) – суть условия положительности энергии деформации трансверсально-изотропной пластины без потерь. Они приведены здесь для полноты изложения. Для общей анизотропной среды данный вопрос изучался, например, в [7], где приведена также обширная библиография.

Обратимся к учету потерь и найдем для коэффициентов потерь неравенства типа (4). Будем исходить из следующей концепции [6, 8]. Учет потерь в среде может быть осуществлен путем замены тензора напряжений σ_{jk} суммой $\sigma_{jk} + \sigma'_{jk}$, где тензор диссипации σ'_{jk} пересчитывается через производную по времени от тензора деформаций (так называемое вязкоупругое тело Фохта): $\sigma'_{jk} = \eta_{jkmn}\dot{\epsilon}_{mn}$. При рассмотрении гармонических процессов, зависимость которых от времени характеризуется множителем $\exp(-i\omega t)$, находим $\sigma_{jk} + \sigma'_{jk} = (C_{jkmn} - i\omega\eta_{jkmn})\,\epsilon_{mn}$. При этом уравнения теории упругости сохраняют свой вид, но компоненты тензора упругих модулей становятся комплексными. Заметим, что к комплексным модулям можно прийти иначе, привлекая вместо закона Гука закон наследственной упругости [8].

Для дальнейшего удобно рассмотреть вопрос о единственности решения задачи рассеяния звука на трансверсально-изотропной пластине с произвольной компактной неоднородностью. Будем считать, что неоднородность не поглощает энергию, как и акустическая среда, потери же в пластине будем учитывать. Краевая задача для модели описана в [1]. Следует лишь добавить условие излучения для давления: $p(r,\theta) = \exp(ikr)/r\psi(\theta) + o(r^{-1})$, $r \to \infty$ и условие убывания упругих полей в пластине на бесконечности. Здесь θ – точка на единичной сфере S, r – расстояние до ее центра, $\psi(\theta)$ – диаграмма рассеяния. Схема вывода теоремы единственности сходна с использованной в [3] для двухкомпонентных моделей. Именно, для акустической среды привлечем вторую формулу Грина, взяв в качестве основного состояния поле давлений p, а в качестве дуального – p^* (звездочка везде означает комплексное сопряжение). Аналогично для второй компоненты модели – упругой среды – привлечем формулу Бэтти [9], взяв в качестве основного состояния поля напряжений σ и деформаций ϵ, а в качестве дуального – σ^* и ϵ^*. Складывая возникающие тождества, учитывая граничные условия на поверхностях пластины и условия на бесконечности и отделяя мнимую часть, находим

$$\frac{k}{2\rho_0\omega}\int_S |\psi(\theta)|^2 dS(\theta) + \frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\int_\Omega 2W(\sigma^*, \epsilon)\,d\Omega = 0 \tag{5}$$

(ρ_0 – плотность жидкости, k – волновое число в ней). Здесь первое слагаемое описывает поток рассеянной акустической энергии, а второе – энергию, поглощенную в упругой пластине за счет потерь в ней. При условии

$$\mathrm{Im}\,W(\sigma^*, \epsilon) \geqslant 0 \tag{6}$$

из тождества (5) следует, что поля в средне и пластине тождественно равны нулю, т.е. задача рассеяния имеет единственное решение. По терминологии [3], установлен энергетический принцип единственности для рассматриваемой модели.

Условие (6) приводит к неравенствам на мнимые части компонент тензора упругих постоянных, аналогичным неравенствам (3):

$$\mathrm{Im}\,c_{44} < 0,\quad \mathrm{Im}\,c_{11} < 0,\quad \mathrm{Im}\,(c_{11} \pm c_{12}) < 0,$$
$$\mathrm{Im}\,c_{33}\,\mathrm{Im}\,(c_{11} + c_{12}) - 2\,(\mathrm{Im}\,c_{13})^2 > 0. \tag{7}$$

Как отмечалось, наша цель – получение неравенств, характеризующих технические модули. Аналогично (4) находим

$$\mathrm{Im}\,G_3 < 0,\ \mathrm{Im}\,G_1 < 0,\ \mathrm{Im}\,\frac{E_1}{m} < 0,$$
$$\mathrm{Im}\,\frac{E_3(1-\nu_1)}{m}\,\mathrm{Im}\,\frac{E_1}{m} - 2\,\left(\mathrm{Im}\,\frac{E_1\nu_3}{m}\right)^2 > 0. \tag{8}$$

Таким образом, установлены соотношения, ограничивающие пределы изменения технических модулей, характеризующих трансверсально-изотропную среду. Эти соотношения точны в рамках принятой модели поглощения. В частности, в них не содержится предположений относительно малости коэффициентов потерь.

В частном случае изотропной среды, неравенства (8) принимают вид

$$\mathrm{Im}\,E/(1+\nu) < 0,\quad \mathrm{Im}\,E/(1+2\nu) < 0. \tag{9}$$

Их можно переписать также в терминах волновых чисел продольных (k_l) и поперечных (k_t) волн:

$$\mathrm{Im}\,k_l^{-2} < \mathrm{Im}\,k_t^{-2} < 0. \tag{10}$$

При $\mathrm{Im}\,\nu = 0$ находим $\mathrm{Im}\,E < 0$, $1/2 > \nu > -1$.

Будем считать теперь потери настолько малыми, что в неравенствах (9) можно корректно провести линеаризацию около вещественных значений E и ν. Обозначим $E = \mathrm{Re}\,E + i\,\mathrm{Im}\,E$, $\nu = \mathrm{Re}\,\nu + i\,\mathrm{Im}\,\nu$, при этом $|\mathrm{Im}E/\mathrm{Re}E| \ll 1$, $|\mathrm{Im}\nu/\mathrm{Re}\nu| \ll 1$. Линеаризованные неравенства (9) примут вид

$$(1+\mathrm{Re}\nu)\,\frac{\mathrm{Im}\,E}{\mathrm{Re}E} < \mathrm{Im}\,\nu < -\,\frac{1-2\mathrm{Re}\nu}{2}\,\frac{\mathrm{Im}E}{\mathrm{Re}E}\,. \tag{11}$$

Важно отметить, что знак $\mathrm{Im}\,\nu$ этим неравенством не фиксируется.

Возвратимся к обсуждению анизотропного случая. С помощью неравенств (8) можно проверить, например, что не реализуются среды, в которых $\mathrm{Im}\,E_{1,3} = 0$, а $\mathrm{Im}\,\nu_{1,3} \neq 0$.

Пусть теперь в соответствии с рассмотрениями работы [1] $\mathrm{Im}\,\nu_{1,3} = 0$. Введем обозначения: $E_\alpha = \overline{E}_\alpha(1 - i\eta_{E_\alpha})$, $G_\alpha = G_\alpha(1 - i\eta_{G_\alpha})$ $(\alpha = 1,3)$. Здесь η_{E_α}, η_{G_α} – коэффициенты потерь. Неравенства (8) примут вид

$$\eta_{G_\alpha} > 0,\ \ \eta_{E_\alpha} > 0\ \ (\alpha = 1,3), \tag{12}$$
$$1 - \nu_1 - 2\nu_3^2\,\frac{\overline{E}_1}{\overline{E}_3}\,\frac{1+\eta^2_{E_1}}{1+\eta^2_{E_3}}\,\frac{\eta_{E_3}}{\eta_{E_1}} > 0.$$

В частности, не реализуются среды, в которых $\mathrm{Im}\,\nu_{1,3} = 0$, $\mathrm{Im}\,E_1 = 0$, а $\mathrm{Im}\,E_3 \neq 0$.

Численные эксперименты, описанные в работе [1], показывают, что при равенстве коэффициентов потерь $\eta_{E_1} = \eta_{E_3}$ не возникает парадоксов энергетического характера. Неравенство (12) в этом случае принимает вид

$$1 - \nu_1 - 2\nu_3^2\overline{E}_1/\overline{E}_3 > 0 \tag{13}$$

и аналогично последнему из неравенств (4).

Таким образом, высказанное в [1] предположение о существовании соотношений, ограничивающих возможность изменения коэффициентов потерь технических модулей трансверсально-изотропной среды, находит свое подтверждение в общих неравенствах (8) и их частных случаях (9)–(13).

В заключение заметим, что применение формул Грина для системы пластина–жидкость к полю плоских волн – падающей, прошедшей и отраженной – приводит к тождеству

$$1 - (|R|^2 + |T|^2) = \frac{2\rho_0\,\omega^2}{k\cos\theta_0}\,\mathrm{Im}\int_0^H W(\sigma^*, \epsilon)\,dz. \tag{14}$$

Здесь интегрирование проводится по толщине пластины: $z \in (0, H)$, θ_0 – угол падения плоской волны на пластину, R и T – коэффициенты отражения и прохождения. В силу неравенства (6), $|R|^2 + |T|^2 < 1$.

Автор благодарен Е.Л. Шендерову, В.С. Екельчику и А.С. Зильберглейту за стимулирующие дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шендеров Е.Л.* Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 2. С. 122–129.
2. *Лямшев Л.М.* Отражение звука от тонких пластин и оболочек в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 73.
3. *Коузов Д.П.* Энергетический принцип единственности граничных задач акустики // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. Матем. вопр. теор. распр. волн. 1979. Т. 89. № 10. С. 124–133.
4. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.–Л.: Гос. техн. теор. изд-во, 1950. С. 299.
5. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. С. 431.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. С. 246.
7. *Остросаблин Н.И.* О наитеснейших границах констант упругости и приведении удельной энергии деформации к каноническому виду // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. 1989. № 2. С. 90–94.
8. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. С. 752.
9. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Гос. техн. теор. изд-во, 1957. С. 476.

Научно-исследовательский институт физики
при Ленинградском государственном университете

Поступила в редакцию
23.05.89