АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 2

УДК 534.222

© 1991 г.

В. Е. Назаров

О ВОЗБУЖДЕНИИ СУБГАРМОНИКИ В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Методом теории возмущений определяется порог возбуждения субгармоники в акустическом резонаторе – плоскопараллельном слое, помещенном во внешнюю среду, при облучении его нормально-падающей плоской акустической волной.

При распространении акустической волны в реальных средах наблюдается ряд нелинейных эффектов: генерация высших гармоник и образование ударной волны, нелинейное затухание, самовоздействие и т. д. [1, 2]. Их изучение может быть использовано для определения нелинейных характеристик среды. Однако в режиме бегущих волн нелинейность среды проявляется слабо и часто маскируется паразитными нелинейностями аппаратуры. Более сильно нелинейные эффекты проявляются в акустических резонаторах, причем при определенных условиях кроме перечисленных выше эффектов появляются другие, характерные только для режима стоячих волн, а именно деление частоты (генерация субгармоник).

С точки зрения определения нелинейных акустических параметров среды процесс возбуждения субгармоники в акустической системе представляет практический интерес. Это связано с тем, что такой процесс пороговый, т. е. субгармоника возникает только при превышении критической, так называемой пороговой, амплитуды накачки, и в спектре накачки субгармоника отсутствует (в отличие от высших гармоник, обусловленных нелинейностью аппаратуры).

Ранее генерация субгармоник в акустических системах исследовалась в работах [3—8], при этом использовались как жидкостные, так и твердотельные резонаторы. Основная проблема возбуждения субгармоник в таких системах связана с условиями на границах резонатора: при отражении от мягкой границы волна напряжения меняет знак и накопления квадратичных эффектов не происходит. В дальнейшем в работе [9] был использован кольцевой твердотельный резонатор, где проблемы, связанной с поворотом фазы при отражении волны от границы, нет, так как нет самой границы. В кольце, однако, кроме продольных волн возбуждаются и изгибные, что усложняет измерения продольных деформаций.

В настоящей работе теоретически исследуется генерация субгармонических колебаний в резонаторе — плоскопараллельном слое при возбуждении его нормально-падающей плоской акустической волной. Исследуемый слой помещается во внешнюю среду, через которую происходит его возбуждение акустической волной с частотой ω. Толщина пластины L выбирается равной целому числу n длин волн λ_0 накачки в материале слоя ($L=n\lambda_0$), так что для частот ω и $\omega/2$ слой оказывается акустически согласованным с внешней средой.

В координатах Лагранжа одномерное уравнение для продольных волн в слое имеет вид [1, 2]:

$$U_{tt}-c_0^2U_{xx}=-2\gamma c_0^2U_xU_{xx}, \tag{1}$$

где U — смещение частиц в волне, c_0 — скорость продольных волн, γ — параметр нелинейности.

В уравнении (1) не учитывается диссипация энергии в объеме резонатора, полагая, что его добротность определяется потерями на излучение во внешнюю среду [10]. Пусть во внешней среде распространяется плоская продольная волна напряжения

$$\sigma_1(x,t)=\frac{A_0}{2}\{e^{j(\omega t-kx)}+\text{к. с.}\}, \tag{2}$$

где $k=\omega/c$, c — скорость звука во внешней среде. При выполнении резонансного условия $k_0L=2\pi n$ $(k_0=\omega/c_0)$ в слое устанавливается волна смещения $U_1(x,t)$:

$$U_1(x,t)=\frac{A_0}{4j\omega\rho c}\{(1+z)e^{j(\omega t-k_0x)}+(1-z)e^{j(\omega t+k_0x)}+\text{к. с.}\}, \tag{3}$$

где $z=\rho c/\rho_0c_0$; ρ, ρ_0 — плотность внешней и исследуемой сред. Определение порога возбуждения субгармоники будем проводить методом возмущений. Для этого запишем волну смещения $U_2(x,t)$ на половинной частоте $\omega/2$ в виде,

$$U_2(x,t)=\frac{1}{2}\{a(x,t)\,e^{j\frac{\omega t-k_0x}{2}}+b(x,t)\,e^{j\frac{\omega t+k_0x}{2}}+\text{к. с.}\}, \tag{4}$$

где $|U_2|\ll|U_1|$; $a(x,t)$, $b(x,t)$ — медленноменяющиеся функции координаты x и времени t, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\left.\frac{\sigma_2}{U_2}\right|_{x=0}=-\rho c,\quad \left.\frac{\sigma_2}{U_2}\right|_{x=L}=\rho c. \tag{5}$$

Здесь σ_2, U_2 — напряжение и скорость в волне на частоте $\omega/2$. Подставляя (3, 4) в уравнение (1) и выделяя составляющие на частоте $\omega/2$, получаем

$$j(\dot a+c_0a_x)e^{j\frac{k_0x}{2}}+j(\dot b-c_0b_x)e^{-j\frac{k_0x}{2}}=\delta\Big\{a^*(1+z)e^{-j\frac{k_0x}{2}}-$$
$$-3b^*(1+z)e^{-j\frac{3k_0x}{2}}+3a^*(1-z)e^{j\frac{3k_0x}{2}}-b^*(1-z)e^{j\frac{k_0x}{2}}\Big\}, \tag{6}$$

где $\delta=\gamma A_0\omega/\rho cc_0$.

Умножим это уравнение на $e^{\pm j\frac{k_0x}{2}}$ и проинтегрируем его по x от 0 до L:

$$\begin{gathered}(\dot a_0+\dot a_L)+\frac{\omega_0}{\pi}(a_L-a_0)=-j\delta(1+z)(a_0+a_L)^*,\\ (\dot b_0+\dot b_L)-\frac{\omega_0}{\pi}(b_L-b_0)=j\delta(1-z)(b_0+b_L)^*,\end{gathered} \tag{7}$$

где $a_0=a(x=0)$, $b_0=b(x=0)$, $a_L=a(x=L)$, $b_L=b(x=L)$, $\omega_0=2\pi c_0/L$.

При получении уравнения (8) использовалось предположение о малости изменения $a(x)$ и $b(x)$ на длине резонатора L, вследствие чего

$$\int_0^L\left\{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}dx=\frac{L}{2}\left\{\begin{matrix}a_0+a_L\\b_0+b_L\end{matrix}\right\},\quad \int_0^L\left\{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}e^{\pm jnk_0x}dx=0,\quad n=1,2.$$

Кроме уравнений (7) из граничных условий (5) имеем

$$(a_0-b_0)/(a_0+b_0)=-z,\quad (a_L-b_L)/(a_L+b_L)=z. \tag{8}$$

Уравнения (8), (9) представляют полную систему для определения порога возбуждения колебаний в резонаторе на половинной частоте. Складывая и вычитая уравнения (7), получаем два связанных уравнения для $P=(a_0+b_0)+(a_L+b_L)$ и $Q=(a_0+b_0)-(a_L+b_L)$:

$$\dot{P}+\frac{\omega_0 z}{\pi}P=-j\delta z(P-Q)^{\cdot},$$
$$\dot{Q}+\frac{\omega_0}{\pi z}Q=j\frac{\delta}{z}(P-z^2Q)^{\cdot}. \tag{9}$$

Далее полагая $P=pe^{j\varphi}$ и $Q=qe^{j\psi}$, из уравнения (9) получаем:

$$\dot{p}+\frac{\omega_0 z}{\pi}p=-z\delta[p\sin 2\varphi+q\sin(\varphi+\psi)],$$
$$\dot{q}+\frac{\omega_0}{\pi z}q=\frac{\delta}{z}[p\sin(\varphi+\psi)-z^2q\sin 2\psi],$$
$$\dot{\varphi}p=-\delta z[p\cos 2\varphi-q\cos(\varphi+\psi)], \tag{10}$$
$$\dot{\psi}q=\frac{\delta}{z}[p\cos(\varphi+\psi)-z^2q\cos 2\psi].$$

Линеаризуем уравнения (10) вблизи состояний равновесия φ_0, ψ_0 и исследуем их устойчивость:

$$\dot{p}+\frac{\omega_0 z}{\pi}p=-\delta z[p\sin 2\varphi_0+q\sin(\varphi_0+\psi_0)],$$
$$\dot{q}+\frac{\omega_0}{\pi z}q=\frac{\delta}{z}[p\sin(\varphi_0+\psi_0)-z^2q\sin 2\psi_0], \tag{11}$$

$$\dot{\varphi}+\varphi[-2\delta z\sin 2\varphi_0+\delta zm^{-1}\sin(\varphi_0+\psi_0)]+\psi\delta zm^{-1}\sin(\varphi_0+\psi_0)=0,$$
$$\dot{\psi}+\psi[\delta mz^{-1}\sin(\varphi_0+\psi_0)-2\delta z\sin 2\psi_0]+\varphi\delta mz^{-1}\sin(\varphi_0+\psi_0)=0, \tag{12}$$

где $m=p/q$, а φ_0, ψ_0 определяются из уравнений

$$p\cos 2\varphi_0=q\cos(\varphi_0+\psi_0),$$
$$p\cos(\varphi_0+\psi_0)=qz^2\cos 2\psi_0. \tag{13}$$

Перемножив и поделив уравнения (13), получаем

$$z^2\cos 2\varphi_0\cos 2\psi_0=\cos^2(\varphi_0+\psi_0), \tag{14}$$
$$(m/z)^2=\cos 2\psi_0/\cos 2\varphi_0. \tag{15}$$

Из уравнения (14) после несложных тригонометрических преобразований имеем

$$(z^2-1)\cos^2(\varphi_0+\psi_0)=z^2\sin^2(\varphi_0-\psi_0). \tag{16}$$

Очевидно, действительные значения φ_0, ψ_0 возможны только при $z>1$, что обобщает известное утверждение о том, что в резонаторе с мягкими границами ($z=0$) субгармоника не возбуждается.

Для исследования устойчивости состояний φ_0 и ψ_0 положим в (12) $\varphi=C_1e^{\alpha t}$, $\psi=C_2e^{\alpha t}$ и, используя (14), (15), получим уравнение для α

$$\alpha^2-2\alpha\delta z\sin(\varphi_0+\psi_0)\cos(\varphi_0-\psi_0)-4\delta^2z^2\sin^2(\varphi_0-\psi_0)=0. \tag{17}$$

Чтобы корни этого уравнения не были положительными, т. е. состояния

φ_0, ψ_0 были устойчивыми, необходимо выполнение условий:

$$\sin(\varphi_0+\psi_0)\cos(\varphi_0-\psi_0)<0,$$
$$\sin^2(\varphi_0-\psi_0)\leqslant 0. \tag{18}$$

Из (16) и неравенств (18) следует, что возможен лишь случай $\varphi_0=\psi_0=-\pi/4$. Подставляя найденные значения φ_0, ψ_0 в уравнение (11), получаем

$$\dot{p}+pz\left(\frac{\omega_0}{\pi}-\delta\right)-\delta zq=0,$$
$$\dot{q}+q\left(\frac{\omega_0}{\pi z}-\delta z\right)+\frac{\delta}{z}p=0. \tag{19}$$

Полагая в (19) $p=C_3e^{\beta t}$, $q=C_4e^{\beta t}$, находим уравнения для β

$$\beta^2-\beta\left[2\delta z-\frac{\omega_0}{\pi}(z+z^{-1})\right]+\left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^2-\frac{\delta\omega_0}{\pi}(1+z^2)+\delta^2(1+z^2)=0. \tag{20}$$

Чтобы один из корней уравнения (20) был положителен, необходимо, чтобы

$$\delta>\delta_0=\frac{\omega_0}{2\pi}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4}{1+z^2}}\right\}. \tag{21}$$

При $z^2\gg 1$ имеем: $\delta_0=\omega_0/\pi z^2$, или

$$\varepsilon_0=\frac{A_0}{\rho c}=\frac{c_0/c}{\gamma\pi n z^2}, \tag{22}$$

где ε_0 — амплитуда деформации волны во внешней среде. Из выражения (22) видно, что $\varepsilon_0\sim n^{-1}$. Это связано с тем, что при пренебрежении вязкими потерями в материале слоя его добротность Q определяется потерями на излучение во внешнюю среду и описывается выражением [10]:

$$Q=\pi n\left(\operatorname{arth}\frac{2z}{1+z^2}\right)^{-1}. \tag{23}$$

Порог ε_0 параметрической генерации $\sim Q^{-1}$, т. е. $\varepsilon_0\sim n^{-1}$ [2]. Однако при $z\to\infty$ потери в резонаторе определяются уже вязкостью среды в слое, а его добротность — выражением [11]

$$Q=\frac{\pi n}{\alpha L}, \tag{24}$$

где α — коэффициент вязких потерь, зависящий от частоты. В этом случае с увеличением частоты ω, т. е. с ростом n, добротность резонатора Q падает, а порог ε_0 параметрической генерации в соответствии с выражением [2]: $\varepsilon_0=\gamma Q^{-1}$ — растет.

При превышении порога генерации ε_0 на $\Delta\varepsilon\ll\varepsilon_0$ ($\Delta\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon_0>0$) времена τ_p и τ_φ нарастания амплитуд и установление фаз субгармонических колебаний составляют:

$$\tau_p=\frac{\pi z\varepsilon_0}{\omega_0\Delta\varepsilon}\gg\tau_\varphi=\frac{\pi z}{2\omega_0}. \tag{25}$$

При $z<1$ состояния равновесия φ_0, ψ_0 отсутствуют, а фазы $\varphi(t)$, $\psi(t)$ быстро меняются с характерным временем $\tau\sim\delta_0^{-1}=\pi z^2/\omega_0\ll\tau_p$ (быстрее,

чем может нарасти амплитуда), поэтому субгармоника возбудиться не успеет.

Оценки показывают, что в системе сталь — оргстекло — сталь ($\rho_0 = 1$ г/см^3, $c_0 = 1{,}5 \cdot 10^5$ см/с, $\gamma = 5$, $n = 10$) субгармоника возбуждается при вполне реальной амплитуде деформации $\varepsilon_0 = 10^{-6}$, при этом на частоте $\omega = 2\pi \cdot 10^7$ Гц и $\Delta\varepsilon = 10^{-7}$ время возбуждения составляет $\tau_p = 200$ мкс.

Автор благодарен Л. А. Островскому, И. А. Соустовой и А. М. Сутину за интерес к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
2. *Руденко В. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
3. *Островский Л. А., Папилова И. А., Сутин А. М.* Параметрический генератор ультразвука // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 15. В. 8. С. 456–458.
4. *Зарембо Л. К., Сердобольская О. Ю.* К вопросу о параметрическом усилении и параметрической генерации акустических волн // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 5. С. 726–732.
5. *Пуговкин А. В., Шандаров С. М.* Нелинейное взаимодействие гиперзвуковых волн в кристалле $LiNbO_3$ // ФТТ. 1972. Т. 4. В. 1. С. 250–252.
6. *Korpel A., Adler L.* Parametric phenomena observed on ultrasonic waves in water // Appl. Phys. Lett. 1965. V. 7. № 4. P. 106–108.
7. *Adler L., Breazeal M. A.* Generation of fractional harmonics in a resonant ultrasonics wave systems // J. Acoust. Soc. Amer. 1970. V. 48. № 5. P. 1077–1083.
8. *Eller A. I.* Fractional-harmonic frequency pairs in nonlinear systems // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. V. 9. № 3. P. 758–765.
9. *Островский Л. А., Папилова И. А., Сутин А. М.* Параметрическая генерация и усиление акустических волн в кольцевом резонаторе // ЖТФ. 1973. Т. 43. № 10. С. 2213–2215.
10. *Назаров В. Е.* Удвоение частоты акустической волны на нелинейном слое // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 708–711.
11. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27.02.90

V. E. Nazarov

OF SUBHARMONIC EXCITATION IN AN ACOUSTIC RESONATOR

The excitation of subharmonic oscillations in the acoustic resonator is considered. The resonator is a plane-parallel layer placed in ambient media and irradiated by a normally incident plane acoustic wave. Within the framework of the five-constant theory of elasticity, the system of differential equations for amplitudes and phases of interacting waves is obtained using the perturbation method on the constant pumping assumption. The conditions, threshold and time of excitation of the subharmonic oscillations in the layer are determined. The method of evaluation of the parameter of medium acoustic nonlinearity in the layer on the basis of the measurement of the subharmonic excitation threshold in the resonator is proposed. The estimations show that in the system «steel – plastic – steel» the subharmonic oscillations can be excited at the practicable deformation amplitude in the pump wave.