Решая уравнение (9), получим следующее выражение для V_0:

$$V_0=\sigma\dot{\xi}(t)\exp(i\omega t)=-\sigma^2\left\{(r_0+r)+i\left(\frac{1}{\varkappa\omega}-\omega m\right)\right\}^{-1}. \tag{10}$$

Коэффициенты возбуждения нулевых мод не зависят от формы поперечного сечения волновода. Рассеянные неоднородные моды влияют (через присоединенную массу) на собственную частоту резонатора. Коэффициенты возбуждения этих мод зависят от формы поперечного сечения. Эффективность резонатора на собственной частоте можно оценить при любой форме поперечного сечения. Если частота звука совпадает с собственной частотой резонатора ($\omega=\omega_0=1/\sqrt{\varkappa m}$) и сопротивление трения мало по сравнению с сопротивлением излучения ($r_0\ll r$), то выражение (10) принимает следующий вид: $V_0=-2S/\rho c$. Подставляя V_0 в формулу (8), получим рассеянное поле

$$p^{\pm}(z)=-\left(1-\frac{M}{k}\xi^{\pm}\right)^2\exp(i\xi^{\pm}z).$$

Справа от резонатора полное поле равно $p^{(0)}(z)+p^{+}(z)=W\exp(i\xi^{+}z)$, где $W=[1-(1+M)^{-2}]$ – коэффициент прохождения звуковой волны на резонансной частоте. Он равен нулю при покоящейся среде и монотонно увеличивается с ростом скорости потока. При расчете не учитывалось влияние турбулентности и поэтому найденный коэффициент прохождения характеризует звукоизолирующие свойства резонатора только при малом числе Маха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ingard U., Singhal V. K.* Upstream and downstream sound radiation into a moving fluid // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. V. 54. № 5. P. 1343–1346.
2. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.

Поступило в редакцию
24.04.89

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

УДК 534.231 : 551.596

С. Л. Одинцов

УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В сообщении приводится краткий вывод уравнения для потенциала колебательной скорости звука с учетом квадратичной нелинейности при наличии движения среды.

Предположим, что среда – идеальный нетеплопроводный совершенный газ, в котором равновесные (помеченные индексом 0) значения термодинамических параметров постоянны, в частности, $\rho_0=\text{const}$, $p_0=\text{const}$, $T_0=\text{const}$, где ρ, p и T – плотность, давление и температура. Будем считать, что скорость $\mathbf{v}$ частицы сплошной среды является суммой двух компонентов: $\mathbf{v}_\text{а}$ – колебательной скорости, связанной со звуковой волной, и $\mathbf{v}_\text{п}$ – скорости потока среды. При этом полагаем $\nabla\cdot\mathbf{v}=\nabla\cdot\mathbf{v}_\text{а}$, $\nabla\times\mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{v}_\text{п}$, $\partial\mathbf{v}_\text{п}/\partial t=0$. Здесь и далее используется оператор Гамильтона ∇.

Суммарное давление $p=p_0+p_\text{а}+p_\text{п}$, суммарная плотность $\rho=\rho_0+\rho_\text{а}$, суммарная температура $T=T_0+T_\text{а}$, где индекс а отвечает звуку, а индекс п – потоку. Кроме того, предположим, что $\rho_\text{а}\ll\rho_0$ и $p_\text{п}<p_\text{а}\ll p_0$.

Заданная модель среды позволяет записать исходные для последующего анализа уравнения гидродинамики в виде

$$\frac{\partial\mathbf{v}_\text{а}}{\partial t}+{}^1/_2\nabla\mathbf{v}_\text{а}^2+\nabla(\mathbf{v}_\text{а}\mathbf{v}_\text{п})-\mathbf{v}_\text{а}\times\nabla\times\mathbf{v}_\text{п}+c_0^2\nabla(\Pi-{}^1/_2\Pi^2)=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Pi-\frac{\gamma}{2}\Pi^2\right)+\mathbf{v}_\text{п}\nabla\left(\Pi-\frac{\gamma}{2}\Pi^2\right)+\nabla\cdot\mathbf{v}_\text{а}=0, \tag{2}$$

где $\Pi=p_\text{а}/\gamma p_0=p_\text{а}/\rho_0c_0^2$, c_0 – скорость звука для равновесных условий, $\gamma=c_p/c_v$, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Основная цель работы – свести систему уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными $v_\text{а}$ и Π к одному уравнению с одним неизвестным.

Учитывая, что любое векторное поле можно записать через его потенциальную и соленоидальную составляющие и основываясь на сделанных ранее предположениях, запишем $\mathbf{v}_\text{а}=\nabla\Phi$, $\mathbf{v}_\text{п}=\nabla\Phi_\text{п}+\nabla\times\boldsymbol{\varkappa}$, причем $\nabla\cdot\nabla\Phi_\text{п}=\Delta\Phi_\text{п}=0$, $\nabla\cdot\boldsymbol{\varkappa}=0$. Введем также обозначение $\mathbf{B}=\mathbf{v}_a\times\nabla\times\mathbf{v}_п=\nabla\Phi\times\nabla\times\mathbf{v}_п$. Тогда уравнение (1) можно записать в форме

$$\nabla\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+{}^1/_2(\nabla\Phi)^2+\mathbf{v}_п\nabla\Phi+c_0^2\Pi-\frac{c_0^2}{2}\Pi^2\right]=\mathbf{B}. \tag{3}$$

Если применить оператор ротора к этому уравнению, то получим, что $\nabla\times\mathbf{B}=0$, при этом, как следует из (3), $\nabla\cdot\mathbf{B}\neq0$. Таким образом, $\mathbf{B}=\nabla\varphi$, причем

$$\varphi(\mathbf{r})=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}d^3r', \tag{4}$$

$$\mathbf{B}=\nabla\varphi=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{R}\cdot\nabla\cdot\mathbf{B}}{R^3}d^3r', \tag{5}$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – радиус-вектор, проведенный от точки $\mathbf{r}'$ к точке $\mathbf{r}$, $R=|\mathbf{R}|$. Интегрирование ведется по объему шара с бесконечным радиусом. Об условиях сходимости интегралов (4) и (5), которые здесь считаются выполненными, можно подробно узнать в [1].

Используя представление $\mathbf{B}=\nabla\varphi$ и взяв дивергенцию уравнения (3), придем к уравнению Лапласа

$$\Delta W(\mathbf{r})=\Delta\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+{}^1/_2(\nabla\Phi)^2+\mathbf{v}_п\nabla\Phi-\varphi+c_0^2\Pi-\frac{c_0^2}{2}\Pi^2\right]=0. \tag{6}$$

Если предположить, что на бесконечности звук отсутствует, то в соответствии со свойствами гармонических функций, являющихся решением уравнения Лапласа (6), можно записать

$$W(\mathbf{r})=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+{}^1/_2(\nabla\Phi)^2+\mathbf{v}_п\nabla\Phi-\varphi+c_0^2\Pi-\frac{c_0^2}{2}\Pi^2=0. \tag{7}$$

Итак, получена система уравнений (2) и (7) с двумя неизвестными Φ и Π. Для того чтобы свести эту систему к одному уравнению, например относительно Φ, воспользуемся подходом, примененным в работе [2]. В итоге имеем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-c_0^2\Delta\Phi=-\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla\Phi)^2+\psi+\frac{\gamma-1}{2c_0^2}K^2\right]-$$
$$-\nabla\Phi\nabla(\mathbf{v}_п\nabla\Phi)-\mathbf{v}_п\nabla\left[{}^1/_2(\nabla\Phi)^2+K+\frac{\gamma-1}{2c_0^2}K^2\right], \tag{8}$$

где введены обозначения $\psi=\mathbf{v}_п\nabla\Phi-\varphi$, $K=\psi+\partial\Phi/\partial t$. Решение уравнения (8) позволит провести анализ мощных звуковых полей в условиях движущейся среды.

Сопоставим уравнение (8), точнее, его приближения, с имеющимися в литературе результатами аналогичных исследований. При отсутствии движений в среде, т. е. при $\mathbf{v}_п=0$, из уравнения (8) следует

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-c_0^2\Delta\Phi=-\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla\Phi)^2+\frac{\gamma-1}{2c_0^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2\right], \tag{9}$$

что совпадает с итоговым уравнением работы [2] в приближении идеальности и нетеплопроводности среды.

Пренебрежем теперь в уравнении (8) квадратичными по Φ слагаемыми. Тогда

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-c_0^2\Delta\Phi=-\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_п\nabla\Phi-\varphi)-\mathbf{v}_п\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\mathbf{v}_п\nabla\Phi-\varphi\right). \tag{10}$$

Сравним это уравнение с результатами работ [3, 4], перейдя от потенциала Φ к нормированному акустическому давлению Π. Взяв от уравнения (10) производную $\partial^2/\partial t^2$ и используя (в линейном приближении по Φ) уравнение (7), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}-c_0^2\Delta\Pi\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)-\mathbf{v}_п\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\Pi). \tag{11}$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot[(\mathbf{v}_п\nabla)\nabla\Phi+(\nabla\Phi\nabla)\mathbf{v}_п]=$$
$$=-\nabla\cdot[2c_0^2(\nabla\Pi\nabla)\mathbf{v}_п+c_0^2\mathbf{v}_п\Delta\Pi+\mathbf{v}_п\Delta\psi+2(\nabla\psi\nabla)\mathbf{v}_п]. \tag{12}$$

Подставим (12) в (11). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}-c_0^2\Delta\Pi+2\mathbf{v}_\text{п}\frac{\partial\nabla\Pi}{\partial t}\right)+2c_0^2\nabla\cdot[(\nabla\Pi\nabla)\mathbf{v}_\text{п}]-$$
$$-\nabla\cdot\left[\mathbf{v}_\text{п}\left(\mathbf{v}_\text{п}\frac{\partial\nabla\Pi}{\partial t}\right)\right]+2\nabla\cdot[(\nabla\psi\nabla)\mathbf{v}_\text{п}]=0. \quad (13)$$

Это уравнение (без двух последних слагаемых, имеющих более высокий порядок малости по отношению к другим) полностью совпадает с аналогичными уравнениями работ [3, 4] в приближении $\rho_0=\text{const}$ и $c_0=\text{const}$.

Проведенное сопоставление приближений уравнения (8) с результатами работ [2–4] позволяет надеяться на его справедливость (в рамках заданной модели среды) при описании звуковых волн высокой интенсивности в условиях движущейся среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Наука, 1973. 584 с.
2. *Кузнецов В. П.* Уравнения нелинейной акустики // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 4. С. 548–553.
3. *Абдуллаев С. С., Осташев В. Е.* О распространении звуковых волн в трехмерно-неоднородной (случайно-неоднородной) движущейся среде // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24. № 4. С. 417–426.
4. *Годин О. А.* Волновое уравнение для звука в среде с медленными течениями // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 63–67.

Институт оптики атмосферы
Сибирского отделения АН СССР

Поступило в редакцию
19.12.88

УДК 539.3

А. В. Сергеев

О НАХОЖДЕНИИ ЧАСТОТНЫХ ДИАПАЗОНОВ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ, СОДЕРЖАЩИХ ИНФОРМАЦИЮ О ТОЛЩИНЕ УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

При решении обратных задач теории рассеяния для упругих тел необходимо знать информативные диапазоны частот каждого параметра рассеивателя, определяемые по частотной зависимости поля, рассеянного исследуемым телом. Используемые в [1, 2] для нахождения толщины оболочек частотные диапазоны были обусловлены возбуждением в оболочках нулевой антисимметричной волны типа Лэмба, что имеет место при частотах, удовлетворяющих следующему соотношению [3]:

$$\varkappa=(0{,}5\div2{,}5)R/h, \quad (1)$$

где $\varkappa$ – безразмерная частота, R – радиус внешней поверхности оболочки, h – толщина. Однако для тонкостенных оболочек условие (1) не всегда удается реализовать, так как в этом случае информативный диапазон оказывается в высокочастотной области. В этой связи в [4] была рассмотрена возможность использования в качестве информативного значения частоты, соответствующего положению первого максимума в частотной зависимости рассеянного поля. Тем не менее наличие всего лишь одного информативного значения частоты приводит к низкой помехоустойчивости при решении обратной задачи рассеяния. Поэтому для повышения помехоустойчивости необходимо выявить дополнительные значения частот, при которых рассеянное поле содержит информацию о толщине тонкостенных оболочек. Решение этой задачи и является целью данной статьи.

Дальнейшее изложение будет относиться к упругим сферическим или цилиндрическим тонкостенным оболочкам, заполненным воздухом и изготовленным из материала, характеризуемого плотностью ρ_2, а также скоростями продольных и поперечных волн c_l, c_t. Оболочки находятся в акустической среде с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1. Под частотной зависимостью рассеянного поля будем понимать зависимость амплитуды давления от частоты $\varkappa$ облучающей плоской гармонической волны, падающей в случае цилиндрической оболочки перпендикулярно образующей, на расстоянии r_0 от центра оболочки в направлении назад. Наша задача состоит в том, чтобы выделить в диапазоне $0<\varkappa\leqslant20$ значения частот, на которых поле, рассеянное тонкостенными оболочками с $R/h=500$, содержит информацию о толщине оболочки. В интересующем нас диапазоне частот можно выделить две характерные области: