4. *Дудник Р. А., Музычук О. В., Фияксель Э. А.* Излучение звука цилиндрической оболочки с локальной массой // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 834–840.
5. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

Горьковский инженерно-строительный институт им. В. П. Чкалова

Поступило в редакцию 14.06.89

УДК 534.26

А. Д. Лапин

ИЗЛУЧЕНИЕ НУЛЕВОЙ МОДЫ В ВОЛНОВОДЕ С СЕЧЕНИЕМ ЛЮБОЙ ФОРМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТОКА

Задача об излучении звука в волноводе с сечением простейшей формы (прямоугольным, круглым) неоднократно рассматривалась в литературе методом разделения переменных. В волноводе с сечением любой формы переменные не разделяются и поэтому соответственная задача излучения еще не решена.

Нулевая мода в волноводе с жесткими стенками представляет собой «обычную» плоскую волну, бегущую вдоль его оси, и она не зависит от формы сечения волновода. По этой причине задачу о возбуждении нулевой моды в волноводе малыми колебаниями его стенки можно решить при любой форме сечения волновода. Для волновода с прямоугольным сечением эта задача была решена в работе [1]. Пусть в цилиндрической системе координат (r, φ, z) стенка волновода описывается уравнениями $r=R(\varphi)$ $|z|>L$, $r=R(\varphi)+u(\varphi, z, t)$ $|z|<L$, где $u(\varphi, z, t)$ – смещение стенки в момент времени t. Однородная среда, заполняющая волновод, движется в направлении оси z со скоростью U, плотность среды и скорость звука в ней равны соответственно ρ и c. Требуется найти нулевую моду в волноводе, создаваемую малыми гармоническими колебаниями его стенки $u(\varphi, z, t)=u(\varphi, z)\exp(-i\omega t)$, $\dfrac{\omega}{c}|u|\ll 1$, $|\nabla u|\ll 1$.

Звуковой потенциал Φ в однородной движущейся среде удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi+k^2\left(1+i\frac{M}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Phi=0, \tag{1}$$

где $M=U/c$ – число Маха, $k=\omega/c$ – волновое число в неподвижной среде. Звуковое давление p и колебательную скорость v в движущейся среде получим по формулам [2]

$$p=i\omega\rho\left(1+i\frac{M}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi,\quad \mathbf{v}=\operatorname{grad}\Phi. \tag{2}$$

На колеблющейся стенке волновода выполняется соотношение $(\mathbf{U}+\mathbf{v})\mathbf{n}=\mathbf{v}_{\text{ст}}\mathbf{n}$, $r=R+u$, $|z|<L$, где $v_{\text{ст}}$ – колебательная скорость стенки, n – внешняя нормаль к поверхности $r=R+u$. В линейном приближении по малым параметрам $k|u|$ и $|\nabla u|$ это соотношение можно привести к виду

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}^0}\right]_{r=R}=\left(1+i\frac{M}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(-i\omega u),\quad |z|<L, \tag{3}$$

где $\mathbf{n}^0$ – внешняя нормаль к поверхности $r=R(\varphi)$. При $|z|>L$ на стенке волновода выполняется граничное условие

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}^0}\right]_{r=R}=0. \tag{4}$$

Проинтегрируем уравнение (1) по сечению S волновода. При учете теоремы Грина

$$\iint_S\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}r\,dr\,d\varphi=\int_l\frac{\partial\Phi}{\partial n^0}\,dl,$$

где l – контур сечения S, и граничных условий (3) и (4) на стенке волновода получим следующее уравнение для величины $\Phi(z)=\dfrac{1}{S}\displaystyle\int_S\Phi\,dS$:

$$\frac{d^2\tilde{\Phi}}{dz^2}+\left(k+iM\frac{d}{dz}\right)^2\tilde{\Phi}=\frac{1}{S}f(z), \tag{5}$$

где $f(z)\equiv 0$ при $|z|>L$,

$$f(z)=-\int\limits_0^{2\pi}\left(1+i\frac{M}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(-i\omega u)R(\varphi)\,d\varphi \quad \text{при} \quad |z|<L.$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\tilde{\Phi}(z)=-\frac{i}{2kS}\left\{\int\limits_{-\infty}^{z}f(Z)\exp[i\xi^+(z-Z)]\,dZ+\int\limits_{z}^{\infty}f(Z)\exp[i\xi^-(z-Z)]\,dZ\right\},$$

где $\xi^+=k/(1+M)$, $\xi^-=-k(1-M)$, $M<1$.

Справа $(z>L)$ и слева $(z<-L)$ от колеблющегося участка получим нулевые моды $\Phi_0{}^+(z)$ и $\Phi_0{}^-(z)$, бегущие соответственно в положительном и в отрицательном направлениях оси z:

$$\Phi_0{}^{\pm}(z)=\frac{i}{2kS}\left(1-\frac{M}{k}\xi^{\pm}\right)\int\limits_{-L}^{L}\int\limits_{0}^{2\pi}[-i\omega u(\varphi,Z)]R(\varphi)\exp(-i\xi^{\pm}Z)\,d\varphi\,dZ\,\exp(i\xi^{\pm}z). \tag{6}$$

При малой длине колеблющегося участка $(2kL\ll 1-M)$ излучаемые нулевые моды можно представить в виде

$$\Phi_0{}^{\pm}(z)=-\frac{iV}{2kS}\left(1-\frac{M}{k}\xi^{\pm}\right)\exp(i\xi^{\pm}z), \tag{7}$$

где

$$V=-\int\limits_{-L}^{L}\int\limits_{0}^{2\pi}[-i\omega u(\varphi,Z)]R(\varphi)\,d\varphi\,dZ.$$

Согласно этим формулам поле $\Phi_0{}^{\pm}(z)$ определяется объемной скоростью V колеблющейся стенки и не зависит от распределения окорости $(-i\omega u)$ по ней. Формула (7) дает нулевую моду в волноводе, создаваемую точечным источником с объемной скоростью V, расположенным на его стенке в любой точке сечения $z=0$.

На основе полученных формул можно исследовать влияние движения среды на звукоизолирующие свойства резонатора Гельмгольца в одномодовом волноводе. Пусть резонатор присоединен к волноводу в сечении $z=0$ и пусть слева на него падает волна $p^{(0)}(z)=\exp(i\xi^+z)$. Под действием ее резонатор возбуждается и излучает поле $p(z)$. Полное поле в волноводе получим сложением полей $p^{(0)}$ и p.

Резонатор Гельмгольца является колебательной системой с одной степенью свободы. Сосредоточенные параметры системы определяются размерами горла и объемом воздушной полости резонатора. Обозначим через V_0 объемную скорость, создаваемую резонатором при воздействии на него падающей волны $p_0(z)$, и выразим через V_0 рассеянное поле в волноводе. Пользуясь формулами (2) и (7), получим следующее выражение для рассеянного поля:

$$p^{\pm}(z)=\frac{\rho c}{2}\frac{V_0}{S}\left(1-\frac{M}{k}\xi^{\pm}\right)^2\exp(i\xi^{\pm}z). \tag{8}$$

Величину V_0 и, следовательно, поле $p^{\pm}(z)$ можно найти, используя уравнение вынужденных колебаний резонатора под действием волны $p^{(0)}(z)$. Это уравнение имеет вид

$$m\ddot{\zeta}+(r_0+r)\dot{\zeta}+\frac{1}{\varkappa}\zeta=-\sigma\exp(-i\omega t), \tag{9}$$

где m — эффективная масса (масса воздуха в горле резонатора плюс присоединенная масса, обусловленная неоднородными волнами), $\zeta(t)$ — смещение массы, σ — площадь горла, $\varkappa$ — гибкость, r_0 — сопротивление трения, r — сопротивление излучения. Величина r определяется по формуле

$$r=\frac{\sigma^2}{V_0}\frac{p^+(+0)+p^-(-0)}{2}\approx\frac{\rho c}{2}\frac{\sigma^2}{S}.$$

Решая уравнение (9), получим следующее выражение для V_0:

$$V_0=\sigma\dot{\xi}(t)\exp(i\omega t)=-\sigma^2\left\{(r_0+r)+i\left(\frac{1}{\varkappa\omega}-\omega m\right)\right\}^{-1}. \tag{10}$$

Коэффициенты возбуждения нулевых мод не зависят от формы поперечного сечения волновода. Рассеянные неоднородные моды влияют (через присоединенную массу) на собственную частоту резонатора. Коэффициенты возбуждения этих мод зависят от формы поперечного сечения. Эффективность резонатора на собственной частоте можно оценить при любой форме поперечного сечения. Если частота звука совпадает с собственной частотой резонатора ($\omega=\omega_0=1/\sqrt{\varkappa m}$) и сопротивление трения мало по сравнению с сопротивлением излучения ($r_0\ll r$), то выражение (10) принимает следующий вид: $V_0=-2S/\rho c$. Подставляя V_0 в формулу (8), получим рассеянное поле

$$p^{\pm}(z)=-\left(1-\frac{M}{k}\xi^{\pm}\right)^2\exp(i\xi^{\pm}z).$$

Справа от резонатора полное поле равно $p^{(0)}(z)+p^{+}(z)=W\exp(i\xi^{+}z)$, где $W=[1-(1+M)^{-2}]$ – коэффициент прохождения звуковой волны на резонансной частоте. Он равен нулю при покоящейся среде и монотонно увеличивается с ростом скорости потока. При расчете не учитывалось влияние турбулентности и поэтому найденный коэффициент прохождения характеризует звукоизолирующие свойства резонатора только при малом числе Маха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ingard U., Singhal V. K.* Upstream and downstream sound radiation into a moving fluid // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. V. 54. № 5. P. 1343–1346.
2. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
24.04.89

УДК 534.231 : 551.596

С. Л. Одинцов

УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В сообщении приводится краткий вывод уравнения для потенциала колебательной скорости звука с учетом квадратичной нелинейности при наличии движения среды.

Предположим, что среда – идеальный нетеплопроводный совершенный газ, в котором равновесные (помеченные индексом 0) значения термодинамических параметров постоянны, в частности, $\rho_0=\text{const}$, $p_0=\text{const}$, $T_0=\text{const}$, где ρ, p и T – плотность, давление и температура. Будем считать, что скорость $\mathbf{v}$ частицы сплошной среды является суммой двух компонентов: $\mathbf{v}_\text{а}$ – колебательной скорости, связанной со звуковой волной, и $\mathbf{v}_\text{п}$ – скорости потока среды. При этом полагаем $\nabla\cdot\mathbf{v}=\nabla\cdot\mathbf{v}_\text{а}$, $\nabla\times\mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{v}_\text{п}$, $\partial\mathbf{v}_\text{п}/\partial t=0$. Здесь и далее используется оператор Гамильтона ∇.

Суммарное давление $p=p_0+p_\text{а}+p_\text{п}$, суммарная плотность $\rho=\rho_0+\rho_\text{а}$, суммарная температура $T=T_0+T_\text{а}$, где индекс а отвечает звуку, а индекс п – потоку. Кроме того, предположим, что $\rho_\text{а}\ll\rho_0$ и $p_\text{п}<p_\text{а}\ll p_0$.

Заданная модель среды позволяет записать исходные для последующего анализа уравнения гидродинамики в виде

$$\frac{\partial\mathbf{v}_\text{а}}{\partial t}+{}^1/_2\nabla\mathbf{v}_\text{а}^2+\nabla(\mathbf{v}_\text{а}\mathbf{v}_\text{п})-\mathbf{v}_\text{а}\times\nabla\times\mathbf{v}_\text{п}+c_0^2\nabla(\Pi-{}^1/_2\Pi^2)=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Pi-\frac{\gamma}{2}\Pi^2\right)+\mathbf{v}_\text{п}\nabla\left(\Pi-\frac{\gamma}{2}\Pi^2\right)+\nabla\cdot\mathbf{v}_\text{а}=0, \tag{2}$$

где $\Pi=p_\text{а}/\gamma p_0=p_\text{а}/\rho_0c_0^2$, c_0 – скорость звука для равновесных условий, $\gamma=c_p/c_v$, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Основная цель работы – свести систему уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными $v_\text{а}$ и Π к одному уравнению с одним неизвестным.

Учитывая, что любое векторное поле можно записать через его потенциальную и соленоидальную составляющие и основываясь на сделанных ранее предположениях, запишем $\mathbf{v}_\text{а}=\nabla\Phi$, $\mathbf{v}_\text{п}=\nabla\Phi_\text{п}+\nabla\times\boldsymbol{\varkappa}$, причем $\nabla\cdot\nabla\Phi_\text{п}=\Delta\Phi_\text{п}=0$, $\nabla\cdot\boldsymbol{\varkappa}=0$. Введем также