АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 1

УДК 539.3

© 1990 г.

В. М. Макеев, Ю. А. Россихин

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЛАБОАНИЗОТРОПНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ

Методы возмущений, которые с успехом используются в различных разделах теории упругости, не получили должного развития в теории анизотропных тел. В этом направлении известны лишь отдельные публикации [1—4]. В предлагаемой статье для произвольного монокристалла проводится построение эквивалентной слабоанизотропной модели, которая позволяет с помощью методов возмущений выявить и изучить основные особенности поведения некоторых типов волн в данном монокристалле. Рассмотрены задачи о распространении волн Рэлея и объемных волн в слабоанизотропных полупространствах кубической, гексагональной, тетрагональной и ромбической симметрий. Показано, что результаты, полученные для кристаллов конечной анизотропии и для их слабоанизотропных аналогов, находятся в хорошем соответствии друг с другом.

Рассмотрим монокристалл произвольной симметрии с упругими коэффициентами c_{ijkl} ($c_{\alpha\beta}$) (латинские индексы принимают значения 1—3, а греческие — 1—6) и построим эквивалентную ему слабоанизотропную модель, упругие коэффициенты которой имеют вид [3]

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}^{(0)} + \varepsilon\lambda_{ijkl}^{(1)}\mu, \tag{1}$$

где $\lambda_{ijkl}^{(0)}$ — компоненты тензора упругости изотропного материала, $\lambda_{ijkl}^{(1)}$ — компоненты некоторого тензора четвертого ранга, ε — малый, параметр, μ — модуль сдвига.

Для нахождения величин $\lambda_{ijkl}^{(0)}$ воспользуемся методом Хилла [5], который состоит в том, что по известным упругим коэффициентам монокристалла c_{ijkl} ($c_{\alpha\beta}$) находятся изотропные коэффициенты K (модуль объемной упругости) и μ (модуль сдвига) соответствующей ему поликристаллической модели, которая в среднем ведет себя так же, как и монокристалл. Коэффициенты K и μ образуют компоненты тензора $\lambda_{ijkl}^{(0)}$ и определяются так:

$$K = {}^1/_2\,(K_\Phi + K_P),\ \mu = {}^1/_2\,(\mu_\Phi + \mu_P), \tag{2}$$

где K_Φ, μ_Φ, K_P, μ_P — приближенные значения модулей упругости поликристаллических веществ, вычисленные по схемам Фохта и Ройса и приведенные в [5] для всех классов симметрии кристаллов.

Если теперь компоненты $\lambda_{ijkl}^{(1)}$ определить по формуле

$$\lambda_{ijkl}^{(1)} = (c_{ijkl} - \lambda_{ijkl}^{(0)})\,\mu^{-1}, \tag{3}$$

то соотношение (1) можно представить в виде

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}^{(0)} + \varepsilon\,(c_{ijkl} - \lambda_{ijkl}^{(0)}), \tag{4}$$

т. е. при $\varepsilon = 0$ построенная модель переходит в изотропное тело, а при $\varepsilon = 1$ — в монокристалл.

Заметим, что в качестве малого параметра может быть использована величина $\delta = 2\,(\mu_\Phi - \mu)/(\mu_\Phi + \mu)$, так как для слабоанизотропного материала $\mu_\Phi - \mu = O\,(\varepsilon)$.

Как показал Хилл [5], чем меньше величина δ, тем точнее изотропная модель с упругими коэффициентами $\lambda_{ijkl}^{(0)}$ определяет усредненные по всем направлениям параметры монокристалла и, в частности, его среднюю скорость звука.

Следовательно, если δ мало, то слабоанизотропная модель (4), по-видимому, является хорошим приближением и к поликристаллическому веществу, в котором существует слабая упорядоченность кристаллических частиц, появившаяся, например, при получении поликристалла из кристаллического порошка способом горячего прессования или в процессе механической обработки поликристалла.

Гипотетическое твердое тело, матрица упругих коэффициентов которого задается формулой (4), будем называть слабоанизотропным эквивалентом монокристаллического тела.

На основе формул (2)—(4) можно построить слабоанизотропные эквиваленты для кристаллов различных симметрий.

Упругие модули слабоанизотропного эквивалента ромбического кристалла связаны следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\lambda_{11}^{(1)} = -2(\lambda_{44}^{(1)} + \lambda_{55}^{(1)} + \lambda_{66}^{(1)}) - \lambda_{22}^{(1)} - \lambda_{33}^{(1)} + O(\varepsilon),\\ \lambda_{12}^{(1)} = \lambda_{44}^{(1)} + \lambda_{55}^{(1)} + \lambda_{66}^{(1)} - \lambda_{13}^{(1)} - \lambda_{23}^{(1)} + O(\varepsilon).\end{gathered} \tag{5}$$

Выражения для K и μ не приводятся из-за громоздкости.

Из формул (5) с учетом соотношений симметрии [6] для тетрагонального, гексагонального и кубического кристаллов соответственно получим

$$\begin{gathered}\lambda_{11}^{(1)} = -2\lambda_{44}^{(1)} - \lambda_{66}^{(1)} - 1/2\lambda_{33}^{(1)} + O(\varepsilon),\\ \lambda_{12}^{(1)} = 2\lambda_{44}^{(1)} + \lambda_{66}^{(1)} - 2\lambda_{13}^{(1)} + O(\varepsilon),\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{11}^{(1)} = -\lambda_{44}^{(1)} - 1/2\lambda_{13}^{(1)} - 3/8\lambda_{33}^{(1)} + O(\varepsilon),\\ \lambda_{12}^{(1)} = \lambda_{44}^{(1)} - 3/2\lambda_{13}^{(1)} - 1/8\lambda_{33}^{(1)} + O(\varepsilon),\end{gathered} \tag{7}$$

$$\lambda_{11}^{(1)} = -2\lambda_{44}^{(1)} + O(\varepsilon), \quad \lambda_{12}^{(1)} = \lambda_{44}^{(1)} + O(\varepsilon). \tag{8}$$

Чтобы показать эквивалентность построенной модели (4) и монокристаллического тела в смысле сохранения особенностей при распространении в монокристалле рэлеевских и объемных волн, рассмотрим несколько примеров.

Прямое разложение по малому параметру ε для волн Рэлея в слабоанизотропном кристалле ищется в виде суперпозиции трех комплексных волн [4]. Положение свободной поверхности и направление распространения поверхностной волны относительно осей симметрии кристалла задаются углами Эйлера φ, θ, ψ [7].

Как показано в работе [4], прямое разложение становится непригодным для некоторых особых направлений φ_0, θ_0, ψ_0. С помощью метода растянутых параметров [8] удается регуляризовать решение в окрестности особых направлений и определить близкие к φ_0, θ_0, ψ_0 направления φ_*, θ_*, ψ_*, вдоль которых решение представляет собой двухпарциальную волну Рэлея, амплитуда которой линейно зависит от расстояния вглубь кристалла [9].

С учетом формул (6) для тетрагонального кристалла в плоскости (100) параметры $\varphi_0 = \psi_0 = 0$, а θ_0 (θ_0 — угол между особым направлением и осью [010]) определяются из двух уравнений (первому уравнению соответствуют верхние знаки, второму — нижние):

$$[rg^{-2}v^2 - qc^{-2}(1 + v^2)][c^{-1} \pm av]^2 + 2ag^{-2}(1 + v^2)\, p\, [a \mp c^{-1}v] = 0. \tag{9}$$

Здесь g — скорость волны Рэлея в изотропной среде, $c = \mu^{1/2}\rho^{-1/2}$, ρ — плотность, $a = (g^{-2} - c^{-2})^{1/2}$, $v = \operatorname{tg}\theta_0$, $r = 2\lambda_{23}^{(1)} - \lambda_{33}^{(1)} + 4\lambda_{44}^{(1)} - \lambda_{22}^{(1)}$, $p = 2\lambda_{66}^{(1)} - \lambda_{22}^{(1)} + \lambda_{12}^{(1)}$, $q = \lambda_{44}^{(1)} - \lambda_{66}^{(1)}$.

Как следует из соотношений (7), в гексагональном кристалле $p = 0$ и уравнение (9) дает два особых направления $\theta_0 = \pm \arcsin(gc^{-1})$.

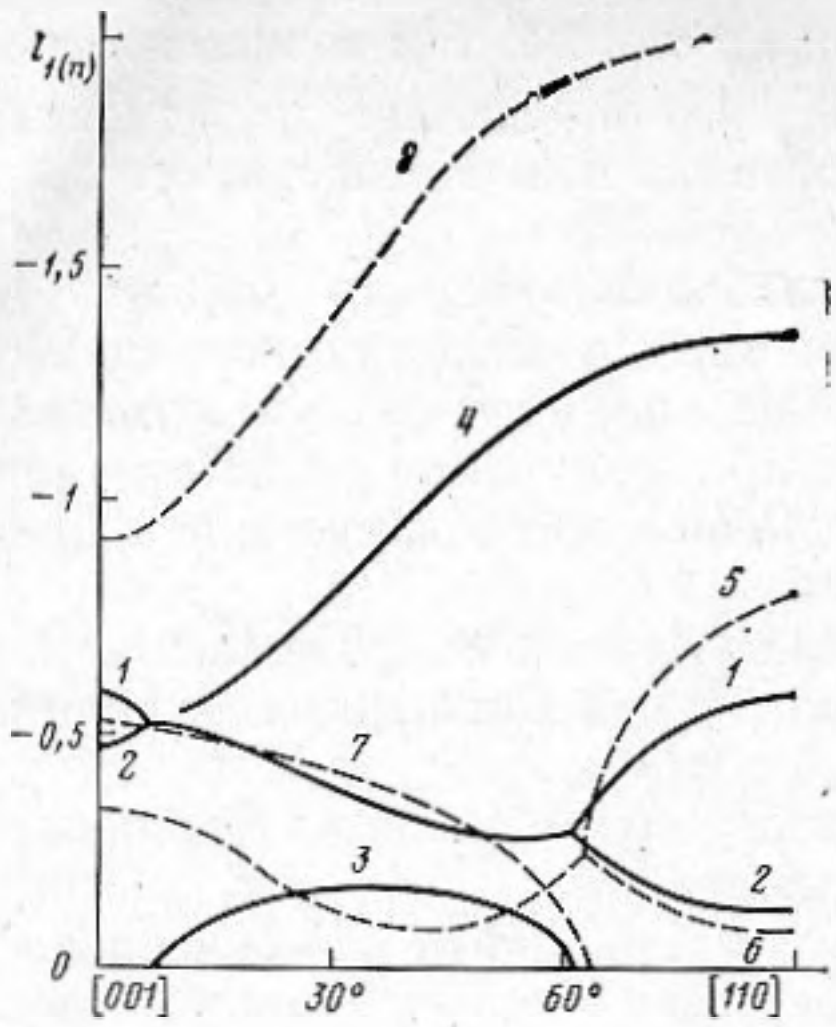

Рис. 1

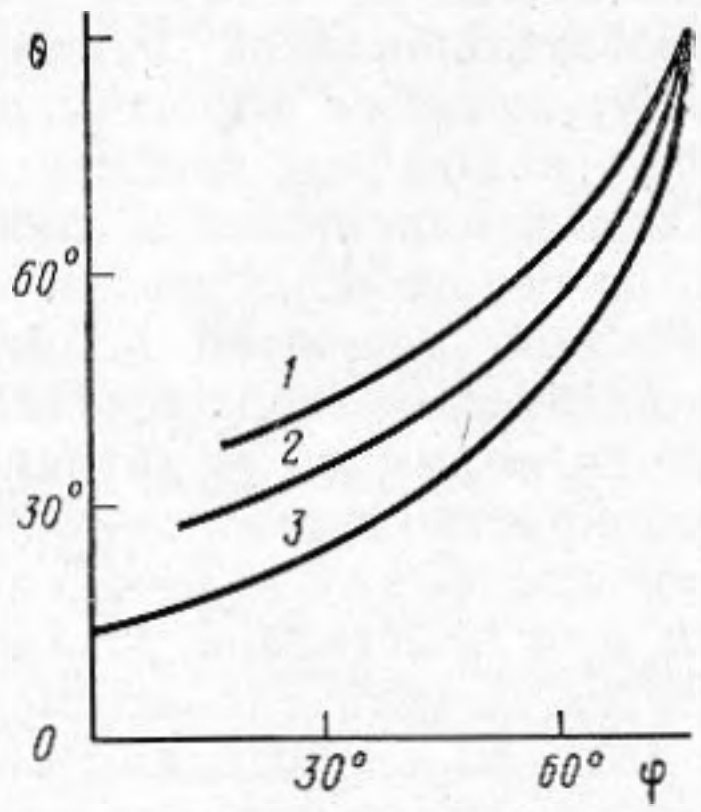

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость величин $l_{1(n)}$ от угла θ для монокристалла никеля при $\varepsilon = 1$ (штриховые кривые) и его слабоанизотропного аналога при $\varepsilon = 0{,}32$ (сплошные кривые) на плоскости (011): *1* и *5* — Re $l_{1(1)}$, *2* и *6* — Re $l_{1(2)}$, *3* и *7* — $\mathrm{Im}\, l_{1(1)} = -\mathrm{Im}\, l_{1(2)}$, *4* и *8* — $l_{1(3)}$

Рис. 2. Кривые, вдоль которых реализуются решения в виде объемных волн: *1* — при $\varepsilon q < 0$, $m \neq 0$; *2* — при $\varepsilon q > 0$, $m \neq 0$; *3* — при $m = 0$

Учитывая (8), можно показать, что для кубического кристалла особые направления определяются из уравнений (9) при $q = 0$, $r = 2p$.

Численные расчеты, проведенные для кристаллов никеля и хлористого калия, показывают, что плоскость (100) не содержит особых направлений, а в плоскости (110) эти направления составляют с осью [001] углы 63° для никеля и 0° для хлористого калия [10].

Для слабоанизотропных аналогов указанных кристаллов в плоскости (100) особые направления также отсутствуют, а в плоскости (110) составляют с осью [001] углы 61 и 6°.

На рис. 1 представлены результаты расчетов величин $l_{1(n)} = -(1 - g_R^2 c_{(n)}^{-2})^{1/2}$ при следующих значениях упругих постоянных: $\mu = 929$ кбар, $K = 1875$ кбар, $\lambda_{44}^{(1)} = 0{,}42$. Здесь g_R — скорость волны Рэлея в анизотропной среде, $c_{(n)}$ — скорости парциальных комплексных волн, составляющих волну Рэлея.

С помощью предложенной слабоанизотропной модели можно исследовать особенности распространения объемной волны вдоль свободной поверхности кристаллического полупространства. Такие волны в слабоанизотропном полупространстве получаются путем трансформации волны чистого сдвига при наложении на изотропное полупространство слабой анизотропии.

Направления, по которым могут распространяться объемные волны в слабоанизотропном кристалле произвольной симметрии, должны удовлетворять одной из двух пар условий:

$$\lambda_{1232}^{(1)} = 0, \quad \lambda_{1132}^{(1)} = \varkappa^{-1} (\varkappa - 1)\, \lambda_{2232}^{(1)}, \tag{10}$$

$$\lambda_{1232}^{(1)} = 0, \quad \lambda_{1212}^{(1)} = \lambda_{3232}^{(1)}, \tag{11}$$

где $\varkappa = K\mu^{-1} + 1/3$, а компоненты $\lambda_{ijkl}^{(1)}$ вычисляются в системе координат, связанной с полупространством [4].

Направления, удовлетворяющие условиям (10) в плоскости (100) ромбического кристалла, образуют с осью [010] углы θ_0, определяемые из соотношения

$$\sin^2 \theta_0 = [p + 2q - (\varkappa - 1)^{-1} s]\, r^{-1}, \quad s = \lambda_{23}^{(1)} - \lambda_{12}^{(1)}. \tag{12}$$

Из формулы (12) при условии $\lambda_{11}^{(1)} = \lambda_{22}^{(1)}$ получаем выражение для углов θ_0 в тетрагональном кристалле, а добавляя условие $p = 0$, — в гексагональном кристалле. Если положить $q = 0$, $r = 2p$, то для кубического кристалла $\sin 4\theta_0 = 0$, т. е. в кубическом кристалле объемные волны на плоскости (100) распространяются только вдоль осей симметрии.

Решение, полученное в окрестности особых направлений (12) при помощи метода растянутых параметров, мало отличается от волны чистого сдвига и с точностью до ε^2 совпадает с решением, приведенным в [11] для гексагонального кристалла, если считать этот кристалл слабоанизотропным.

Условиям (11) в гексагональном кристалле соответствуют плоскости и направления, удовлетворяющие уравнению

$$\sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 = 0, \quad d = qr^{-1}. \tag{13}$$

Анализ уравнения (13), проведенный на основе метода растянутых параметров, показывает, что существует целая линия в фазовой плоскости (θ, φ) (особая линия), каждой точке которой соответствует плоскость и направление в ней, по которому распространяется двухпарциальная объемная волна, не затухающая с глубиной.

На рис. 2 приведена особая линия при различных значениях $\lambda_{\alpha\beta}^{(1)}$ и параметра ε: левая граница первой кривой определяется при значениях $\varphi_0 = 0$, $m = q - \varkappa^{-1}(q + s) \neq 0$, левая граница второй кривой — при $\varphi_0 = {}^4/_3\,[3/4\varepsilon m^2 (1 - d)\, q^{-1}]^{1/4}$, левая граница третьей кривой — при $\varphi_0 = 0$, $m = 0$.

Можно показать, что результаты, полученные для условий (11) в гексагональном кристалле, не зависят от угла ψ.

Анализ полученных результатов показывает, что при $\max |\lambda_{\alpha\beta}^{(1)}| < 0{,}22$ реальный кристалл можно считать слабоанизотропным; этому условию удовлетворяют, например, кристаллы вольфрама, алюминия, молибдена. Если же $\max |\lambda_{\alpha\beta}^{(1)}| > 0{,}22$, то для построения слабо анизотропного аналога необходимо параметр ε выбрать так, чтобы выполнялось условие $\max |\varepsilon\lambda_{\alpha\beta}^{(1)}| < 0{,}22$.

Для слабоанизотропных кристаллов, кроме объемных и поверхностных волн, рассматривались и другие типы волновых решений, а именно волны Лява [12], а также нестационарные волны осевой и центральной симметрий [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Любимов В. Н., Санников Д. Г.* Поверхностные квазиобъемные упругие волны в окрестности избранных направлений и поверхностей в кристаллах // ФТТ. 1975. Т. 17. № 2. С. 478—483.
2. *Любимов В. Н., Санников Д. Г.* Поверхностные квазиобъемные волны в низкосимметричных кристаллах // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 3. С. 458—460.
3. *Россихин Ю. А.* Волны в слабоанизотропных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 160—162.
4. *Макеев В. М., Россихин Ю. А.* Построение равномерно пригодного решения для волны Рэлэя в слабоанизотропной упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 75—82.
5. *Андерсон О.* Определения и некоторые применения изотропных упругих постоянных поликристаллических систем, полученных из данных для монокристаллов // Физическая акустика. Т. 3. Ч. Б / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1968. С. 62—121.
6. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М.: Мир, 1967.
7. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. С. 138.
8. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
9. *Lothe J., Barnett D. M.* On the existence of curface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. № 2. P. 428—433.
10. *Фарнелл Дж.* Свойства упругих поверхностных волн // Физическая акустика. Т. 6. / Под ред. У. Мэзона, Р. Терстона. М.: Мир, 1973. С. 139—202.
11. *Альшиц В. И., Лоте Е.* О поверхностных волнах в гексагональных кристаллах // Кристаллография. 1978. № 23. В. 5. С. 901—913.
12. *Россихин Ю. А.* О волнах Лява в слабоанизотропной среде // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 12. С. 118—121.

13. *Россихин Ю. А.* О влиянии слабой анизотропии на характер распространения цилиндрических и сферических ударных волн // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 1. С. 34—37.

Воронежский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию 27.12.89

V. M. Makeev, Yu. A. Rossihin

APPLICATION OF SLIGHTLY ANISOTROPIC MODELS FOR DESCRIPTION OF MONOCRYSTALS DYNAMIC BEHAVIOUR

Perturbation methods which are used successfully in various parts of the theory of elasticity didn't receive proper development in the anisotropic bodies theory. Only several published articles are known in that field [1—4]. Here for an arbitrary monocrystal the construction of equivalent slightly anisotropic model, which by using a perturbation technique enables to reveal and investigate the main features of some types waves behaviour in a given crystal, is developed. Problems of Rayleigh and volume waves propagation in slightly, anisotropic half-spaces of cubic, hexagonal, tetragonal and rhombic symmetries are considered. It is shown that the results received for crystals of finite anisotropy and their slightly anisotropic analogues are in good agreement with each other.