3. *Кирпичникова Н. Я., Киселев А. П.* Поляризационно-спектральные аномалии поверхностных волн в почти слоистом упругом полупространстве // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1987. Т. 165. С. 102—114.

Ленинградское отделение
Математического института
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
12.12.88

УДК 519.595

Манукян К. М.

О РАСЧЕТЕ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ В ПЛОСКО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Точное решение краевой задачи об определении звуковых полей в двумерных областях сложной формы связано со значительными математическими трудностями. Это приводит к необходимости использования приближенных методик [1, 2], достаточно хорошо работающих при наличии слабых градиентов вдоль направления распространения звуковых волн. В настоящей работе дана конечно-элементная формулировка уравнения звукового поля в неоднородной среде, позволяющая численно решать задачи в областях с большими градиентами как характеристик физических свойств, так и геометрических параметров рассматриваемой области.

Рассмотрим плоскую задачу в бесконечной вдоль направления распространения звуковых волн слоистой области. Область является плоскослоистой всюду, за исключением некоторой конечной области II. Для определенности положим, что источник звуковых волн находится в полубесконечной плоскослоистой области I, правая граница которой описывается отрезком прямой $x=0$. Левая граница полубесконечной области III, следующей за областью II, описывается отрезком прямой $x=L$. Поскольку области I и III имеют плоскослоистую структуру, решения в них могут быть получены методом нормальных волн [3]. Решение в существенно неоднородной области II должно удовлетворять уравнению звукового поля в неоднородной среде [4]

$$\nabla(\rho_j^{-1}(x,y)\nabla U(x,y))+\rho_j^{-1}(x,y)K_j^2(x,y)U(x,y)=0,\quad j=0,1,\dots N \tag{1}$$

с граничными условиями, стыкующими конечно-элементное решение в области II с решениями в областях I и III

$$\partial U(x,y)/\partial x=F(U)\ \text{ при } x=0 \tag{2}$$

и

$$\partial U(x,y)/\partial x=T(U)\ \text{ при } x=L, \tag{3}$$

условиями непрерывности на границах слоев:

$$U(x,H_i+0)=U(x,H_i-0), \tag{4}$$

$$\rho_{i-1}^{-1}(x,H_i+0)\,\partial U(x,H_i+0)/\partial n=\rho_i^{-1}(x,H_i-0)\,\partial U(x,H_i-0)/\partial n \tag{5}$$

и с граничными условиями вдоль линий $y=0$ и $y=H_N$

$$U(x,0)=0, \tag{6}$$

$$U(x,H_N)=0. \tag{7}$$

Здесь N – количество слоев, $\rho_i(x,y)$ – плотность в i-м слое, $K_i(x,y)=2\pi f/C_i(x,y)$, f – частота в Гц, $C_i(x,y)$ – скорость звука в точке (x,y), $y=H_i(x)$ – уравнение кривой, отделяющей слои $i-1$ и i.

Функции $F(U)$ и $T(U)$ в (2) и (3) могут быть получены по аналогии с [5] с учетом многослойности области рассмотрения

$$F(U)=-i\sum_{j=1}^{M_1}\lambda_j\psi_j(y)\int_{-H_N(0)}^{0}\rho^{-1}\psi_j(y)U\,dy\Big/\int_{-H_N(0)}^{0}\rho^{-1}\psi_j^2(y)\,dy+2i\sum_{j=1}^{M}\lambda_jA_j\psi_j, \tag{8}$$

$$T(U)=i\sum_{l=1}^{M_2}k_l\varphi_l(y)\int_{-H_N(L)}^{0}\rho^{-1}\varphi_l(y)U\,dy\Big/\int_{-H_N(L)}^{0}\rho^{-1}\varphi_l^2(y)\,dy. \tag{9}$$

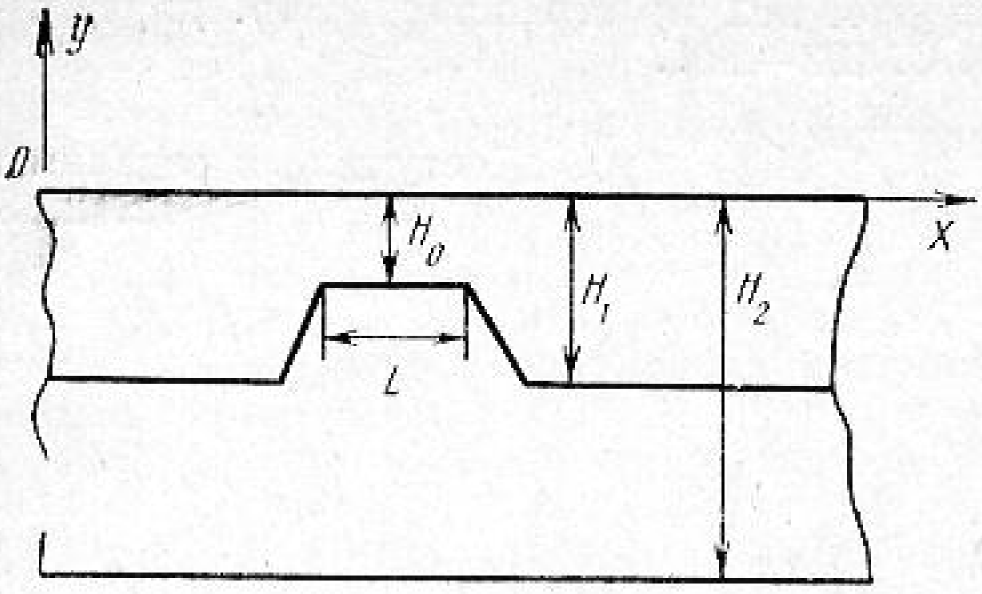

Рис. 1

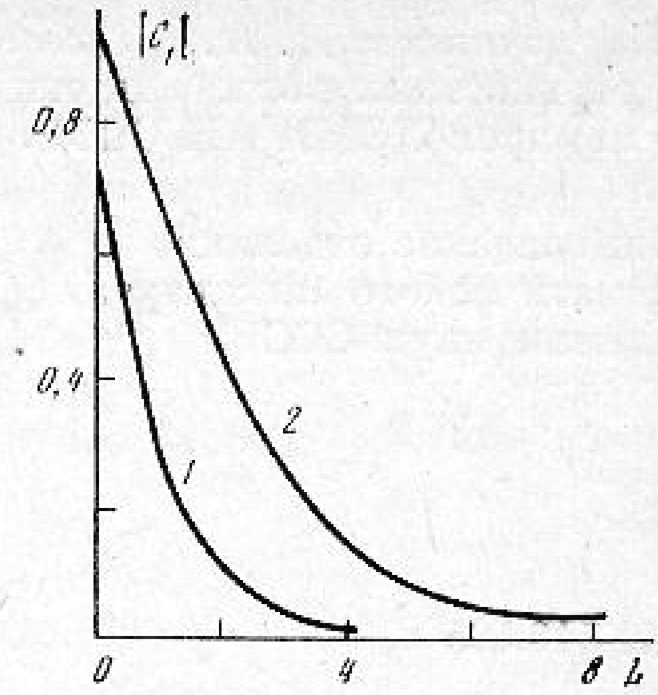

Рис. 2

Рис. 1. Расчетная модель двухслойной жидкости с границей сложной формы между слоями

Рис. 2. Зависимость амплитуды проходящей от величины L: $1-H_0=0{,}6$, $2-H_0=1{,}2$

Здесь M – количество нормальных волн, приходящих из области I, M_1 и M_2 – количество отраженных ($M\leqslant M_1$) и проходящих нормальных волн. λ_j, $\psi_j(y)$, $j=1,\ldots M_1$ и k_l, $\varphi_l(y)$, $l=1,\ldots M_2$ – собственные значения и собственные функции, характеризующие нормальные волны в областях I и III соответственно.

Используя метод взвешенных невязок [6] и разделив область II на конечные элементы, из соотношений (1)–(9) можно получить систему конечно-элементных линейных алгебраических уравнений

$$[G]\{U\}=\{P\}, \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered}[G]=\sum_{j=0}^{N}\Bigg[\int\limits_{S_j}\rho_j^{-1}(x,y)\nabla[N]\nabla[N]^T\,ds-\int\limits_{S_j}\rho_j^{-1}(x,y)K_j^2(x,y)[N][N]^T\,ds+\\
+i\sum_{l=1}^{M_1}\lambda_l\int\limits_{H_j(0)}^{H_{j+1}(0)}\rho_j^{-1}(x,y)\psi_l(y)[N]dy\int\limits_{H_j(0)}^{H_{j+1}(0)}\rho_j^{-1}(x,y)\psi_l(y)[N]^T\,dy\Bigg/\int\limits_{H_j(0)}^{H_{j+1}(0)}\rho_j^{-1}(x,y)\cdot\\
\cdot\psi_l^2(y)\,dy-i\sum_{l=1}^{M_2}k_l\int\limits_{H_j(L)}^{H_{j+1}(L)}\rho_j^{-1}(x,y)\varphi_l(y)[N]dy\cdot\\
\cdot\int\limits_{H_{j+1}(L)}^{H_j(L)}\rho^{-1}(x,y)\varphi_l(y)[N]^T\,dy\Bigg/\int\limits_{H_{j+1}(L)}^{H_j(L)}\rho_j^{-1}(x,y)\varphi_l^2(y)\,dy\Bigg],\end{gathered} \tag{11}$$

$$\{P\}=2i\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{H_j(0)}^{H_{j+1}(L)}\rho_j^{-1}(x,y)[N]\sum_{l=1}^{M_1}A_l\lambda_l\psi_l(y)\,dy. \tag{12}$$

Здесь $[N]^T=[N_1, N_2,\ldots N_m]$, N_i – функция формы i-го узла конечного элемента [6], m – число узлов в конечном элементе.

На основе полученных формул создана программа на Фортране, реализованная на ЭВМ тип ЕС и СМ-4. Библиотека элементов программы включает треугольный, четырехугольный линейный и четырехугольный восьмиузловой изопараметрический конечные элементы. Численное решение ряда тестовых задач с использованием элементов различных типов показало, что восьмиузловые четырехугольные элементы при одной и той же точности полученного решения позволяют существенно (в несколько раз) сократить время решения задачи на ЭВМ.

Для иллюстрации некоторых возможностей разработанного программного обеспечения рассмотрим задачу о распространении первой нормальной волны единичной амплитуды вдоль оси OX в двухслойной жидкости с границей сложной формы между слоями (рис. 1). При расчетах использованы следующие числовые значения: $C_1=1000$ м/с, $C_2=4000$ м/с, $\rho_1=1$ г/см³, $\rho_2=2$ г/см³, $H_2=\pi/2$, $H_2=\pi$.

На рис. 2 представлены зависимости амплитуды проходящей волны ($|C_1|$) от величины L для двух значений минимальной толщины первого жидкого слоя (H_0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Распространение волн и подводная акустика/Под ред. Келлера Д. Б. Пападакиса Д. С. М.: Мир, 1980.
2. *Завадский В. Ю.* Метод сеток для волноводов. М.: Наука, 1986. 368 с.
3. *Завадский В. Ю.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972. 558 с.
4. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 338 с.
5. *Rix G. J., Marin S. P.* Variational methods for underwater acoustic problems // J. Comp. Phys. 1978. V. 28. № 2. P. 253–270.
6. *Зенкевич О. К.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

Поступило в редакцию
07.09.88

УДК 534

В. И. Попков

ОЦЕНКА СИЛ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕТОДОМ ВЗАИМНОСТИ ШУМОИЗЛУЧЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ЧЕРЕЗ ПРОМЕЖУТОЧНУЮ КОНСТРУКЦИЮ

При локализации источников шума и вибраций и прогнозировании вибраций сооружений или транспортных средств необходимо знание сил, которые может развивать машина в условиях установки на фундамент с бесконечным сопротивлением.

Матрица таких сил $[Q^n_{i\infty}]$, приведенных к узлам крепления машины к присоединенным конструкциям, характеризует машину как многополюсный генератор колебаний [1]. Силы $Q^n_{i\infty}$ удается определять с контролируемой погрешностью при работе машины на амортизаторах с известным механическим сопротивлением.

По определению $Q^n_{i\infty} = \dot{q}^n_{i\infty} Z^n_{ia\,\text{пер}}$, где $\dot{q}^n_{i\infty}$ — вибрация машины в n-й точке в i-м направлении, установленной на амортизации на фундамент с бесконечно большим сопротивлением, $Z^n_{ia\,\text{пер}}$ — передаточное сопротивление амортизатора.

Оценка сил $Q^n_{i\infty}$ может быть выполнена при работе механизма в реальных условиях в составе установки по данным измерения вибрации механизма $\dot{q}_i{}^n$ по формуле

$$Q^n_{i\infty} = \dot{q}^n_i Z^n_{ia\,\text{пер}}. \tag{1}$$

Ошибка такой оценки величин $Q^n_{i\infty}$ обусловлена возможным отличием $\dot{q}^n_{i\infty}$ от $\dot{q}_i{}^n$ при перестановке механизма с фундамента с $Z_\text{ф} = \infty$ на фундамент с конечным сопротивлением. Относительная погрешность определения $Q^n_{i\infty}$ при этом равна

$$\varepsilon_Q = \frac{Z^n_{ia\,\text{пер}}}{Z^n_{ia\,\text{пер}} - \Pi_i{}^n (Z_{i0}{}^n + Z^n_{ia})},$$

где $Z_{i0}{}^n$ — приведенное механическое сопротивление конструкций механизма по отношению к силам, действующим в местах крепления амортизаторов; $\Pi_i{}^n = \dot{q}_i{}^n/\dot{q}^n_{i\text{ф}}$ — перепад вибрации на n-м амортизаторе.

Очевидно, что при $Z_0 \gg Z_a$ и перепаде $\Pi \gg 1$ вибрация механизма не зависит от характеристик фундамента и оценка $Q^n_{i\infty}$ будет точной. Максимальная ошибка оценки $Q^n_{i\infty}$ имеет место при $Z_a \gg Z_0$. Она примерно равна: $\varepsilon_Q = 1/(1 - \alpha\Pi_i{}^n)$, где $\alpha = Z_{ia}{}^n/Z^n_{ia\,\text{пер}}$ — отношение входного и переходного сопротивлений амортизатора.

Однако и при соотношении $Z_a \gg Z_0$ ошибка мала. Так, на частотах до первого собственного резонанса амортизатора $Z_{ia} = Z_{ia\,\text{пер}}$ и $\varepsilon_Q = 1/1 - \Pi$, т. е. $\varepsilon_Q \leqslant 10\%$ при $\Pi \geqslant 11$. После первого собственного резонанса амортизатора α сначала растет пропорционально квадрату частоты, затем имеет ряд максимумов и минимумов, но всегда остается гораздо больше единицы. Поэтому ε_Q пренебрежимо уменьшается даже при значении Π, близком к единице.

С учетом (1) звуковое давление p^k от работы k-й машины в общем звуковом поле, создаваемом через промежуточную конструкцию всеми работающими машинами установки, можно определить по формуле

$$p^k = \frac{\sum\limits_n \sum\limits_i \dot{q}_i{}^n Z^n_{ia\,\text{пер}}\, \dot{q}^n_{iu\text{ф}}}{V_u},$$