

УДК 532.594:534.23

ГЕНЕРАЦИЯ НИЗКОЧАСТОТНОГО ЗВУКА
ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
УЛЬТРАЗВУКОВЫМИ ПУЧКАМИ ©

Наугольных К. А., Рыбак С. А., Третьякова С. Ю.

Решена задача о генерации низкочастотного звука на поверхности жидкости вследствие нелинейного взаимодействия высокочастотного звука с гравитационно-капиллярными волнами. Показано, что механизм трансформации звука, учитывающий нелинейное взаимодействие звука с гравитационно-капиллярными волнами на поверхности жидкости, является более эффективным по числу Маха, чем механизм параметрической генерации звука в объеме жидкости.

Нелинейные взаимодействия волн открывают возможность создания устройств для преобразования частоты акустических сигналов. Примером может служить параметрический излучатель звука, в котором мощная высокочастотная волна накачки используется для возбуждения низкочастотного излучения. Эффективность этого устройства, однако, сравнительно невелика, что в значительной степени связано с малой нелинейностью среды. Более эффективны нелинейные взаимодействия на свободной границе сред, обусловленные нелинейностью граничных условий. Возникает естественный вопрос о характеристиках преобразователя частоты акустического излучения, основанного на взаимодействии поверхностных волн. Теоретическому анализу этого вопроса посвящена настоящая работа.

Рассмотрим одновременно два процесса, каждый из которых хорошо известен: процесс генерации поверхностных волн высокочастотным ультразвуковым пучком и излучение поверхностными волнами низкочастотного звука [1] — и выразим амплитуду излученной низкочастотной волны через амплитуды высокочастотных волн.

Для описания этих процессов в граничных условиях задачи на свободной поверхности жидкости необходимо удерживать нелинейные члены. Пусть ось z направлена вертикально вверх и плоскость $z=0$ совпадает со свободной невозмущенной поверхностью жидкости. Тогда граничные условия на свободной поверхности можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - g\xi + \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned} \quad i=1, 2,$$

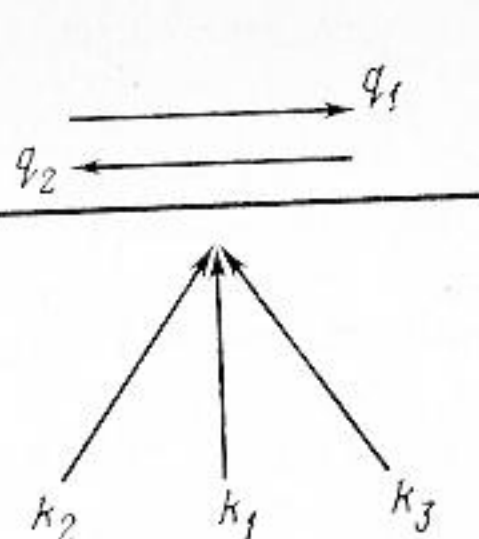
где φ — потенциал скорости движения жидкости, ξ — смещение ее поверхности. После снесения этих уравнений на поверхность $z=0$ получим следующую систему уравнений [2]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\xi + \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = 0. \quad (2)$$

Пусть на поверхность жидкости падают три звуковые волны: одна —

Схема расположения волновых векторов звуковых и поверхностных волн: q_1, q_2 — волновые векторы поверхностных волн, k_1, k_2, k_3 — волновые векторы высокочастотных звуковых волн



нормально поверхности

$$\varphi_1 = \varphi_{10} e^{-i\omega_1 t + ik_1 z} + \varphi_{10}' e^{-i\omega_1 t + ik_1 z}$$

и две другие под углом $\pm\alpha$ к нормали

$$\varphi_3 = \varphi_{30} e^{i\omega_3 t + ik_{3x}x + ik_{3z}z} + \varphi_{30}' e^{-i\omega_3 t + ik_{3x}x - ik_{3z}z},$$

где φ_{i0} — амплитуды падающих волн, φ_{i0}' — амплитуды отраженных волн (рисунок).

Волны φ_1 и φ_2 генерируют поверхностную волну φ_{q1} , волны φ_3, φ_1 — волну φ_{q2} . Волны $\varphi_{q1}, \varphi_{q2}$, взаимодействуя между собой, излучают звуковую волну φ_s . Таким образом, энергия падающих на поверхность звуковых волн $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ с «помощью» поверхностных волн $\varphi_{q1}, \varphi_{q2}$ перекачивается в волну φ_s .

Подставляя в граничные условия выражения для φ и ξ и приравнявая члены при одинаковых экспонентах для медленно меняющихся амплитуд поверхностных волн, получим следующие уравнения:

$$\dot{\varphi}_{q1} = 2ik_{1z}k_{2z} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1\omega_2} \varphi_1\varphi_2 - \frac{5}{4} iKq\varphi_s\varphi_{q2}^*, \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}_{q2} = 2ik_{1z}k_{2z} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1\omega_2} \varphi_1\varphi_2 - \frac{5}{4} iKq\varphi_s\varphi_{q1}^*, \quad (4)$$

где в коэффициентах правых частей уравнений — потенциалах взаимодействия — сохранены лишь главные члены по малому параметру $\varepsilon = K/q$.

Первое слагаемое в (3) соответствует генерации поверхностной волны высокочастотными звуковыми волнами, второе слагаемое обусловлено излучением звука вследствие взаимодействия поверхностных волн φ_{q1} и φ_{q2} между собой.

Для медленно меняющейся амплитуды звука получаем уравнение

$$\varphi_s = \frac{4q^2}{\Omega} \varphi_{q1}\varphi_{q2}. \quad (5)$$

Выразим амплитуду генерируемой низкочастотной волны φ_s через амплитуды задаваемых высокочастотных волн $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Для этого рассмотрим установившийся процесс генерации поверхностных волн, что соответствует равенству нулю левых частей уравнений (3), (4). Тогда из уравнений (3), (4) найдя φ_{q1} и φ_{q2} и подставив их выражения в (5), для φ_s получим

$$|\varphi_s|^2 \varphi_s^* = \frac{4}{5} \frac{k_1^2 k_2^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \varphi_0^4 c^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}. \quad (6)$$

Для оценки φ_s положим $\omega_1 \approx \omega_2, k_1 \approx k_2$. Тогда $\varphi_s^3 = (k\varphi/c)^4 (c^6/\Omega^3)$. Откуда

$$\varphi_s = M^{1/3} \frac{c^2}{\Omega}, \quad (7)$$

где $M = k\varphi/c$. Соответственно для амплитуды давления получаем

$$P = \rho \Omega \varphi = \rho M^{4/3} c^2. \quad (8)$$

Выше рассматривалось взаимодействие плоских волн.

Предположим теперь, что на поверхность падают звуковые пучки так, что низкочастотная звуковая волна излучается поршнем, размеры которого определяются величиной поперечного сечения пучков. Амплитуда давления в этом случае определяется формулой

$$P = \frac{\Omega \rho S}{2\pi R} V. \quad (9)$$

Подставляя (3) в (9), получим выражение для амплитуды давления в низкочастотной звуковой волне на оси диаграммы направленности в дальней зоне:

$$P_{\text{нч}} = \Omega S \rho c \sqrt[3]{M^4} / 2\pi R. \quad (10)$$

Сравним это выражение с формулой Вестервельта [3]

$$P_w = \frac{\varepsilon \Omega^2 S l_3}{8\pi R_0 c_0^4 \rho_0} p_{01} p_{02} = \frac{\varepsilon \Omega^2 S l_3}{8\pi R_0} \rho M^2. \quad (11)$$

Отсюда

$$\frac{P_{\text{нч}}}{P_w} = \frac{c}{\varepsilon \Omega l_3} \frac{S_{\text{н}}}{S_w} M^{-2/3}, \quad (12)$$

так как $M \ll 1$, то из приведенной формулы следует, что возбуждение низкочастотной волны в результате взаимодействия поверхностных волн происходит эффективнее, чем в случае объемных взаимодействий. Например, при $M = 10^{-5}$ получаем выигрыш по числу Маха $\approx 10^3$.

Как видно из выражений для коэффициентов взаимодействия, $\sigma_i \sim k_1, k_2$, поэтому при сравнимых частотах нелинейность поверхностных волн в отношении $c^2/c_{\text{кап}}^2$ эффективнее, чем нелинейность жидкости ($c_{\text{кап}}^2 = \alpha k$). Но так как непосредственно в нелинейные члены входят волновые числа, то для звуковых волн с длинами волн, которые сравнимы с длинами волн для капиллярных волн, т. е. для высоких частот звука, эти нелинейности могут оказаться одного порядка.

В сущности, именно такая ситуация и рассматривается в данной работе. Тем не менее рассматриваемый процесс трансформации звука в низкочастотную область оказывается более эффективным, как показано выше, чем просто выделение разностной частоты звука без генерации капиллярных волн на промежуточном этапе.

В самом деле, при падении пары высокочастотных звуковых волн на поверхность жидкости разностная низкочастотная звуковая волна приобретает амплитуду согласно соотношению

$$\varphi^I = \sigma_1 \varphi_2^0, \quad (13)$$

где $\sigma_1 \sim k_1 k_2$, в то время как в результате рассмотренного выше процесса

$$\varphi^{II} = \left(\sigma_s \frac{\sigma_q^2}{\sigma_{sq}^2} \right)^{1/3} \varphi^{4/3}, \quad (14)$$

где

$$\sigma_s \sim 4iq^2/\Omega, \quad \sigma_q \sim 2k_{1z}k_{2z}, \quad \sigma_{sq} \sim K_q$$

и отношение амплитуд

$$\frac{\varphi_s^{II}}{\varphi_s^I} = \left(\sigma_s \frac{\sigma_q^2}{\sigma_{sq}^2} \right)^{1/3} \frac{1}{\sigma_1} \varphi_0^{-2/3}. \quad (15)$$

Причина этого в том, что если в случае I низкочастотная волна просто «припасовывается», то во втором процессе имеет место развивающееся во времени резонансное накопление капиллярной волны, что позволяет накопиться как капиллярным волнам, так и низкочастотному звуку до весьма больших величин.

Конечно, для этого требуется определенное время, которое можно оценить из уравнений:

$$\dot{\varphi}_q = \sigma_q \varphi_1 \varphi_2 - \sigma_{qs} \varphi_s \varphi_{q2}^*, \quad (16)$$

$$\varphi_s = \sigma_s \varphi_{q1} \varphi_{q2}. \quad (16')$$

Для оценки можно положить $\varphi_{q1} = \varphi_{q2}$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$. Из (16), (16') для τ получим выражение

$$\tau = \sqrt{\varphi_s} / \sqrt{\sigma_s \sigma_n \varphi_0^2}. \quad (17)$$

Подставляя в (17) значение φ_s , получаем

$$\tau = 1/2qcM^{4/3}.$$

Найдем время установления процесса для случая $\Omega/2\pi = 100$ Гц, $M = 10^{-5}$. При этих значениях $\tau \approx 3$ с. Оценим минимальную ширину пучка, необходимую для того, чтобы поверхностная волна, образующаяся в центре пучка, за время установления процесса не успела выйти за пределы пучка.

Для времени установления процесса $\tau = 3$ с $l = c_\phi \tau \approx 1$ м.

Приведенные результаты относятся к случаю полубесконечного пространства. При возбуждении низкочастотного звука на границе слоя толщины h возникают резонансные эффекты.

Для оценки рассмотрим такую модель: низкочастотная волна излучается поршнем площадью S в волновод длины h , закрытый абсолютно твердой перегородкой. Входной импеданс рассматриваемой структуры

$$Z = \rho c \operatorname{ctg} Kh, \quad (18)$$

где $K = \omega/c$.

Поскольку имеет место подъем поверхности жидкости на высоту $\xi = V(0)/(-i\omega)$, то полная нагрузка определяется импедансом

$$Z = \frac{i\rho g}{\omega} + i\rho c \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - K^2} h. \quad (19)$$

и, следовательно, генерируемая колебательная скорость на входе в волновод

$$V_0 = \frac{P_{\text{вч}}}{i\rho g/\omega + i\rho c \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - K^2} h}. \quad (20)$$

В случае бесконечного волновода $Z = \rho c$. Поэтому возможный выигрыш, вызванный резонансом в волноводе, т. е. при $\operatorname{ctg} Kh = 0$,

$$\rho c/\rho g/\omega = \omega c/g \sim 10^4. \quad (21)$$

Таким образом, взаимодействие акустических волн с поверхностными может быть использовано для трансформации высокочастотного сигнала в низкочастотный, при этом коэффициент преобразования оказывается в $M^{-3/2}$ раз выше, чем при взаимодействии акустических волн в объеме среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. О генерации звуковых волн в жидкости поверхностными волнами // Акуст. журн. 1966. Т. 12. № 3. С. 376-378.
2. Наугольных К. А., Рыбак С. А. Возбуждение поверхностных волн звуком // Вопр. судостроения. Сер. Акустика. 1978. Вып. 10. С. 61-67.
3. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9.XII.1988