АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 6

УДК 534.26

ИЗОЛЯЦИЯ НУЛЕВОЙ МОДЫ В ВОЛНОВОДЕ С СЕЧЕНИЕМ ЛЮБОЙ ФОРМЫ ©

Лапин А. Д.

Рассчитано ослабление нулевой моды в волноводе с жесткой стенкой, имеющей малые синусоидальные неровности на конечном участке.

В работе [1] рассчитана звукоизоляция в волноводе с круговым сечением, создаваемая периодическими неровностями его стенок. Аналогичным способом можно рассчитать звукоизоляцию в волноводе с другим сечением, если известны нормальные волны (моды) в нем. Однако моды в волноводе удается найти методом разделения переменных лишь в тех случаях, когда стенки волновода совпадают с координатными поверхностями какой-либо системы координат.

Нулевая мода в волноводе с жесткими стенками представляет собой «обычную» плоскую волну, бегущую вдоль его оси, и она не зависит от формы сечения волновода. По этой причине можно ожидать, что малые неровности с периодом, равным половине длины звуковой волны, будут изолировать нулевую моду в волноводе с сечением любой формы. Ниже рассчитано ослабление нулевой моды в волноводе с сечением S и жесткой стенкой, имеющей малые синусоидальные неровности на конечном участке длиной L. Расчет выполнен на основе фундаментального факта, что амплитуда нулевой моды в волноводе, возбуждаемом монополем, не зависит от положения монополя в сечении S. Это утверждение следует из общих формул [2, 3]. Его также можно получить усреднением звукового поля по сечению волновода. Пусть монополь с объемной скоростью F расположен в точке (x_0, y_0, z_0) внутри волновода, ось z декартовой системы координат направим вдоль волновода. Звуковое давление p удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2p=i\omega\rho F\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \qquad (1)$$

где $k=\omega/c$, ρ и c — соответственно плотность среды и скорость звука в ней, ω — частота звука, $\delta(z-z_0)$ — дельта-функция. Проинтегрируем уравнение (1) по сечению S волновода. При учете теоремы Грина

$$\int\limits_S\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)dS=\int\limits_l\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\,dl,$$

где l — контур сечения S, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, и граничного условия $\partial p/\partial\mathbf{n}=0$ на стенке волновода получим следующее уравнение для величины $\tilde{p}(z)=\frac{1}{S}\int\limits_S p\,dS$:

$$\frac{d^2\tilde{p}}{dz^2}+k^2\tilde{p}=i\omega\rho\frac{F}{S}\delta(z-z_0). \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) дает нулевую моду $p_0(z)$ в волноводе

$$p_0(z)=\tilde{p}(z)=\frac{\rho c F}{2S}\exp(ik|z-z_0|). \qquad (3)$$

Согласно этой формуле, амплитуда нулевой моды не зависит от поперечных координат x_0, y_0. Поле нулевой моды в волноводе не изменяется при перемещении монополя в сечении $z=z_0$ и даже при помещении его на стенку волновода.

Рассмотрим задачу об отражении нулевой моды в волноводе от малых синусоидальных неровностей его стенок. Пусть в цилиндрической системе координат (r, φ, z) стенка волновода описывается уравнениями

$$\begin{gathered} r=R(\varphi) \quad z<0, \quad z>L, \\ r=R(\varphi)+a(\varphi) \cos (2kz) \quad 0<z<L, \end{gathered} \tag{4}$$

где $R(\varphi)$ и $a(\varphi)$ — функции с периодом 2π, $k|a|\ll 1$. Слева на неровности падает нулевая мода $p_{\text{пад}}=\exp(ikz)$. Требуется найти коэффициенты отражения и прозрачности этой моды.

Обозначим через p — полное поле в волноводе с неровной стенкой. Это поле будем искать методом малых возмущений, ограничиваясь первым приближением по высоте неровностей. Поле p удовлетворяет уравнению Гельмгольца в заполняющей среде и следующему граничному условию на стенке:

$$\partial p/\partial \mathbf{n}=0 \text{ при } r=R(\varphi)+u(\varphi, z), \tag{5}$$

где $u(\varphi, z)=a(\varphi) \cos (2kz)$, $k|a|\ll 1$. Точное граничное условие для поля, заданное на неровной границе $r=R(\varphi)+u(\varphi, z)$, можно «снести» на поверхность $r=R(\varphi)$ и тогда в первом приближении по $k|a|$ получим соотношение

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}^0}\right)_R + T(\varphi)\left\{u\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{1}{R^2}\left[u\frac{dR}{d\varphi}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi\partial r}-\frac{2}{R}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)+ \right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right]\right\}_R=0, \tag{6}$$

где

$$T(\varphi)=\left[1+\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{d\varphi}\right)^2\right]^{-1/2},$$

$\mathbf{n}^0$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $r=R(\varphi)$.

Представим полное поле в волноводе в виде суммы падающего и рассеянного полей и предположим, что рассеянное поле $p^{(1)}=p-\exp(ikz)$ мало по сравнению с падающим полем. Пользуясь соотношением (6), получим следующее приближенное граничное условие для $p^{(1)}$:

$$\left(\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \mathbf{n}^0}\right)_R = T(\varphi)\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z}\right)_R=-i\omega\rho f(\varphi, z), \tag{7}$$

где

$$f(\varphi, z)=\frac{ik}{\rho c}a(\varphi)T(\varphi)\{\exp(-ikz)-\exp(i3kz)\}. \tag{8}$$

Согласно этим формулам, можно полагать, что поле $p^{(1)}$ создается сторонними источниками объемной скорости $f(\varphi, z)$, распределенными по стенке $r=R(\varphi)$. Эти источники резонансным образом возбуждают нулевую моду, бегущую в отрицательном направлении оси z, и слабо возбуждают остальные моды. Пользуясь формулами (3), (7) и (8), получим выражение для рассеянного поля при $z<0$:

$$p^{(1)}\approx p_{\text{отр}}=\frac{\rho c}{2S}\int_0^L\int_0^{2\pi} f(\varphi, z_0)\exp(ikz_0)R(\varphi)\,d\varphi\,dz_0\exp(-ikz).$$

При $kL\gg 1$ коэффициент отражения нулевой моды равен

$$V=\frac{ikL}{2S}\int_0^{2\pi} a(\varphi)T(\varphi)R(\varphi)\,d\varphi.$$

Из соотношения, выражающего закон сохранения энергии, получим модуль коэффициента прозрачности $|W|=\sqrt{1-|V|^2}$.

В результате рассеяния нулевой моды от синусоидальных неровностей с периодом, равным половине длины звуковой волны, звуковая энергия из падающей моды переходит в отраженную моду и поэтому падающая мода будет ослабевать по мере распространения в волноводе с неровной стенкой. Однако в рассматриваемом приближении оценить ослабление этой моды можно лишь для таких значений L, при которых рассеянное поле еще мало по сравнению с падающим.

При достаточно большой длине L неровного участка волновода поле $(p-p_{\text{пад}})$ становится немалым по сравнению с полем $p_{\text{пад}}$ и тогда при решении задачи рассеяния нельзя выбирать $p_{\text{пад}}$ в качестве нулевого приближения. В этом случае ослабление падающей моды с расстоянием можно рассчитать методом малых возмущений при специальном выборе формы нулевого приближения, соответствующей основной части полного поля в волноводе [4]. При выбранных неровностях рассеяние почти полностью происходит в нулевую моду, бегущую в отрицательном направлении оси z, и поэтому нулевое приближение, учитывающее основную часть полного поля, будем искать в виде

$$p^{(0)}=\exp(ikz)+V\exp(-ikz)\ \text{при}\ z\leqslant 0, \tag{9}$$

$$p^{(0)}=M\exp[i(k+\varkappa)z]J_0(\tilde{\zeta}r)+$$
$$+N\exp[i(-k+\varkappa)z]J_0(\tilde{\tilde{\zeta}}r)\ \text{при}\ 0\leqslant z\leqslant L, \tag{10}$$

$$p^{(0)}=W\exp[ik(z-L)]\ \text{при}\ z\geqslant L, \tag{11}$$

где

$$\zeta=\sqrt{k^2-(k+\varkappa)^2},\ \tilde{\tilde{\zeta}}=\sqrt{k^2-(k-\varkappa)^2},\ |\varkappa|\ll k,$$

J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

В этих формулах постоянные $\varkappa$, V, W, M и N выберем таким образом, чтобы звуковое поле удовлетворяло следующим условиям: 1) давление и осевая скорость непрерывны при $z=0$ и при $z=L$; 2) поправка $p^{(1)}=p-p^{(0)}$ мала по сравнению с нулевым приближением $p^{(0)}$.

Поле $p^{(0)}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в заполняющей среде; на границе $r=R(\varphi)$ производная $\partial p^{(0)}/\partial\mathbf{n}^0$ равна нулю при $z<0$ и при $z>L$ и отлична от нуля при $0<z<L$. Подставив $p=p^{(0)}+p^{(1)}$ в соотношение (6) и предположив, что выполнено неравенство $|p^{(1)}|\ll|p^{(0)}|$, получим граничное условие для $p^{(1)}$:

$$\left(\frac{\partial p^{(1)}}{\partial\mathbf{n}^0}\right)_R=-T(\varphi)\left\{\left(\frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial r}\right)_R+u\left(\frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial r^2}\right)_R-\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z}\right)_R\right\}=$$
$$=-i\omega\rho f(\varphi,z),$$

отличающееся от соответственного граничного условия (7) только видом функции $f(\varphi, z)$. При заданных неровностях и поле (10) имеем выражение

$$\frac{i\omega\rho}{T(\varphi)}f(\varphi,z)=\left\{M\tilde{\zeta}J_0'(\tilde{\mu})+N\frac{a}{2}[\tilde{\tilde{\zeta}}^2J_0''(\tilde{\tilde{\mu}})-2k(k-\varkappa)J_0(\tilde{\tilde{\mu}})]\right\}\times$$
$$\times\exp[i(k+\varkappa)z]+\left\{N\tilde{\tilde{\zeta}}J_0'(\tilde{\tilde{\mu}})+M\frac{a}{2}[\tilde{\zeta}^2J_0''(\tilde{\mu})-\right.$$
$$\left.-2k(k+\varkappa)J_0(\tilde{\mu})]\right\}\exp[i(-k+\varkappa)z]+M\frac{a}{2}[\tilde{\zeta}^2J_0''(\tilde{\mu})+$$
$$+2k(k+\varkappa)J_0(\tilde{\mu})]\exp[i(3k+\varkappa)z]+N\frac{a}{2}[\tilde{\tilde{\zeta}}^2J_0''(\tilde{\tilde{\mu}})+$$
$$+2k(k-\varkappa)J_0(\tilde{\tilde{\mu}})]\exp[i(-3k+\varkappa)z],$$

где $\tilde{\mu}=\tilde{\zeta}R$, $\tilde{\tilde{\mu}}=\tilde{\tilde{\zeta}}R$.

Пространственные гармоники $\exp[i(k+\varkappa)z]$ и $\exp[i(-k+\varkappa)z]$ резонансным образом возбуждают нулевые моды, бегущие соответственно в положительном и в отрицательном направлениях оси z, нерезонансные пространственные гармоники $\exp[i(\pm 3k+\varkappa)z]$ дают малый вклад в рассеянное поле. Выберем коэффициенты M и N таким образом, чтобы коэффициенты возбуждения нулевых мод и поле $p^{(1)}$ обратились в нуль:

$$\int_0^{2\pi}\left\{M\tilde{\zeta}J_0'(\tilde{\mu})+N\frac{a}{2}[\tilde{\tilde{\zeta}}^2J_0''(\tilde{\tilde{\mu}})-2k(k-\varkappa)J_0(\tilde{\tilde{\mu}})]\right\}T(\varphi)R(\varphi)\,d\varphi=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\left\{N\tilde{\tilde{\zeta}}J_0'(\tilde{\tilde{\mu}})+M\frac{a}{2}[\tilde{\zeta}^2J_0''(\tilde{\mu})-2k(k+\varkappa)J_0(\tilde{\mu})\right\}T(\varphi)R(\varphi)\,d\varphi=0, \qquad (12)$$

и тогда рассеянное поле $p^{(1)}$ будет малым по сравнению с $p^{(0)}$.

Соотношения (12) являются системой однородных алгебраических уравнений для амплитуд M и N. Линеаризуя коэффициенты этой системы по малой величине $\varkappa$, приведем ее к виду

$$M\varkappa R_0-Nka_0=0,\ Mka_0+N\varkappa R_0=0,$$

где

$$R_0^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}T(\varphi)R^2(\varphi)\,d\varphi,\qquad a_0=\frac{1}{2\pi R_0}\int_0^{2\pi}a(\varphi)T(\varphi)R(\varphi)\,d\varphi. \qquad (13)$$

Из равенства определителя этой системы нулю найдем допустимые значения $\varkappa$; они равны $+i\delta$ и $-i\delta$, где $\delta=ka_0/R_0$. Отношение амплитуд N/M при $\varkappa=\pm i\delta$ равно $\pm i$. При учете обоих допустимых значений $\varkappa$ поле $p^{(0)}$ можно представить в виде

$$p^{(0)}=M^+\{\exp[i(k+i\delta)z]+i\exp[i(-k+i\delta)z]\}+$$
$$+M^-\{\exp[i(k-i\delta)z]-i\exp[i(-k-i\delta)z]\}\ \text{ при } 0\leqslant z\leqslant L. \qquad (14)$$

Из условий «сшивания» полей (9) и (14) при $z=0$ и полей (14) и (11) при $z=L$ получим коэффициенты V, W, M^+ и M^-. Коэффициенты отражения и прозрачности соответственно равны

$$V=i\,\mathrm{th}(\delta L),\ W=1/\mathrm{ch}(\delta L),$$

где $\delta=ka_0/R_0$, величины R_0 и a_0 определяются по формулам (13). Для волновода с круговым сечением и осесимметричными неровностями величины R_0 и a_0 являются соответственно радиусом сечения и амплитудой неровностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лапин А. Д.* Звукоизоляция в многомодальном волноводе, создаваемая периодическими неровностями и неоднородностями его стенок // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 6. С. 899–906.
2. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
3. *Урусовский И. А.* Об активной звукоизоляции в волноводе // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 2. С. 304–312.
4. *Рыбак С. А.* Рассеяние плоской волны на малых периодических неоднородностях // Акуст. журн. 1965. Т. 11. № 1. С. 89–92.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11.I.1989