



Рис. 2. Диаграмма интенсивности изгибно колеблющейся балки на частоте первого резонанса

нии от оси z порядка длины балки. Такая карта совпадает с диаграммой интенсивности трех симметрично расположенных по длине балки элементарных монополярных излучателей с относительным распределением производительностей $\{-1; 2,16; -1\}$, полученным усреднением колебательной скорости первой резонансной формы балки по ее участкам, колеблющимся синфазно, размещенных в центрах таких участков (см., например, работу [3]). Это обстоятельство может быть полезным при моделировании звукоизлучения сложных колебательных систем дискретными эквивалентными источниками. Сравнение диаграмм на рис. 1 и 2 наглядно показывает, что на резонансной частоте излучение балки не имеет дипольного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peterson O. K. Sound intensity measurements for describing power flow // Appl. Acoust. 1981. V. 14. № 5. P. 387—397.
2. Abe T. Noise source identification by acoustic intensity method // J. Acoust. Soc. Japan. 1983. V. 39. № 10. P. 697—702.
3. Mann J. A., Tichy I. J., Romano A. J. Instantaneous and time-averaged energy transfer in acoustic fields // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. № 1. P. 17—30.
4. Kristiansen U. K. A procedure for determining the sound intensity distribution close to a vibrating surface // J. Sound Vib. 1981. V. 76. № 2. P. 305—309.
5. Скучик Е. Основы акустики. М.: Мир, 1976. Т. 2. С. 11.
6. Мунювич И. Я., Перник А. Д., Петровский В. С. Гидродинамические источники звука. Л.: Судостроение, 1972. С. 152.
7. Thompson J. K., Trec D. K. Finite difference approximation Errors in acoustic intensity measurements // J. Sound Vib. 1981. V. 75. № 2. P. 229—236.

Ленинградский
кораблестроительный институт

Поступило в редакцию
27.IV.1988
после исправления
23.I.1989

УДК 551.463.2 : 519.25

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Голанд В. И., Кляцкин В. И.

Один из подходов к решению задачи о влиянии тонкой структуры поля скорости звука на акустическое поле в океане связан с решением стохастической задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} \varphi'' + \lambda\varphi &= V(z)\varphi, \quad \varphi'(-L) = \varphi(0), \\ \lambda &= \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2, \quad V(z) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(z), \end{aligned} \quad (1)$$

где ω — частота волны, c — скорость звука, k — волновое число, L — глубина моря. Случайная функция $\varepsilon(z)$ описывает неоднородность скорости звука.

В работе [1] стохастическая спектральная задача (1) решалась численным моделированием в предположении о том, что $\varepsilon(z)$, а с ней и $V(z)$ является гауссовским дельта-коррелированным случайным процессом с параметрами

$$\langle V(z) \rangle = 0, \quad \langle V(z) V(z') \rangle = 2\sigma_V^2 l \delta(z - z'). \quad (2)$$

Расчеты, проведенные в этой работе для интервала изменения безразмерного коэффициента диффузии нулевой моды $D_0 = 3\sigma_V^2 l L^3 / 2\pi^2 < 5$, сопоставлялись с формулами

$$\langle \lambda_n \rangle = \lambda_{0n} = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 / L^2, \quad (3)$$

$$\langle (\lambda_n - \langle \lambda_n \rangle)^2 \rangle = 3\sigma_V^2 l / L,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, полученными в [2, 3] методом усреднения по быстрым осцилляциям уравнения Фоккера—Планка (УФП) для плотности вероятности $f(\theta; L, \lambda)$ фазы θ собственной функции. Оказалось, что вторая из формул (3) даже при $D_0 \gg 1$ хорошо описывает дисперсии собственных чисел. Однако вопреки (3) в работе [1] было выявлено отличие $\langle \lambda_n \rangle$ от λ_{0n} . В интервале $1 < D_0 < 5$, в котором среднее смещение нулевой моды было найдено с погрешностью, не превышающей 10%, оказалось, что $\langle \lambda_0 - \lambda_{00} \rangle \approx -D_0/L$.

Близкие результаты, как показано ниже, могут быть получены во втором порядке теории возмущений и в рамках метода усреднения по быстрым осцилляциям УФП, в основе которого лежат найденные в [2, 3] соотношения между $f(\theta, L, \lambda)$ и плотностью вероятности собственных чисел $W_n(\lambda; L)$:

$$W_n(\lambda; L) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{V\sqrt{\lambda_{0n}}L} f(\theta; L, \lambda) d\theta = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[V\sqrt{\lambda} \int_0^L f(V\sqrt{\lambda_{0n}}L; x, \lambda) dx \right], \quad (4)$$

где λ_{0n} — невозмущенные ($V(z) = 0$) собственные числа.

Если $V(z)$ — процесс «белого шума» (2), то для достаточно малых значений безразмерного коэффициента диффузии $D_n = 3\sigma_V^2 l L / 8\lambda_{0n}$ УФП может быть осреднено по быстрым осцилляциям собственной функции и для $f(\theta; L, \lambda)$ получено аналитическое выражение [2, 3]

$$f(\theta; L, \lambda) = \left(\frac{2\lambda}{3\sigma_V^2 l L \pi} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{2\lambda}{3\sigma_V^2 l L} (\theta - V\sqrt{\lambda}L)^2 \right]. \quad (5)$$

Плотность вероятности

$$W_n(\lambda; L) = \left(\frac{L}{6\pi\sigma_V^2 l} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{L(\lambda - \lambda_{0n})^2}{6\sigma_V^2 l} \right] \quad (6)$$

была найдена в [2, 3] на основе (5) и второй из формул (4) методом стационарной фазы. При этом следующие из (6) формулы (3) совпадают с выражениями, которые могут быть получены в первом порядке теории возмущений.

Однако с помощью (5) и первой из формул (4) $W_n(\lambda; L)$ может быть получена без дополнительных приближений

$$W_n(\lambda; L) = \left(\frac{L}{6\pi\sigma_V^2 l} \right)^{1/2} (2 - (\lambda_{0n}/\lambda)^{1/2}) \exp \left[-\frac{2\lambda L}{3\sigma_V^2 l} (V\sqrt{\lambda} - V\sqrt{\lambda_{0n}})^2 \right], \quad (7)$$

что позволяет уточнить формулы (3). Отметим, что при $\lambda < \lambda_{0n}/4$ плотность вероятности $W_n(\lambda; L)$ (7) становится отрицательной. Это следствие приближения, сделанного при расчете (5) методом усреднения УФП по быстрым осцилляциям.

Если теперь применить метод стационарной фазы для вычисления моментов λ_n , то тогда в основном порядке получим (3), (6), а в следующем приближении

$$W_n^{(1)}(\lambda; L) = W_n^{(0)}(\lambda; L) \left(1 + \frac{\lambda - \lambda_{0n}}{2\lambda_{0n}} - \frac{(\lambda - \lambda_{0n})^3}{12\sigma_V^2 l \lambda_{0n}} \right), \quad (8)$$

где $W_n^{(0)}(\lambda; L)$ совпадает с (6), и

$$\langle \lambda_n \rangle - \lambda_{0n} = -2D_n/L^2. \quad (9)$$

Учет следующих членов разложения (7) по степеням $(\lambda - \lambda_{0n})$ приводит к поправкам более высокого порядка по D_n . Формула (9) соответствует произвольным однородным краевым условиям для уравнения (1).

Таким образом, метод усреднения по быстрым осцилляциям позволяет описать более тонкие эффекты, чем формулы (3), (5).]

Отличие $\langle \lambda_n \rangle$ от λ_{0n} может быть получено и во втором порядке теории возмущений, согласно которой в случае $\varphi'(0) = \varphi(L) = 0$,

$$\langle \lambda_n \rangle - \lambda_{0n} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle J_{nm}^2 \rangle}{\lambda_{0n} - \lambda_{0m}} = -\frac{4D_n}{3L^2}, \quad D_n = \frac{3\sigma_V^2 L^3}{8 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}, \quad (10)$$

$$J_{nm} = \int_0^L \varphi_{0n}(z) \varphi_{0m}(z) V(z) dz, \quad \varphi_{0n}(z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z / L.$$

Формула (10) существенно ближе к численным результатам [1], чем (9). Однако она в интервале $1 < D_0 < 5$ дает погрешность вычисления $\langle \lambda_0 - \lambda_{00} \rangle$ порядка 30%. В случае симметричных краевых условий $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ ($\lambda_{0n} = n^2 \pi^2 / L^2$)

$$\langle \lambda_n \rangle - \lambda_{0n} = -4D_n / L^2, \quad D_n = \frac{3\sigma_V^2 L^3}{8n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), видим, что при изменении краевых условий меняются не только коэффициенты диффузии, но и численные множители в выражениях для $\langle \lambda_n - \lambda_{0n} \rangle$, что отсутствует в методе усреднения по быстрым осцилляциям.

В заключение отметим, что значения коэффициента диффузии $D_0 \geq 1$ соответствует области сильных флуктуаций параметров среды, в то время как формулы теории возмущений и метода усреднения по быстрым осцилляциям обоснованы только для слабых флуктуаций среды ($D_n \ll 1$). Следовательно, полученные в работе [1] численные результаты показывают, что асимптотические разложения на самом деле имеют существенно большую область применимости, чем первоначально предполагалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голанд В. И., Кляцкин В. И. О статистике собственных значений и собственных функций одномерной краевой волновой задачи // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 828—833.
2. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. М.: Наука, 1986. 256 с.
3. Саичев А. И. О статистике собственных чисел одномерной случайно-неоднородной краевой задачи // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. С. 183—188.

Тихоокеанский океанологический институт ДВО
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
25.VIII.1988

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЫТЕКАЮЩЕЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

Гончаров В. С.

Строго говоря, вытекающие волны не являются собственными волнами границы раздела и не могут быть отнесены к «настоящим волнам» [1]. Они проявляют себя в том смысле, что при падении волны Рэля на границу раздела с жидкостью в слоистой системе возбуждается волновое поле со структурой, близкой к структуре вытекающей волны [2]. Волновое поле со структурой вытекающей волны возбуждается при отражении бесконечно тонкого луча от границы раздела жидкость — твердое тело под углом Рэля [3]. Именно в этом контексте вытекающие волны находят применение в акусто-электронной диагностике жидкостей, методах неразрушающего контроля [4, 5]. Для определения параметров вытекающей волны (декремента α , скорости V_L , угла излучения θ_R) в основном используются численные методы [1]. Известная приближенная формула для описания величины декремента обладает низкой точностью [6]. Графическое представление результатов численных расчетов дает возможность сделать определенные выводы о зависимости параметров вытекающей волны от параметров жидкости и твердого тела. Однако эти возможности ограничены, а точность количественного описания невелика. Приближенные формулы лишены этих недостатков, обладают гарантированной точностью, в том числе позволяют выяснить взаимозависимость параметров вытекающей волны.

Дисперсионное уравнение для вытекающей волны записывается в виде [1]

$$4k^2qs - (k^2 + s^2)^2 = i \frac{\rho_f q k_t^4}{\rho_t p},$$

где $q = (k^2 - k_l^2)^{1/2}$, $s = (k^2 - k_t^2)^{1/2}$, $p = (k_f^2 - k^2)^{1/2}$, k_l , k_t , k_f — волновые числа продвиговой и продольной волн в твердом теле и продольной волны в жидкости, ρ_t , ρ_f — плотности твердого тела и жидкости, $k = k_L + i\alpha$, $k_L = \omega/V_L$.